

Structures exotiques sur $\mathbb{R}^4$ par la théorie des nœuds

Stage de fin de Master 1

Giovanni Lebaron, encadré par Gérard Besson



Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable d'ouverts, localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable d'ouverts, localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemples : la boule $\mathbb{B}^n$, la sphère $\mathbb{S}^n$, l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$...

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable d'ouverts, localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemples : la boule $\mathbb{B}^n$, la sphère $\mathbb{S}^n$, l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$...

En topologie, on s'intéresse aux variétés à **homéomorphisme** près.

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable d'ouverts, localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemples : la boule $\mathbb{B}^n$, la sphère $\mathbb{S}^n$, l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$...

En topologie, on s'intéresse aux variétés à **homéomorphisme** près.

Qu'en est-il des **difféomorphismes**, du calcul différentiel ?

1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ *exotiques* ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)

1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ **exotiques** ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)



Introduction

1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ **exotiques** ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)



1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ **exotiques** ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)



1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ **exotiques** ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)



1956. Découverte d'une *structure exotique* sur $\mathbb{S}^7$ par Milnor.

1980. Travaux de Donaldson, Freedman, Quinn... sur les variétés de dimension 4.

Existe-t-il des $\mathbb{R}^n$ **exotiques** ? (des variétés **homéomorphes** mais **non difféomorphes** à $\mathbb{R}^n$ standard)



Objectif. Construire un $\mathbb{R}^4$ exotique à l'aide de **nœuds**.

① Variétés

- Variétés et bords
- Structures différentielles
- Plongements et sous-variétés

② Nœuds

- Définitions et exemples
- Invariants de nœuds
- Présentation de Wirtinger
- Nœuds bordants

③ Recollements

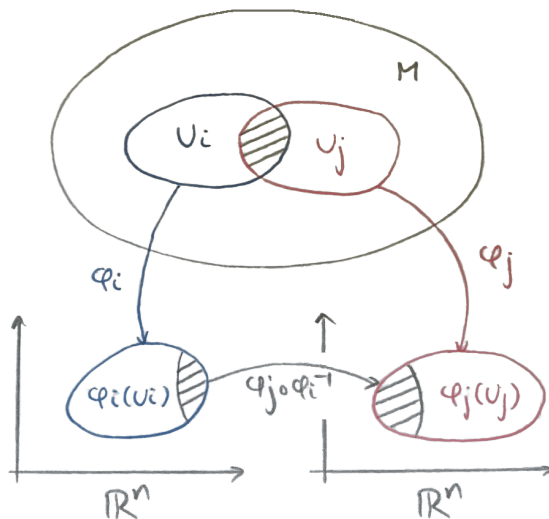
- Recollement de variétés
- Recollement de sphères
- Attachement d'anses

④ Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

- Corps à anses d'un nœud
- Régularité du corps à anses

Variétés

Quelques rappels...



Lorsque les $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont lisses, on dit que les (U_i, φ_i) forment un *atlas lisse* sur M . Cela définit une *structure différentielle* sur M .

Lorsque les $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont lisses, on dit que les (U_i, φ_i) forment un *atlas lisse* sur M . Cela définit une *structure différentielle* sur M .

Définition

Deux structures différentielles $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sur une variété M sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe un difféomorphisme $(M, \mathcal{S}) \rightarrow (M, \mathcal{T})$.

Nœuds

Définitions et exemples

Définition

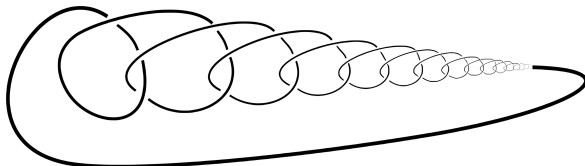
Un *nœud* est un sous-espace topologique de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Nœuds

Définitions et exemples

Définition

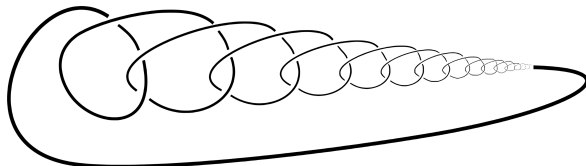
Un *nœud* est un sous-espace topologique de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.



Un nœud, ça peut être sauvage...

Définition

Un *nœud* est un sous-espace topologique de $\mathbb{S}^3$ homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.



Un nœud, ça peut être sauvage...

Un nœud *régulier* K admet un *voisinage tubulaire* $V(K) \cong \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Un nœud régulier borde toujours...

Un nœud régulier borde toujours...

→ une surface dans $\mathbb{R}^3$ (pas forcément un disque)

Un nœud régulier borde toujours...

- une surface dans $\mathbb{R}^3$ (pas forcément un disque)
- un disque dans $\mathbb{R}^4$! (on peut toujours dénouer)

Un nœud régulier borde toujours...

