Oraux de mathématiques

Lycée Thiers – MP*

Préambule

Ce document regroupe un grand nombre d'exercices posés à l'oral aux élèves de MP** pendant l'année 2022, et de MP* à partir de l'année 2023. Certains d'entre eux n'ont pas pu être traités ou explorés intégralement, et il sera donc indiqué en-dessous de ceux qui proposaient davantage de questions :

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Dans ce cas, certaines questions qui auraient pu suivre seront parfois ajoutées, et il sera indiqué :

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici certaines qui auraient pu être posées.

Vous trouverez également un bon nombre de notes de bas de page, qui précisent certains mots de vocabulaire introduits dans l'énoncé ou proposent une ouverture sur des notions mathématiques proches de ce dont l'exercice traite. Elles seront indiquées au sein du texte par un nombre entre crochets en exposant, comme ici.[1]

Sommaire

Les exercices sont classés selon les thèmes suivants :

- Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens ;
- Algèbre linéaire, polynômes, réduction ;
- Analyse, topologie ;
- Calcul différentiel ;
- Groupes, anneaux, arithmétique ;
- Probabilités.

Ils sont également regroupés par concours :

- CCP,
- Centrale,
- Mines (Télécom, Ponts),
- X,
- ENS (ULSR, SR, L),
- Ulm.

La dernière page de ce document est consacrée aux indications, qui étaient fournies dès le début avec l'énoncé, ou qui sont apparues au cours de l'échange, pour les oraux qui s'y prêtent (notamment pour les trois derniers concours de la liste). Lorsqu'un exercice en propose, vous trouverez en-dessous de son énoncé la mention :

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Les titres des exercices précisent enfin l'année à laquelle ils ont été donnés, sans doute pas pour la première fois. La présence d'un symbole **[C]** au niveau du numéro de l'exercice signifie qu'un corrigé est disponible en fin de document. Vous pouvez contacter l'auteur à l'adresse `giovanni.lebaron[at]ens-rennes.fr`. Enjoy !

[1] Voici un exemple de note de bas de page.

Notations

Cette page regroupe les notations, plus ou moins courantes, les plus utilisées dans ce document. Si certaines non mentionnées ici sont spécifiques à un exercice, une note de bas de page précisera leur définition.

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{K}^\times$	ensemble des inversibles de $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_n[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n
$\mathrm{Aut}(G)$	ensemble des automorphismes du groupe G
π_u	polynôme minimal de u
χ_u	polynôme caractéristique de u
$\ker u$	noyau de u
$\mathrm{Im}\, u$	image de u
$\mathrm{rg}\, u$	rang de u
$\det u$	déterminant de u
$\mathrm{tr}\, u$	trace de u
$\mathrm{Sp}\, u$	spectre de u
$\mathcal{L}(E)$	ensemble des endomorphismes de E
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	ensemble des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$	noyau du morphisme de groupes $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times$
Id	application identité
I_n	matrice identité de taille n
$\mathrm{Mat}_B(f)$	matrice en base B de f
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	matrice diagonale dont les coefficients sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
A^T	transposée de la matrice A
$\lvert\lvert\lvert A \rvert\rvert\rvert$	norme subordonnée (à la norme $\lVert\cdot\rVert$) de A
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire canonique de x et y
$\lVert x \rVert_2$	norme euclidienne canonique de x
$\lVert f \rVert_\infty$	supremum de la fonction $\lvert f \rvert$ sur son ensemble de définition
$\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$	sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles
$\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$	sous-ensemble de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices positives
$\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$	sous-ensemble de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices définies positives
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$	noyau du morphisme de groupes $\det : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \to \{-1, 1\}$
$\partial_k f$	dérivée partielle de la fonction f par rapport à la $k^{\text{ème}}$ variable
Δf	laplacien de la fonction f
$\mathscr{C}^k(E, F)$	ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur E à valeurs dans F
$\mathbb{P}(A)$	probabilité de l'événement A
$\mathbb{E}(X)$	espérance de la variable aléatoire X
$\mathrm{Var}(X)$	variance de la variable aléatoire X
$\mathrm{cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoires X et Y
$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de paramètres n, p
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre λ

Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens

Exercice 1 : CCP 2024

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On suppose que f est de rang n et que f^* est de rang p.

1. Montrer que $f^* \circ f$ est un automorphisme d'un espace vectoriel à préciser.

2. On pose $g = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$. Montrer que g est un endomorphisme auto-adjoint.

3. Montrer que g est la projection orthogonale sur f.

Exercice 2 : Centrale 2022

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi : (x, y) \longmapsto \langle Ax, Ay\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2.a) En déduire qu'il existe $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.

2.b) Étendre le résultat à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Centrale 2022

1. Montrer que si $U \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors U admet une unique racine carrée dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $U, V \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{tr}(UV) \geq 0$.

3. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On considère une fonction dérivable $f : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que $\mathrm{tr} \circ P \circ f$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Exercice 4 : Centrale 2023

Soient E un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$.

1. Établir l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.

2. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

   (i) $\exists c \geq 0, \forall x, y \in E, \langle s(x), s(y)\rangle = c \langle x, y\rangle$;

   (ii) $\forall x, y \in E, \langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle s(x), s(y)\rangle = 0$.

3. Trouver tous les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u\left(V^\perp\right) \subset u(V)^\perp$ pour tout sous-espace vectoriel V de E.

Exercice 5 : Mines 2022

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |b_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}\, B}.$$

Exercice 6 : Mines 2024

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 7 : Mines 2024

Soient S une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On suppose que $f(v) \in S$ et $v - f(v) \in S^\perp$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que S est un espace vectoriel et que f est la projection orthogonale sur S.

Exercice 8 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} < 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$.
Pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $|X| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

1. Comparer $X^T AX$ et $|X|^T A\, |X|$.

2. Montrer que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(Y^T A X\right)^2 \leq \left(Y^T A Y\right)\left(X^T A X\right).$$

3.a) Montrer que si $X \in \ker(A) \setminus \{0\}$, alors aucun coefficient de X n'est nul.

3.b) Montrer que $\dim \ker(A) \leq 1$.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 9 : Mines 2024

Soit $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{com}(A) \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 10 : X 2022

On pose $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, et on considère un sous-groupe H de G tel que[2] :

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ ghg^{-1} \in H.$$

Montrer que $H = \{\mathrm{Id}\}$ ou $H = G$.[3]

$\triangleright$ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 11 : Ulm 2022 [C]

Montrer que $M \longmapsto \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^M\right)$ est convexe sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

[2]Un tel sous-groupe H est appelé *distingué* ou *normal*, et on note alors $H \triangleleft G$. On montre que H est distingué si et seulement si l'ensemble des *classes à gauche* modulo H coïncide avec celui des *classes à droite*, c'est-à-dire $\{gH \mid g \in G\} = \{Hg \mid g \in G\}$. Ces sous-groupes permettent de construire les *groupes quotients*, dont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un exemple célèbre : on définit $G/H = G/\mathcal{R}$, où la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie par $x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H$, et cet ensemble peut être muni d'une structure de groupe héritée de celle de G, si $H \triangleleft G$. Par exemple, dans le cas du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la relation $\mathcal{R}$ n'est autre que la cmoduence modulo n.

