

Groupe de lecture : Développement BKW faiblement non linéaire à une phase

Clément Loiseau, Giovanni Lebaron

ENS Rennes
4 décembre 2024

Équation de Schrödinger linéaire :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon.$$

Équation de Schrödinger linéaire :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon.$$

On y ajoute une non-linéarité :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon.$$

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon} \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) e^{i\phi_0(x)/\varepsilon} \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

(G) Hypothèse géométrique :

- $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et $\partial_x^\alpha V \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))$ lorsque $|\alpha| \geq 2$;
- $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ lorsque $|\alpha| \geq 2$.

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon = V u^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) e^{i\phi_0(x)/\varepsilon} \end{cases} \quad (\mathbf{E})$$

(G) Hypothèse géométrique :

- $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et $\partial_x^\alpha V \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^d))$ lorsque $|\alpha| \geq 2$;
- $\phi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \phi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ lorsque $|\alpha| \geq 2$.

(H) Hypothèses supplémentaires (optique géométrique faiblement non-linéaire à une phase) :

- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$;
- $(a_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^{s_0}(\mathbb{R}^d)$ pour un certain $s_0 > d/2$.

Lemme (Schauder)

Soit $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse telle que $G(0) = 0$. Alors la fonction

$$\varphi : u \longmapsto G \circ u$$

envoie $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, lorsque $s > d/2$. De plus, φ est uniformément lipschitzienne sur les parties bornées de $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Lemme (Inégalité de Moser)

Soit $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse telle que $G(0) = 0$. Alors il existe $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$:

$$\|G \circ u\|_{H^s} \leq C(\|u\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^s}.$$

Proposition 1

Sous l'hypothèse **(G)**, il existe $T > 0$ et une unique solution $\phi_{\text{eik}} \in \mathcal{C}^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$ à l'équation éikonale :

$$\begin{cases} \partial_t \phi_{\text{eik}} + \frac{1}{2} |\nabla \phi_{\text{eik}}|^2 + V = 0 \\ \phi_{\text{eik}}(0, x) = \phi_0(x). \end{cases}$$

Cette solution vérifie de plus $\partial_x^\alpha \phi_{\text{eik}} \in L^\infty([-T, T] \times \mathbb{R}^d)$ lorsque $|\alpha| \geq 2$.

On pose $a^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon(t, x)e^{-i\phi_{\text{eik}}(t, x)/\varepsilon}$ de sorte que l'équation :

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2) u^\varepsilon \\ u^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x)e^{i\phi_0(x)/\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{E})$$

soit équivalente à :

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla\phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2}a^\varepsilon\Delta\phi_{\text{eik}} = \frac{1}{2}i\varepsilon\Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\alpha-1}f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon \\ a^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x). \end{cases} \quad (\text{E}')$$

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{\text{eik}} = \frac{1}{2} i \varepsilon \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\alpha-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon \\ a^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) \end{cases} \quad (\mathbf{E}')$$

$$\begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{\text{eik}} = \frac{1}{2} i \varepsilon \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\alpha-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon \\ a^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x) \end{cases} \quad (\mathbf{E}')$$

Proposition 2

On suppose que les hypothèses **(G)** et **(H)** sont vérifiées, et que $\alpha \geq 1$. Alors il existe $T_0 \in (0, T]$, indépendant de ε , tel que l'équation **(E')** possède une unique solution $a^\varepsilon \in \mathcal{C}^0([-T_0, T_0], H^{s_0})$. De plus :

- $(a^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([-T_0, T_0], H^{s_0})$;
- si $(a_0^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([-T_0, T_0], H^s)$ pour un certain $s \geq s_0$, alors (a^ε) également.

Estimation d'erreur et interprétation

On souhaite passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Estimation d'erreur et interprétation

On souhaite passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On suppose pour ce faire qu'il existe $s > d/2 + 2$ tel que :

$$\|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(1)$$

pour un certain $a_0 \in H^s$.

Estimation d'erreur et interprétation

On souhaite passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

On suppose pour ce faire qu'il existe $s > d/2 + 2$ tel que :

$$\|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(1)$$

pour un certain $a_0 \in H^s$.

On considère l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{a}^\varepsilon + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla \tilde{a}^\varepsilon + \frac{1}{2} \tilde{a}^\varepsilon \Delta \phi_{\text{eik}} = -i\varepsilon^{\alpha-1} f(|\tilde{a}^\varepsilon|^2) \tilde{a}^\varepsilon \\ \tilde{a}^\varepsilon(0, x) = a_0^\varepsilon(x). \end{cases} \quad (\mathbf{E}'')$$

dont on admet qu'elle possède une unique solution $\tilde{a}^\varepsilon$ telle que $(\tilde{a}^\varepsilon)$ soit bornée dans $\mathcal{C}^0([-T_0, T_0], H^s)$.