- une surface dans $\mathbb{R}^3$ (pas forcément un disque)
- un disque dans $\mathbb{R}^4$! (on peut toujours dénouer)

$\rho_K : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho_K(\partial D) = K$, où $D \subseteq \mathbb{R}^2$ disque fermé.

Un nœud régulier borde toujours...

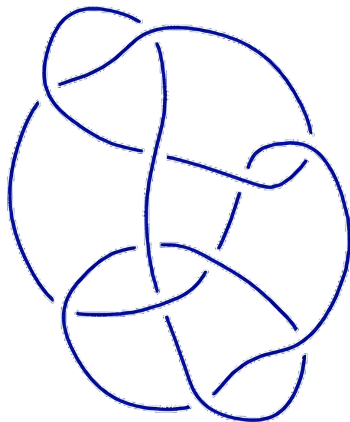
- une surface dans $\mathbb{R}^3$ (pas forcément un disque)
- un disque dans $\mathbb{R}^4$! (on peut toujours dénouer)

$\rho_K : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho_K(\partial D) = K$, où $D \subseteq \mathbb{R}^2$ disque fermé.

Définition

Si le plongement ρ_K est lisse, on dit que K est *bordant*.

Le *nœud de Conway* n'est pas bordant (Lisa Piccirillo, 2018).



Recollements

Attachement d'anses

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. L'espace $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ est appelé k -anse.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. L'espace $\mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ est appelé k -anse.

$$n\text{-variété} + k\text{-anse} \rightarrow n\text{-variété}.$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

$\mathbb{B}^4$
0-anse

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

$\mathbb{B}^4$
0-anse

$\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$
2-anse

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

$$\begin{array}{c} \mathbb{B}^4 \\ \text{0-anse} \\ \partial \downarrow \\ \mathbb{S}^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \\ \text{2-anse} \end{array}$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

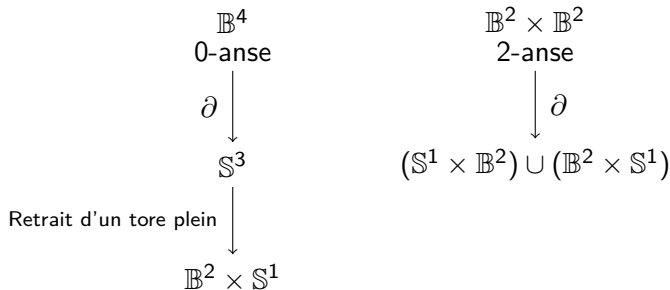
Corps à anses d'un nœud

$$\begin{array}{c} \mathbb{B}^4 \\ \text{0-anse} \\ \partial \downarrow \\ \mathbb{S}^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \\ \text{2-anse} \\ \partial \downarrow \\ (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2) \cup (\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1) \end{array}$$

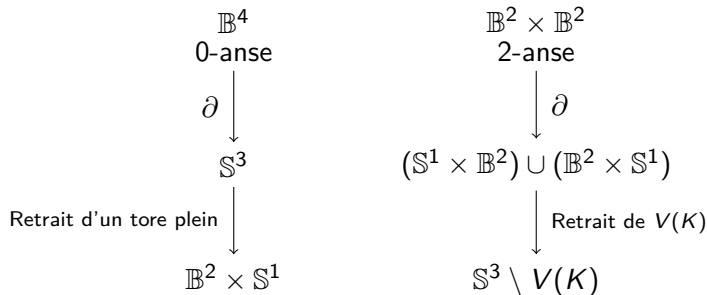
Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anse d'un nœud



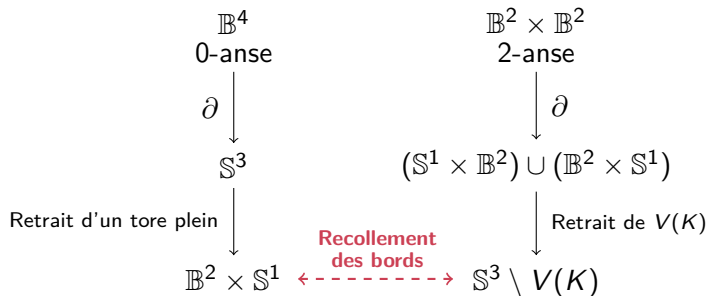
Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud



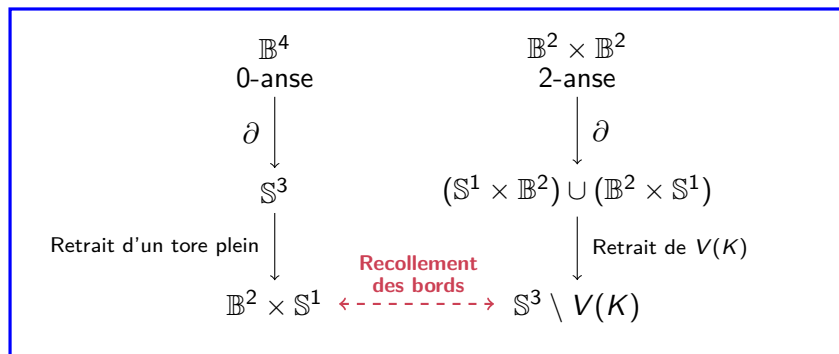
Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud



Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

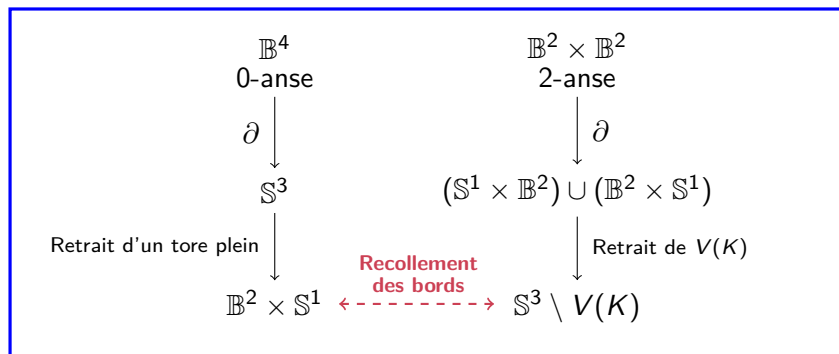
Corps à anses d'un nœud



Corps à anses X_K associé au nœud K

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud



Corps à anses X_K associé au nœud K

Question. Comment cette variété différentielle se plonge dans $\mathbb{R}^4$?

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

Rappel. Un nœud *bordant* est le bord d'un disque lisse dans $\mathbb{R}^4$.

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Corps à anses d'un nœud

Rappel. Un nœud *bordant* est le bord d'un disque lisse dans $\mathbb{R}^4$.

Proposition

Un nœud K est bordant si, et seulement si, son corps à anses X_K se plonge de manière lisse dans $\mathbb{R}^4$.

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

$$X_K$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

$$X_K$$

$$\mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K)$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

$$\begin{array}{ccc} X_K & & \mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K) \\ \partial \downarrow & & \\ \partial X_K & & \end{array}$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

$$X_K$$
$$\partial \downarrow$$
$$\partial X_K$$
$$\mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K)$$
$$\partial \downarrow$$
$$\partial \rho(X_K)$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

$$\begin{array}{ccc} X_K & & \mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \partial X_K & \xleftarrow[\text{Homéomorphes}]{\rho} & \partial \rho(X_K) \end{array}$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.

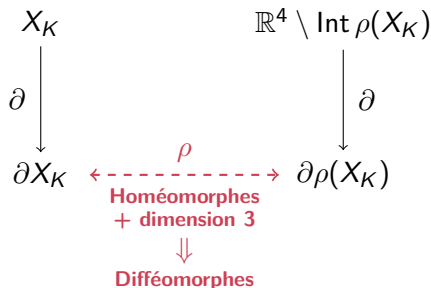
$$\begin{array}{ccc} X_K & & \mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \partial X_K & \xleftarrow[\text{Homéomorphes}]{\rho} & \partial \rho(X_K) \\ & \text{+ dimension 3} & \end{array}$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

On considère un nœud K **non bordant**.

Rappel : $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que $\rho(\partial D) = K$.



Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

Il existe donc un **difféomorphisme** $\varphi : \partial\rho(X_K) \rightarrow \partial X_K$.

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

Il existe donc un **difféomorphisme** $\varphi : \partial\rho(X_K) \rightarrow \partial X_K$.

Théorème (Freedman, Quinn, 1989)

Toute variété topologique de dimension 4 connexe et non compacte admet une structure différentielle.

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

Il existe donc un **difféomorphisme** $\varphi : \partial\rho(X_K) \rightarrow \partial X_K$.

Théorème (Freedman, Quinn, 1989)

Toute variété topologique de dimension 4 connexe et non compacte admet une structure différentielle.

La variété **différentielle** :

$$\mathcal{R} = X_K \sqcup_{\varphi} \left(\mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K) \right)$$

Construction d'un $\mathbb{R}^4$ exotique

Fin de la construction

Il existe donc un **difféomorphisme** $\varphi : \partial\rho(X_K) \rightarrow \partial X_K$.

Théorème (Freedman, Quinn, 1989)

Toute variété topologique de dimension 4 connexe et non compacte admet une structure différentielle.

La variété **différentielle** :

$$\mathcal{R} = X_K \sqcup_{\varphi} \left(\mathbb{R}^4 \setminus \text{Int } \rho(X_K) \right)$$

est **homéomorphe** mais **non différentiable** à $\mathbb{R}^4$.

Merci !

Merci pour votre attention !