[3]Un tel groupe G est appelé *simple*. Pour $n \geq 3$, on peut montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est simple si et seulement si n est impair.

Algèbre linéaire, polynômes, réduction

Exercice 12 : CCP 2023

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & a \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A.
3. Calculer le polynôme minimal et les valeurs propres de A. En déduire son polynôme caractéristique.

Exercice 13 : CCP 2023

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\exp(A)$.
4. Montrer que A est semblable à[4] :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Trouver une autre méthode pour calculer A^n.

Exercice 14 : CCP 2023

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a & a \\ b & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a \\ b & \cdots & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si $a = b$, A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que le polynôme :

$$P = \begin{pmatrix} X+\lambda & X-a & \cdots & X-a & X-a \\ X-b & X+\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X+\lambda & X-a \\ X-b & \cdots & X-b & X-b & X+\lambda \end{pmatrix}$$

est de degré au plus 1.

3. En déduire le polynôme caractéristique de A, et discuter le caractère diagonalisable de A.

[4]La matrice B est appelée la *réduite de Jordan* de A. Le lecteur intéressé pourra se renseigner au sujet de la décomposition de Frobenius, dont la décomposition de Jordan est un cas particulier, pour les matrices dont le polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 15 : CCP 2023

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T A$.

1. Montrer que pour tout réel $\mu \neq 0$:

$$\ker\left(A^2 - \mu^2 I_n\right) = \ker(A - \mu I_n) \overset{\perp}{\oplus} \ker(A + \mu I_n).$$

2. Trouver toutes les matrices réelles A vérifiant $A^2 = A^T A$.

Exercice 16 : CCP 2023

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ vérifiant $f \neq 0$ et $f^3 = -f$. On pose $F = \ker(f)$ et $G = \ker\left(f^2 + \mathrm{Id}\right)$.

1. Montrer que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$.

2. Soit $v \in G \setminus \{0\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et que $(v, f(v))$ est une base de G.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 : CCP 2023

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A nilpotente. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. En déduire que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On suppose à présent que $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

En établissant que $(m_1, \ldots, m_p)$ est solution d'un système linéaire $p \times p$, montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$.

3. Par un raisonnement similaire, montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 18 : CCP 2024

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On considère $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g - g \circ f = f$. L'objectif est de montrer que f est nilpotente de trois manières différentes.

1.a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$.

1.b) Conclure en étudiant l'application :

$$\begin{aligned} u \,:\, \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ h &\longmapsto h \circ g - g \circ h. \end{aligned}$$

2.a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) \circ g - g \circ P(f) = f \circ P(f)$.

2.b) Conclure.

3.a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{tr}(f^k) = 0$.

3.b) Montrer que f ne possède qu'une seule valeur propre.

3.c) Conclure.

Exercice 19 : Centrale 2022

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi_A : M \longmapsto AM$ et $\psi_A : M \longmapsto MA$.

1. Montrer que ϕ_A et ψ_A sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $P(\phi_A)$ et $P(\psi_A)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Quel est le polynôme minimal de ϕ_A et ψ_A ?

3. On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables. Montrer que ϕ_A, ψ_B et $\phi_A - \psi_B$ sont diagonalisables. Montrer qu'on peut les diagonaliser dans une même base constituée de matrices de rang 1.

Exercice 20 : Centrale 2022

On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique.[5]

1. On écrit $H_n = s_n/t_n$ sous forme irréductible. Écrire une fonction `decomposition(n)` qui renvoie (s_n, t_n).

2. Calculer avec Python le reste de la division euclidienne de s_{p-1} par p^2 pour les nombres premiers $p \leq 100$, et émettre une conjecture. On pourra utiliser `sympy.ntheory.generate.nextprime(n)` qui renvoie le plus petit nombre premier supérieur ou égal à n.

3. On considère un nombre premier $p \geq 5$ ainsi que le polynôme :

$$Q = \prod_{k=1}^{p-1}(X+k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Montrer que les a_k sont entiers. Donner a_0 et a_{p-1}.

4. Montrer que $a_1 = (p-1)!H_{p-1}$.

5. Montrer que $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.[6]

6. Soient $V = \left(i^j\right)_{1 \leq i,j \leq p-2}$ et $a = (a_1, \ldots, a_{p-2})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{R}^{p-2}$ tel que $Va = pB$.

7. En déduire que $a_1, \ldots, a_{p-2}$ sont tous multiples de p.

Exercice 21 : Centrale 2022

On note $N_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes nilpotentes. Pour $M \in N_n(\mathbb{C})$, on désigne par $d(M)$ l'indice de nilpotence de M. On note enfin $\mathbb{C}[M]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en M.

1. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathbb{C}[N]$ est un espace vectoriel de dimension $d(N)$.

2. Soit $N \in N_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N + I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, puis que $N^2 + 2N \in N_n(\mathbb{C})$ avec $d\left(N^2 + 2N\right) = d(N)$.

3. Montrer que $\phi : N \longmapsto N^2 + 2N$ réalise une injection de $N_n(\mathbb{C})$ dans lui-même.

Exercice 22 : Centrale 2022

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \longmapsto \mathrm{tr}(AM)$ et $\tau_A : M \longmapsto MA - AM$.

1. On suppose que A est nilpotente. Montrer que $\ker(\tau_A) \subset \ker(\varphi_A)$.

2. On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = BA - AB$. Calculer $BP(A) - P(A)B$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$. En déduire que A est nilpotente.

3. Caractériser les hyperplans H tels que $\mathrm{Im}(\tau_A) \subset H$. En déduire l'existence de B telle que $B = BA - AB$.

4. Montrer que $A \exp(I_n + B) = \exp(B)A$.

Exercice 23 : Centrale 2023

On considère $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on définit la matrice[7] :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in M_{n^2}(\mathbb{K})$$

[5] On peut montrer que $H_n \notin \mathbb{N}$ dès que $n \geq 2$, ce qui peut paraître surprenant au vu de sa vitesse de croissance extrêmement faible (logarithmique en l'occurrence), à tel point que le plus petit entier n tel que $H_n \geq 20$ vaut exactement 272 400 600.

[6] C'est le théorème de Wilson, qui est un cas particulier du résultat plus général suivant : si G est un groupe abélien fini, le produit des éléments de G est égal à son neutre, sauf s'il existe un unique $x \in G$ d'ordre 2, auquel cas ce produit est égal à x.

[7] La matrice $A \otimes B$ (lire « A tenseur B ») est appelée *produit de Kronecker* de A et B. On peut montrer que dans une base bien choisie du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^n$, c'est la matrice du produit tensoriel des applications linéaires associées à A et B.

On pose également $\phi_{A,B} : M \longmapsto AMB^T$ et on note $\mathscr{C}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, on étudie le cas $n = 2$.

1.a) Écrire une fonction `K(A, B)` qui prend $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en argument et renvoie $A \otimes B$.

1.b) Écrire une fonction `Mat(A, B)` qui prend $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en argument et renvoie $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(\phi_{A,B})$.

1.c) Tester ces fonctions avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparer les spectres de A et B et de $A \otimes B$. Que peut-on conjecturer ?

2. On se replace dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on admet par la suite que $A \otimes B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_n}(\phi_{A,B})$.

2.a) Montrer que $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$.