Proposition 3

On suppose que les hypothèses **(G)** et **(H)** sont vérifiées, et que $\alpha \geq 1$. Alors il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\|a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon\|_{L^\infty([-T, T], H^{s-2})} \leq C(\varepsilon + \|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}}).$$

Proposition 3

On suppose que les hypothèses **(G)** et **(H)** sont vérifiées, et que $\alpha \geq 1$. Alors il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\|a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon\|_{L^\infty([-T, T], H^{s-2})} \leq C(\varepsilon + \|a_0^\varepsilon - a_0\|_{H^{s-2}}).$$

À l'ordre 0, on a donc :

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon e^{i\phi_{\text{eik}}/\varepsilon} \right\|_{L^\infty([-T, T], L^2 \cap L^\infty)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

On rappelle les équations classiques :

$$\begin{cases} \partial_t x(t, y) = \xi(t, y) \\ \partial_t \xi(t, y) = -\nabla_x V(t, x(t, y)) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0, y) = y \\ \xi(0, y) = \nabla \phi_0(y). \end{cases}$$

On rappelle les équations classiques :

$$\begin{cases} \partial_t x(t, y) = \xi(t, y) \\ \partial_t \xi(t, y) = -\nabla_x V(t, x(t, y)) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0, y) = y \\ \xi(0, y) = \nabla \phi_0(y). \end{cases}$$

On constate alors :

- $\alpha > 1 \implies \tilde{a}^\varepsilon(t, x) - a(t, x) = O(\varepsilon^{\alpha-1})$;
- $\alpha = 1 \implies$ décalage de phase $G(t, x)$.

Analyse aux ordres supérieurs

On suppose à présent que :

- $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- il existe $s > d/2 + 4$ tel que :

$$\|a_0^\varepsilon - a_0 - \varepsilon a_1\|_{H^{s-4}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(\varepsilon)$$

pour $a_0 \in H^s$ et $a_1 \in H^{s-2}$.

Analyse aux ordres supérieurs

On définit :

$$a^{(0)}(t, x) = \begin{cases} a(t, x)e^{iG(t, x)} & \text{si } \alpha = 1, \\ a(t, x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la *première correction BKW* comme la solution $a^{(1)}$ de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t a^{(1)} + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^{(1)} + \frac{1}{2} a^{(1)} \Delta \phi_{\text{eik}} = \frac{i}{2} \Delta a^{(0)} - iR_\alpha \\ a^{(1)}(0, x) = a_1(x) \end{cases}$$

avec :

$$R_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \geq 3, \\ f \left(|a^{(0)}|^2 \right) a^{(0)} & \text{si } \alpha = 2, \\ f \left(|a^{(0)}|^2 \right) a^{(1)} + 2f' \left(|a^{(0)}|^2 \right) a^{(0)} \operatorname{Re} \left(\bar{a}^{(0)} a^{(1)} \right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

$$a^{(0)}(t, x) = \begin{cases} a(t, x)e^{iG(t, x)} & \text{si } \alpha = 1, \\ a(t, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t a^{(1)} + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^{(1)} + \frac{1}{2} a^{(1)} \Delta \phi_{\text{eik}} = \frac{i}{2} \Delta a^{(0)} - iR_\alpha \\ a^{(1)}(0, x) = a_1(x) \end{cases}$$

$$a^{(0)}(t, x) = \begin{cases} a(t, x)e^{iG(t, x)} & \text{si } \alpha = 1, \\ a(t, x) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t a^{(1)} + \nabla \phi_{\text{eik}} \cdot \nabla a^{(1)} + \frac{1}{2} a^{(1)} \Delta \phi_{\text{eik}} = \frac{i}{2} \Delta a^{(0)} - iR_\alpha \\ a^{(1)}(0, x) = a_1(x) \end{cases}$$

Proposition 4

On suppose les hypothèses **(G)** et **(H)** vérifiées. Alors il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

$$\left\| a^\varepsilon - a^{(0)} - \varepsilon a^{(1)} \right\|_{L^\infty([-T, T], H^{s-4})} \leq C(\varepsilon + \|a_0^\varepsilon - a_0 - \varepsilon a_1\|_{H^{s-4}}).$$

Merci pour votre attention !