2.b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \otimes B$ soit inversible, et calculer $(A \otimes B)^{-1}$.

2.c) On note $\sim$ la relation de similitude. Montrer que si $A_1 \sim A_2$ et $B_1 \sim B_2$, alors $A_1 \otimes B_1 \sim A_2 \otimes B_2$.

3. Montrer successivement :

(i) $\det(A \otimes B) = (\det AB)^n$;

(ii) $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$;

(iii) $\mathrm{rg}(A \otimes B) = \mathrm{rg}(A)\,\mathrm{rg}(B)$;

(iv) $A \otimes B \sim B \otimes A$.

Exercice 24 : Centrale 2023

On note $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Pour $f \in \mathbb{C}$ et $t = (t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$M_f(t) = \begin{pmatrix} t_0 & ft_{n-1} & \cdots & \cdots & ft_1 \\ t_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & ft_n \\ t_{n-1} & \cdots & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

On note V l'application qui, à une famille de complexes, associe son déterminant de Vandermonde.
On définit enfin $A_f = M_f(0, 1, 0, \ldots, 0)$ ainsi que :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} V\left(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right).$$

1. Écrire des fonctions `F(n)` et `M(f, t)` qui renvoient respectivement F_n et $M_f(t)$.
2. On pose $P_t = t_{n-1}X^{n-1} + \cdots + t_1X + t_0$. À l'aide de Python, conjecturer un lien entre $P_t(A_1)$ et $M_1(t)$.
3. Montrer que $P_t(A_1) = M_1(t)$. Montrer que F_n est inversible et que $F_n^{-1} = \overline{F_n}$.
4. Soit $D = \mathrm{diag}\left(1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\right)$. Trouver un lien entre D et $F_nA_1\overline{F_n}$.

Exercice 25 : Centrale 2023

On considère un entier $n \geq 1$, qu'on écrit $n = e_p \cdots e_1e_0$ en binaire, et on pose :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{p} e_k \quad ; \quad v(n) = \min\left\{k \in \{0, \ldots, p\} \mid e_k \neq 0\right\}.$$

1. Écrire des fonctions `s(n)` et `v(n)` qui renvoient respectivement $s(n)$ et $v(n)$.
2. Montrer que $v(mn) = v(m) + v(n)$.

3. Tester avec Python (pour $n \leq 10000$) la relation $v(n) = s(n-1) - s(n) + 1$, puis la démontrer.
4. Calculer $v(k!)$ pour $k \geq 1$.
5. Montrer que n est une puissance de 2 si, et seulement si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\binom{n}{k}$ est pair.

Exercice 26 : Centrale 2023

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients dans $\{0, 1, 2\}$.

1.a) Écrire une fonction Python qui renvoie la liste des éléments de $\mathcal{P}$ de degré inférieur ou égal à d.

1.b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A_n = \{P \in \mathcal{P} \mid P(2) = n\}$ est fini.

2. On note $a_n = \operatorname{card}(A_n)$. Montrer que $a_{2n+1} = a_{2n}$ et $a_{2n+2} = a_{n+1} + a_n$.

3. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon 1.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 27 : Mines 2022

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} u(P) \,:\, \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \mathrm{e}^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n. \end{aligned}$$

1. Montrer que u est à valeurs dans $\mathbb{C}[X]$.[8]
2. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
3. Étudier les éléments propres de u.

Exercice 28 : Mines 2022

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour $x \in E$:

$$N(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\left| \sum_{k=1}^{n} x_k t^{k-1} \right|}{\sum_{k=1}^{n} t^{2k-2}}$$

Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_2$.

Exercice 29 : Mines 2022

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f : x \longmapsto \det(A + xB)$ est polynomiale et donner son degré.

Exercice 30 : Mines 2022

1. Soient $n \geq 2$ et $p < n$. On considère $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$.

1.a) Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto Y$ induit un isomorphisme de $\ker(M)$ vers $\ker(D - CA^{-1}B)$.

1.b) Montrer que $\operatorname{rg} M = p$ si, et seulement si, $D = CA^{-1}B$.

2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $p = \max_{M \in V}(\operatorname{rg} M)$. On souhaite majorer $\dim V$.

2.a) Montrer que l'on peut supposer $J_p \in V$, condition que l'on supposera vérifiée pour la suite.

[8]On identifie ici les fonctions polynomiales $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et les polynômes complexes, ce qui ne pose en réalité aucun problème puisque $\mathbb{C}$ est un corps infini. Cela devient impossible lorsque le corps de référence est fini. Par exemple, $X^2 + X \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ n'est clairement pas le polynôme nul, mais sa fonction associée est bien nulle...

2.b) On pose $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & D \end{pmatrix} \;\middle|\; (B,D) \in M_{n-p,p}(\mathbb{R}) \times M_{n-p,n-p}(\mathbb{R}) \right\}$. Étudier $V \cap W$.

2.c) Conclure.

Exercice 31 : Mines 2022

Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - M = I_n$. Montrer que M vérifie nécessairement $\det(M) > 0$.

Exercice 32 : Mines 2022

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines distinctes $a_1, \ldots, a_n$. Calculer, sous réserve d'existence :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)}$$

Exercice 33 : Mines 2022

On pose $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$. On note $A = \{i \in \{0, \ldots, n\} \mid a_i \neq 0\}$ et $\mu(P) = \mathrm{card}(A)$.

On suppose que $(X-1)^k$ divise P pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et on veut montrer que $\mu(P) \geq k+1$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\mu(P) \leq k$.

1. On pose $P_0 = 1$ et $P_{s+1} = X(X-1)\cdots(X-s)$ pour $s \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $s \in \{0, \ldots, k-1\}$:

$$P^{(s)}(1) = \sum_{i \in A} a_i P_s(i).$$

2. En déduire que $a_i = 0$ pour tout $i \in A$. Conclure.

3. Discuter de l'optimalité de la minoration obtenue.

Exercice 34 : Mines 2022

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \ker(u - \mathrm{Id}) = \{0\}$.

3. On suppose E de dimension finie. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - \mathrm{Id})$.

4. On suppose à présent que $E = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - \mathrm{Id})$, mais on ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que (v_n) converge simplement et que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est un fermé de E.

5. Étudier la réciproque.

Exercice 35 : Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $a_1, \ldots, a_q$ les racines de P et $n_1, \ldots, n_q$ leurs multiplicités respectives.

1. Montrer que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{q} \frac{n_k}{X - a_k}.$$

2. Soit a une racine de P'. Montrer qu'il existe $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}$ tels que[9] :

$$\sum_{k=1}^{q} t_k = 1 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{q} t_k a_k = a.$$

[9] Il apparaît en fait dans la preuve que les t_i sont positifs. On peut donc dire que les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P : c'est le théorème de Gauss-Lucas, évoqué par Gauss en 1836 et démontré par Félix Lucas en 1879.

Exercice 36 : Mines 2023

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $\exp(N) - I_n$ est nilpotente.

Exercice 37 : Mines 2023

Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. On considère $b \in \mathbb{C}$ vérifiant $|b| < 1$, et $f : P \longmapsto P(b)$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Montrer que f est continue pour $\|\cdot\|$.

3. Déterminer $|||f|||$ sous réserve d'existence.

Exercice 38 : Mines 2023

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \cdots & a & a \\ b & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c & a \\ b & \cdots & b & b & c \end{pmatrix}$$

Déterminer $\det(A)$ à l'aide du polynôme $P = \det(A + XJ)$, où J est la matrice ne contenant que des 1.

Exercice 39 : Mines 2023

On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1/n \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & 1 & 0 & 1/n \\ & & & 1 & 1/n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, χ_C est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

2. Montrer que C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 40 : Mines 2023

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \geq 1$ tel que $M^{p+2} = M^2$ et que $\operatorname{tr}(M) = n$. Déterminer M.

Exercice 41 : Mines 2023

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, on note $T(x) = \operatorname{pgcd}(x_1, \ldots, x_n)$.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\det(A) \in \{-1, 1\}$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z}^n$, $T(Ax) = T(x)$.

Exercice 42 : Mines 2023

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel non nul de dimension finie. On considère $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

1. Montrer que $\ker u$ est stable par v, et non nul. En déduire que u et v ont un vecteur propre en commun.

2. On suppose désormais que $u \circ v - v \circ u \in \operatorname{vect}(u, v)$. Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 43 : Mines 2023

Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 44 : Mines 2023

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *simple* lorsque les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u sont $\{0\}$ et E, et on dit que u est *cyclique* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$. On appelle *commutant* de u l'ensemble $\mathscr{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

1. Montrer que si u est simple, alors u est cyclique. Étudier la réciproque.

2. Montrer que si u est simple, alors $\mathscr{C}(u) = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

3. Montrer que u est simple si, et seulement si, χ_u est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Il restait des questions mais l'élève n'a pas eu le temps de poursuivre.

Exercice 45 : Mines 2023

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire.

1. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{A'(k)} \frac{A}{X-k}.$$

2. En déduire qu'il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$|P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$

Exercice 46 : Mines 2024

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice par blocs :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ 2A & 3A \end{pmatrix}.$$

Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Exercice 47 : Mines 2024

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une *transvection* lorsque :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = I_n + \lambda E_{i,j}$$

pour une certaine base B de E, un certain $\lambda \in \mathbb{K}$, et $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distincts.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) u est une transvection ;

(ii) $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = 1$ et $(u - \mathrm{Id})^2 = 0$.

Exercice 48 : Mines 2024

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver une relation entre χ_A, χ_{A^2} et χ_{-A}.

Exercice 49 : Mines 2024

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ainsi que :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors il en est de même pour :

$$C = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}.$$

Exercice 50 : Mines 2024

Soit $n \geq 1$. On considère le produit scalaire suivant sur $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On se donne $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et pour $P \in E$, on pose :

$$u(P) = x \longmapsto \int_0^{\infty} \Pi(x+t)P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est auto-adjoint et bijectif.

2. On considère une base orthonormée $(P_0, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, chaque P_i étant associé à la valeur propre λ_i. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Pi(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y).$$

Exercice 51 : Mines 2024

Soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Quel est le rang de $(P_i(a_j))_{1 \leq i,j \leq n}$?

Exercice 52 : Mines 2024

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

1. Montrer que $C(A)$ est d'intérieur vide.

2. Montrer que $C(A)$ est connexe par arcs.

3. Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C(A)$ soit borné.

4. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $C(A)$ est fermé.

Exercice 53 : Mines 2024

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables sur $\mathbb{K}$ est-il :

- un espace vectoriel ?
- convexe ? connexe par arcs ?
- ouvert ? fermé ?
- dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 54 : Mines 2024

Soient $\alpha > 0$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer qu'il existe une base B de $\mathbb{C}^n$ telle que, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$i \neq j \implies \left|(\mathrm{Mat}_B(u))_{i,j}\right| \leq \alpha.$$

Exercice 55 : Mines 2024

1. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|$?

2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \left\|P^{-1}AP\right\| = \|A\|$?

3. Même question que la première avec une semi-norme.[10]

Exercice 56 : Mines 2024

On considère $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. On définit la suite[11] :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n + \alpha(b - Ax_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0 et α pour que (x_n) converge.
2. On pose $e_n = A^{-1}b - x_n$. Trouver la constante optimale $C > 0$ telle que $\|e_{n+1}\| \leq C\,\|e_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 57 : Mines 2024

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose :

$$G = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ f = f \circ u,\ u^2 \circ f = f,\ \exists p \in \mathbb{N},\ f^{p+1} \circ u = f^p\}.$$

1. Soient $u \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $u^{k+1} \circ f^k = u$.
2. Soient $u, v \in G$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer $u^k \circ f^{k+1} \circ v$ et $v \circ f^{k+1} \circ u^k$.
3. En déduire que G possède au plus un élément.

Exercice 58 : Mines 2024

On note $I = [1, +\infty[$ et on considère les ensembles :

- $E = \{f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R}) \mid f$ a une limite en $+\infty\}$,
- $F = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall t \in I,\ f(t) = P(t)t^{-n}\}$.

1. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé, et que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est dense dans E.

Exercice 59 : X 2022

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) B est nilpotente et $BA = 0$;

(ii) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM} = \chi_{AM+B}$.

Exercice 60 : X 2022

Soit p un nombre premier.

1. Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que si $\overline{f}$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors f est irréductible sur $\mathbb{Z}$.[12]
2. Soient $h \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. On note :
   - $A_h = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n \mid \forall i \in \{0, \dots, n-1\},\ 0 \leq a_i < h\}$
   - $A_p(h) = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A_h \mid a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0X$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$
   - P_n l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré n de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

Montrer que :

$$\frac{\mathrm{card}(A_p(h))}{\mathrm{card}(P_n)} = \frac{h^n}{p^n} + \mathcal{O}\left(\frac{h^{n-1}}{p^{n-1}}\right).$$

Exercice 61 : X 2022

[10] Une *semi-norme* est une application à valeurs positives, homogène et vérifiant l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire les mêmes hypothèses qu'une norme sans la séparation. Autrement dit, on peut avoir $\|x\| = 0$ avec $x \neq 0$.

[11] Cette méthode itérative est connue sous le nom de *méthode de Richardson à pas fixe*.

[12] On note $\overline{f}$ le polynôme obtenu à partir de f en réduisant ses coefficients modulo p.

On considère les polynômes :

$$f = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_i) = \sum_{k=0}^{n} b_k X k \quad ; \quad g = \prod_{1\leq i<j\leq n}(X - (\alpha_i + \alpha_j))$$

et on suppose que les b_k sont tous réels. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $b_k > 0$;

(ii) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Re}(\alpha_i) < 0$.

Exercice 62 : X 2022

Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Exercice 63 : X 2023

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On considère $a, b \in \mathcal{L}(E)$ et on pose $[a, b] = ab - ba$.[13]
On suppose que $[a, b] = f \circ v$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, E)$ et $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ vérifient $v \circ f = 0$.

1. Calculer $\det([a, b])$.
2. Montrer que a et b sont trigonalisables dans une même base.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 64 : X 2023

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$|||A||| = \sup_{\substack{\|X\|\leq 1\\ \|Y\|\leq 1}} |\langle AX, Y\rangle| \,.$$
3. On considère la matrice suivante :
$$M = \left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Majorer $|||M|||$ par une constante indépendante de n.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 65 : ENS 2022

Soient $A \subset \mathbb{R}^d$ bornée et $x \in \mathrm{conv}(A)$.[14] Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que :

$$\left\| x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq \frac{\mathrm{diam}(A)}{\sqrt{n}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\| \,.$$

Exercice 66 : ENS 2022

Montrer que, dans tout triangle, on peut inscrire une ellipse tangente au milieu de chaque côté du triangle.

Exercice 67 : ENS 2023 [C]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $N \geq 1$, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(N-1)(P')^2 \geq NPP''$. Cas d'égalité ?

[13]Le vecteur $[a, b]$ est le *commutateur* de a et b. C'est un objet également étudié en théorie des groupes : le *groupe dérivé* d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par ses commutateurs, souvent noté $[G, G]$. Il est lié à la notion de *groupe résoluble*.

[14]On désigne par $\mathrm{conv}(A)$ l'*enveloppe convexe* de A, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à poids positifs d'éléments de A. C'est également la plus petite partie convexe de $\mathbb{R}^d$ contenant A, ou encore l'intersection des parties convexes de $\mathbb{R}^d$ contenant A.

Exercice 68 : ENS 2023

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $M^n = I_2$.

1. Que peut-on dire ?

2. En déduire que l'ordre de M divise 12.

Exercice 69 : ENS 2023

Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un groupe, engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 70 : ENS 2023

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\varphi_A : M \longmapsto AM$.

1. Montrer que $|||\varphi_A||| \leq |||A|||_2$.

2. Donner une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par transposition.

3. On définit la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; (M_1, M_2) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{R}),\, p+q=n \right\}.$$

On admet que $B = \{\varphi_A \mid A \in \mathcal{S}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Décrire l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les éléments de B.

Analyse, topologie

Exercice 71 : CCP 2023

On note $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Existence et valeur de I ?

2. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Trouver des réels α et β tels que :

$$\frac{1}{(1+t^2)(\alpha^2+t^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2} + \frac{\beta}{a^2+t^2}.$$

3. Calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)(a^2+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

4. Rappeler le théorème de convergence dominée. L'utiliser pour calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 72 : CCP 2023

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = 0$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. À l'aide de la continuité uniforme de f, montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 73 : CCP 2023

On note $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Existence de I ?

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{t\,|\sin t|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $J(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{(u+k\pi)\sin u}{(u+k\pi)^2+1}\,\mathrm{d}u$.

3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Exercice 74 : CCP 2023

On pose $u_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que u est monotone. Déterminer son sens de variation en fonction de x_0.

2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

3. Trouver toutes les fonctions continues $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

Exercice 75 : CCP 2024

Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+\lambda^n x^2}.$$

1. Convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ en fonction de λ ?

2. Même question pour la convergence uniforme.

3. On définit à présent :

$$g_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+2^n x^2\right) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x).$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité de G ?

Exercice 76 : CCP 2024

Soit $a \in]0,1[$.

1. Montrer que l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

2. Montrer que $I(a) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 77 : Centrale 2022

Soient B un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $u(B) \subset B$.

On pose $u_0 = \mathrm{Id}$, et $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k$ pour $n \geq 1$.

1. Quels sont les compacts convexes de $\mathbb{R}$?

2. On pose $A = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} u_n(B)$. Montrer que $x \in A$ si, et seulement si, $u(x) = x$ et $x \in B$.

3. Montrer que $A \neq \varnothing$.

Exercice 78 : Centrale 2022

On note u_n le nombre de chiffres « 1 » dans l'écriture en base 2 de n. On pose également :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k(k+1)}.$$

1.a) Donner u_{13}, u_{31} et u_{32}. À l'aide de Python, donner une expression de u_n.

1.b) Tracer les 100 premières valeurs de S_n. Que peut-on conjecturer ?

2.a) Montrer que $u_n \leq 1 + \log_2(n)$.

2.b) Montrer que la série (S_n) converge. Calculer sa somme S. On pourra d'abord montrer que :

$$S = \frac{S}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

3.a) Quelle est la nature de la série $\sum u_k$?

3.b) On pose, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$v_p = \sum_{k=0}^{2^p - 1} u_k.$$

Exprimer v_{p+1} en fonction de v_p. En déduire une expression explicite de v_p.

3.c) Montrer qu'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $n \geq 1$:

$$A \log_2(n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k \leq B \log_2(n).$$

3.d) Montrer que, lorsque $n \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \frac{n \log_2(n)}{2}.$$

Exercice 79 : Centrale 2022

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose[15] :

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

1.a) Écrire une fonction `S(n, x)` qui renvoie la valeur de $S_n(x)$.

1.b) Pour $n \in \{10, 20, 100\}$, tracer $x \longmapsto S_n(x)$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

1.c) Écrire une fonction `premier_max(n)` qui renvoie l'abscisse du premier maximum local de $x \longmapsto S_n(x)$.

2.a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin((2n+2)t)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t.$$

2.b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{t^2+1} \, \mathrm{d}t.$$

2.c) En déduire que[16] :

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici certaines qui auraient pu être posées.

3.a) Calculer les points critiques de S_n sur $[0, \pi]$.

3.b) On note m_n le plus petit d'entre eux. Montrer que S_n admet un maximum local en m_n.

3.c) Montrer que :

$$m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t > 1.$$

3.d) Conclure.

Exercice 80 : Centrale 2023

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose que (b_n) décroît et tend vers 0.

1. Montrer qu'une série (réelle ou complexe) absolument convergente est convergente.[17]

2.a) On note $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et on suppose que (S_n) est bornée. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k) + S_n b_n.$$

2.b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.

3.a) On pose $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$. Montrer que si $\sum b_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $b_n = o(1/n)$.

3.b) Montrer la réciproque.

Exercice 81 : Centrale 2023

On fixe $a > 0$ et on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx) \exp\left(-n^a\right).$$

1.a) Rappeler le théorème de dérivation des séries de fonctions.

[15]La limite simple de (S_n) est la série de Fourier d'un signal carré d'amplitude 1 et de période 2π.

[16]La formule $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + \ldots$ est due à Madhava, mathématicien indien (1350–1425). La convergence de cette série alternée est cependant trop lente, et il est plus judicieux de calculer $\arctan(1/\sqrt{3})$ à l'aide de son développement en série entière. Cette méthode a d'ailleurs permis à Madhava de donner l'approximation $\pi \approx 3.14159265359$, avec 11 décimales correctes !

[17]Dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension quelconque, cette propriété caractérise la *complétude*, c'est-à-dire la convergence de toute suite de Cauchy. Lorsqu'un espace vectoriel normé est complet pour sa norme, on dit que c'est un *espace de Banach*.

1.b) Donner le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. On suppose $a > 1$. Montrer que $\tau_x : t \longmapsto f(x+t)$ est développable en série entière au voisinage de 0.[18]

3. Qu'en est-il lorsque $a \leq 1$?

Exercice 82 : Centrale 2023

On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On définit sur Python une permutation par la donnée de la liste $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$. On appelle *dérangement* une permutation sans points fixes.

1.a) Écrire une fonction `est_derangement(t)` qui renvoie `True` si la permutation `t` est un dérangement.

1.b) Écrire une fonction `permut(n)` qui renvoie la liste des éléments de S_n. On pourra procéder récursivement. *Remarque : l'ordre des permutations n'est pas imposé. L'entrée `permut(3)` pourra renvoyer :*

```
[[1;2;3];[3;1;2];[2;3;1];[2;1;3];[1;3;2];[3;2;1]]
```

1.c) Écrire une fonction `nb_derangements(n)` qui renvoie le nombre de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$.

1.d) On note d_n ce nombre, avec par convention $d_0 = 1$. Montrer que :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

2. On pose à présent $D(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n$ et on note R le rayon de convergence de D.

2.a) Montrer que $R \geq 1$. Calculer $D(t)\exp(t)$ pour $t \in \,]-1, 1[$.

2.b) En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2.c) On note p_n la probabilité de tirer au sort un dérangement de S_n. Déterminer la limite de (p_n).

3. On note $S_p(n)$ le nombre de surjections de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, p\}$. On considère $x, y \in \mathbb{C}$ et on pose :

$$S(x,y) = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} S_p(n) \frac{x^n}{n!} \frac{y^p}{p!}.$$

3.a) Montrer que $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_k(p)$.

3.b) Montrer que la famille définissant $S(x,y)$ est sommable, et que $\exp(y)S(x,y) = \exp(x\exp(y))$.

3.c) En déduire que $S_p(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$. Que peut-on dire lorsque $p = n$?

Exercice 83 : Centrale 2023

Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie A de E est *connexe* s'il n'existe aucun couple de fermés disjoints non vides (F, G) tel que $A = F \cup G$.[19]

1. Montrer qu'on peut remplacer « fermés » par « ouverts » dans la définition ci-dessus.

2. Montrer que A est connexe si, et seulement si, toute application continue de A dans $\mathbb{N}$ est constante.

---

[18] Une fonction développable en série entière au voisinage de tout point est appelée *analytique*, et c'est une propriété beaucoup plus forte que la dérivabilité à tout ordre. Le lecteur pourra étudier la fonction $x \longmapsto \exp(-1/x^2)$ prolongée par 0 en $x = 0$.

[19] Cette définition se généralise aux espaces topologiques, et caractérise le fait qu'une partie soit « en un morceau ». Un *espace topologique* est un couple (E, T) où E est un ensemble et T est une *topologie*, c'est-à-dire un ensemble de parties de E stable par réunion quelconque, intersection finie, et contenant $\varnothing$ et E. Les éléments de T sont appelés les *ouverts* de E (tiens, tiens). Dans le cas usuel où E est un espace vectoriel normé, ou simplement un espace métrique, sa topologie est définie par ses boules ouvertes. Le lecteur intéressé pourra se renseigner au sujet des axiomes de séparation, qui sont des « classes de régularité » pour ces espaces.

3. Montrer que si A est connexe par arcs, alors A est connexe.[20]

4. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{R}$?

5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de u. Montrer que $V(u)$ est un intervalle.

6. Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Montrer que $V(u)$ est connexe.

Exercice 84 : Centrale 2023

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$.

1. En utilisant la méthode des rectangles, montrer que $H_n = \ln(n) + \mathcal{O}(1)$. En déduire les rayons de f et g.

2. Donner une expression de g et en déduire un équivalent de f en 1^-.

3. En calculant $(1-x)f(x)$, montrer que f admet une limite finie en -1 et la calculer.

Exercice 85 : Centrale 2023

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les intégrales suivantes convergent :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

2.a) Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\Gamma(x) > 0$.

2.b) Montrer que Γ est l'unique fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant[21] :

- $f(1) = 1$,
- $f(x+1) = xf(x)$,
- $\ln \circ f$ est convexe.

Exercice 86 : Centrale 2024

Soit $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$.

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_A = \max(|P(a_0)|, \ldots, |P(a_n)|)$. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. On pose :

$$d_n = \min_{P \in \mathbb{R}[X]} \|X^n - P\|_A\,.$$

2.a) Dans cette question, on prend $A = (0, 1, \ldots, n)$. Écrire une fonction Python qui prend $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ en argument, où $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et renvoie $\|X^n - P\|_A$.

2.b) Calculer d_1 et d_2. On pourra utiliser la fonction `scipy.optimize.fmin`.

3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe un unique $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$X^n - P = \sum_{k=0}^{n} b_k \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (X - a_j) \right)$$

et exprimer les b_k en fonction des données de l'énoncé.

4. Montrer que $b_0 + \ldots + b_n = 1$.

[20] La réciproque est fausse en général. Notons G le graphe de la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ restreinte à $]0, 1]$. On peut montrer, mais c'est loin d'être facile, que son adhérence $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs. La réciproque est tout de même vraie pour les ouverts des espaces topologiques localement connexes par arcs, comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ par exemple.

[21] C'est le théorème de Bohr-Mollerup, démontré en 1922.

5. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} |a_j - a_k| \geq k!(n-k)!.$$

6. En déduire que $\|X^n - P\|_A \geq 2^{-n} n!$ puis calculer d_n.

Exercice 87 : Centrale 2024

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_0, \dots, x_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = f(x_i)$. On le note $L_n(f)$.

2. On considère les fonctions $f : x \longmapsto \left(x^2+1\right)^{-1}$ et $g : x \longmapsto \left(x^2+0.2\right)^{-1}$ et on pose, pour $i \in \{0, \dots, n\}$:

$$a_i = \frac{2i}{n} - 1 \quad ; \quad b_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right).$$

Représenter f et $L_n(f)$ à l'aide de Python, pour les familles (a_i) et (b_i) et pour $n \in \{5, 10, 20, 50\}$. On pourra utiliser la fonction `scipy.interpolate.barycentric_interpolate`. Faire de même avec g.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, un entier $p \geq 1$, des réels $c_0, \dots, c_p \in [a, b]$ deux à deux distincts, et une fonction g dérivable p fois sur $[a, b]$, telle que $\forall i \in \{0, \dots, p\}$, $g(c_i) = 0$. Montrer que $g^{(p)}$ s'annule sur $]a, b[$.

4. Soient $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ une famille de réels deux à deux distincts et f une fonction $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que pour tout $t \in [a, b]$:

$$f(t) - L_n(f)(t) = \frac{1}{(n+1)!} U_n(t) f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{avec} \quad U_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

5. On pose $h(x) = x(x-1)\cdots(x-n)$. Montrer que :

(i) $\forall s \in [0, n]$, $|h(n-s)| = |h(s)|$;

(ii) $\forall s \in [0, n/2]$, $|h(s-1)| > |h(s)|$;

(iii) $\max\limits_{[0,n]} |h| = \max\limits_{[0,1]} |h| \leq n!$.

et en déduire qu'il existe $K > 0$ tel que :

$$\sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)| \leq K \left(\frac{2}{e}\right)^n \quad \text{avec} \quad Q = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i).$$

7. On définit la suite des polynômes de Tchebychev :

$$\begin{cases} T_0 = 1,\ T_1 = X \\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

8. Déterminer le degré, le coefficient dominant, ainsi que les racines de T_n.

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici certaines qui auraient pu être posées.

9. Pour une subdivision σ de $[a, b]$ comportant $n+1$ points, on note $P_\sigma(f)$ l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f en tout point de σ. Comment minimiser $\|f - P_\sigma(f)\|_\infty$ à l'aide des b_i ?

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 88 : Mines 2022

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin(x+t)}{1+(xt)^3}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f possède une limite en $+\infty$. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 89 : Mines 2022

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t) f(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 90 : Mines 2022

Soit (E) l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Trouver une solution f de (E), développable en série entière au voisinage de 0, telle que $f(0) = 1$.

2. Donner le rayon de convergence de f et en donner une expression à l'aide des fonctions usuelles (on pourra séparer les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$).

3. Transformer (E) en posant $y = zf$, puis conclure.

Exercice 91 : Mines 2022

Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Développer s en série de fractions rationnelles.

2. En déduire un équivalent de $s(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 92 : Mines 2022

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad ; \quad v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^\alpha}.$$

Discuter de la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ en fonction de α.

Exercice 93 : Mines 2022

Étudier les solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^3 y' - 2y = 0$.

Exercice 94 : Mines 2022

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ n'admettant aucune racine entière. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$.

Exercice 95 : Mines 2022

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition et continuité de F ?

2. Équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$?

Exercice 96 : Mines 2022

Montrer que la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants normalisée.[22]

Exercice 97 : Mines 2022

[22] On qualifie ici de *normalisée* une équation différentielle en y dans laquelle le coefficient de $y^{(n)}$ est égal à 1.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Domaine de définition et continuité de f ?

2. Limite en $+\infty$ et équivalent en 0^+ de f ?

Exercice 98 : Mines 2022

On fixe $\alpha \geq 0$ et on pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Déterminer la limite et un équivalent de u_n lorsque $\alpha = 0$.

2. Faire de même lorsque $\alpha > 1$.

3. À l'aide du changement de variable $x = t\sqrt{n}$, faire de même lorsque $\alpha = 1$.

4. En déduire la limite de u_n lorsque $\alpha \in \,]0, 1[$.

Exercice 99 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.

2. Déterminer un équivalent du reste.

3. Pouvait-on trouver ce résultat par une comparaison série-intégrale ?

Exercice 100 : Mines 2023

Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$. Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)|\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{t + k\pi}{n}\right) \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Déterminer la limite de (I_n). On pourra étudier $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 101 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.

2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [c, +\infty[,\ f(x) = (x - c)^2$.

Exercice 102 : Mines 2023

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $X' = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

1. Montrer que $t \longmapsto \|X(t)\|_2$ est constante.

2. En déduire que la trajectoire de X est inscrite dans un cercle.

Il restait probablement des questions ; si tel est le cas, en voici certaines qui auraient pu être posées.

3. Montrer la réciproque de la question 1.

Exercice 103 : Mines 2023

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

1. Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de $f_n : x \longmapsto f(nx)$? Convergence uniforme sur tout compact ?
2. Mêmes questions avec $f_n : x \longmapsto f\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

Exercice 104 : Mines 2023

Soit $b \geq 2$. On note $c(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture en base b de n.
On pose $u_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = nu_{c(n)}$. Montrer que $\sum 1/u_n$ diverge.

Exercice 105 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et on considère $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$:
$$f'(x)^2 \leq 2f(x)M(\alpha) \quad \text{avec} \quad M(\alpha) = \sup_{|t|\leq 2\alpha} |f''(t)|.$$
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 106 : Mines 2023

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $f(z) = \exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Donner son rayon de convergence.
2. Exprimer les coefficients a_n de cette série entière sous forme d'une somme.
3. Donner une relation de récurrence entre les a_n.
4. Effectuer un développement asymptotique de $\ln(a_n)$ à la précision $\mathcal{O}(\ln n)$.

Exercice 107 : Mines 2023

Calculer $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n + n^2m + 2mn}$.

Exercice 108 : Mines 2023

On note $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et on considère $f \in \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$. On suppose que f admet un prolongement continu sur $D \cup \{z\}$ pour tout $z \in S$. Montrer que f admet un prolongement continu sur $\overline{D}$.

Exercice 109 : Mines 2023

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. On suppose que $f(x) > 0$ si $x \neq 0$, et que $f''(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $h^2 = f$.

Exercice 110 : Mines 2024

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Démontrer la convergence de l'intégrale :
$$\int_0^{2\pi} \ln\left|P\left(e^{it}\right)\right| \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 111 : Mines 2024

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + (n+1)u_n}{n+2}.$$

Déterminer une expression explicite de u_n et calculer sa limite.

Exercice 112 : Mines 2024

Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution x_n.
2. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 113 : Mines 2024

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_j = \min \left\{ n \geq 1 \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq j \right\}.$$

Justifier que la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Converge-t-elle ? Montrer que :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = e.$$

Exercice 114 : Mines 2024

On note H_n le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique (voir exercice 20), et on admet que :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j2^{j-1}} \int_0^1 \frac{x^{j-1}}{2-x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer la valeur explicite de la somme.

Exercice 115 : Mines 2024

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donner un équivalent de :

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

2. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}}.$$

Exercice 116 : Mines 2024

On admet que $\zeta(2) = \pi^2/6$ (cf. exercice 114), et on pose :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad ; \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi^4}{48} - a_n b_n\right).$$

Exercice 117 : Mines 2024

Montrer que :

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\sin(2x)}\,\mathrm{d}x < \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 118 : Mines 2024

Étudier la série entière :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \int_0^{\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2+1}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 119 : X 2022

Soit $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, et on note R le rayon de convergence de f.

Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(i) $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq (C+\varepsilon)^n$;

(ii) $R = \infty$ et $\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq r_0 \Longrightarrow |f(z)| \leq \mathrm{e}^{(C+\varepsilon)|z|}$.

Exercice 120 : X 2022

Soient $a_1, \dots, a_n$, $x_1, \dots, x_n$ des réels non nuls. On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(x_k t)$ et on suppose que :

(i) $\displaystyle\sup_{r \in \mathbb{N}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| f^{(r)}(t) \right| < \infty$,

(ii) $\displaystyle\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \leq 1$,

(iii) $f'(0) = 1$.

1. Justifier rapidement que l'on peut supposer $0 < x_1 < \cdots < x_n$, et montrer que $x_n \leq 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} g(x) \mathrm{e}^{itx}\, \mathrm{d}x$, où l'on a noté $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{[-x_k, x_k]}(x)$.
3. On admet[23] que si φ est continue et 2π−périodique, alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(n)|^2 = \int_{-1}^{1} |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \widehat{\varphi}(n) = \int_{-1}^{1} \varphi(x) \mathrm{e}^{in\pi x}\, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} |g(x)|^2\, \mathrm{d}x \leq 2$.

4. En déduire que $f = \sin$.

Exercice 121 : X 2022

On considère le nombre rationnel :

$$r = \frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134\ldots$$

1. Que vous inspire r ?
2. Formuler une conjecture à l'aide d'une série, puis la démontrer.
3. Que peut-on dire du développement décimal de r ?
4. En déduire une conjecture faisant intervenir la suite de Fibonacci, puis la démontrer.

Exercice 122 : X 2022

Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Pour $f \in E$, on note :

$$A(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^1 t f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\|A(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$. Trouver la constante C optimale.

[23] C'est une version de l'égalité de Parseval, avec laquelle on peut d'ailleurs aisément montrer que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Exercice 123 : X 2022

Existe-t-il un cercle contenant exactement trois points à coordonnées rationnelles ?

Exercice 124 : X 2022 [C]

Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell$.

1. Est-il vrai que $\sum a_n$ est convergente, de somme ℓ ?

2. Montrer que ce résultat est vrai si l'on suppose (a_n) positive.

3. Montrer que ce résultat est vrai si l'on suppose $a_n = o(1/n)$.[24]

Exercice 125 : X 2022

On pose $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On dit que f *vérifie la propriété* H_α lorsque[25] :

$$\exists C \in \mathbb{R},\, \forall (s,t) \in [0,1],\, |f(t) - f(s)| \leq C|t-s|^\alpha.$$

1. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha \leq \beta$. Montrer que si $f \in E$ vérifie H_β, alors f vérifie H_α.

2. Soient $f \in E$ vérifiant H_α et $g \in E$ vérifiant H_β, avec $0 < \alpha \leq \beta < 1$ et $\alpha + \beta > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(f,g) = \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

2.a) Montrer que $(I_n(f,g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On notera $I(f,g)$ sa limite.

2.b) Calculer $I(f,g) + I(g,f)$.

2.c) On suppose f et g de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer $I(f,g)$.

Exercice 126 : X 2022

Soit f une fonction développable en série entière de rayon R. Pour $r < R$, on pose :

$$m_r(f) = \sup_{|z|\leq r} |f(z)|\,.$$

On considère r_1, r_2, r_3 tels que $R > r_1 > r_2 > r_3 > 0$. Montrer qu'il existe des constantes $C > 0$ et $s \in \,]0,1[$ qui dépendent de r_1, r_2, r_3, mais pas de f, telles que :

$$m_{r_2}(f) \leq C m_{r_1}(f)^s m_{r_3}(f)^{1-s}.$$

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 127 : X 2023

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $a \in [0,1]$. On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} x(0) = a \\ x'(t) = g(t) - x(t)(f(t) + g(t)) \end{cases}$$

et on admet qu'elle possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.[26] On suppose enfin que :

$$f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell_f > 0 \quad \text{et} \quad g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell_g > 0.$$

[24] C'est un corollaire d'un théorème dû à Hardy et Littlewood, démontré en 1914 par les deux mathématiciens du même nom, qui l'ont d'ailleurs utilisé l'année suivante dans une nouvelle démonstration du théorème des nombres premiers. Le résultat reste d'ailleurs vrai si l'on suppose seulement $a_n = \mathcal{O}(1/n)$. Une forme plus générale est le théorème dit taubérien de Hardy-Littlewood.

[25] Une telle fonction est appelée $\alpha-$*höldérienne* sur $[0,1]$. Les fonctions $1-$höldériennes sont les fonctions lipschitziennes.

[26] Cette question peut être traitée avec le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Le théorème général, hors-programme, stipule que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, E est un espace de Banach, et $F : I \times E \to E$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, l'équation $x' = F(t,x)$; $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution *maximale* (J,x) où J est un intervalle ouvert inclus dans I, c'est-à-dire que x est solution sur J et ne peut être prolongée continûment en dehors. Ici, F est globalement lipschitzienne par rapport à x donc la solution obtenue est en fait *globale* : $J = I$.

Comportement de $x(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 128 : X 2023

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, et pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2}.$$

Trouver un équivalent de a_n et majorer la constante qui y apparaît.

Exercice 129 : X 2023

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \infty.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}.$$

1. Montrer que u est bien définie.
2. Montrer que u est bornée.
3. On suppose que u converge. Montrer que sa limite est nulle.
4. Montrer que u converge.

Exercice 130 : X 2023

Quelles sont les $\sigma \in S_n$ qui maximisent $\sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n) + \sigma(n)\sigma(1)$?

Exercice 131 : X 2023

Soit $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornée, ne s'annulant pas. Soient $m = \inf |a|$, $M = \sup |a|$, ainsi que $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. On suppose que $M < 1/2$ ou que $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 1 + \frac{f(qt)}{a(t)}.$$

Exercice 132 : X 2024

Soient $f, g, p \in \mathbb{C}[X]$ avec g et p unitaires. On se donne $q, w \in \mathbb{C}^*$ tels que :

- w^2 n'est pas une puissance entière de q,
- $\forall z \in \mathbb{C},\ wf(z)g(zq) - w^{-1}g(z)f(zq) = p(z)$.

1. Trouver une relation sur les degrés.
2. Existence de solutions à p fixé ?
3. Unicité de la solution à f et p fixés ?
4. Unicité de la solution à g et p fixés ?

Exercice 133 : X 2024

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 6. On suppose qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ tangente en trois points distincts A, B, C à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = p(x)$.

1. On note A_1 (resp. A_2) l'aire délimitée par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et les points A et B (resp. B et C).
Montrer que si B est le milieu de $[AC]$, alors $A_1 = A_2$.

2. On note à présent $Q = \dfrac{A_1}{A_2}$ et $q = \dfrac{AB}{BC}$. Montrer que $\dfrac{2}{7}q^5 \leq Q \leq \dfrac{7}{2}q^5$.

Exercice 134 : ENS 2022

On note E l'ensemble des fonctions $2\pi-$périodiques et continues sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_t(f)(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta)}{(1-\cos(\theta-\varphi))^{1/2-t}}\,\mathrm{d}\theta.$$

1. Pour quelles valeurs de t cette définition a-t-elle un sens ?

2. Montrer que $I_t \in \mathcal{L}(E)$.

3. Montrer que I_t est continue sur $(E, \|\cdot\|_2)$.

Exercice 135 : ENS 2022 (Gourdon, Analyse, p. 84)

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $M_k = \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \in [0,+\infty]$.

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral, et en déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. On suppose dans toute la suite qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M_0 < \infty$ et $M_n < \infty$.

2.a) Montrer que $M_k < \infty$ pour tout $k \leq n$.

2.b) Dans le cas $n = 2$, montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

2.c) Dans le cas général, montrer que pour tout $k \leq n$:

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} (M_0)^{1-\frac{k}{n}} (M_n)^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 136 : ENS 2022

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = (A + B(t))x(t)$.

1. Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

2. Soient $a, u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ et $c \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que[27] :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)\exp\left(\int_s^t a(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}s.$$

3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que[28] :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{(t-s)A}B(s)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

4. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ et on pose :

$$\mathcal{E}^+ = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{e}^{tA}X \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\right\} \quad ; \quad \mathcal{E}^- = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathrm{e}^{tA}X \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0\right\}.$$

Montrer qu'il existe des projecteurs π^+ et π^-, respectivement sur $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$, qui commutent avec A et qui vérifient $\pi^+ + \pi^- = \mathrm{Id}$.

5. On suppose que $\mathcal{E}^+ = \mathbb{R}^n$ et que $B(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Montrer que $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice 137 : ENS 2023

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $x_0, \dots, x_n \in I$ tels que $x_0 < \dots < x_n$ et $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.

[27] C'est le lemme de Grönwall, extrêmement utile dans l'étude des équations différentielles.
[28] C'est une variante de la formule de Duhamel, qui permet d'exprimer les solutions de $x' = Ax + b$.

Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 138 : ENS 2023

Pour $t \in \mathbb{N}$, on pose :

$$N(t) = \operatorname{card}\left\{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \binom{n}{k} = t\right\} \quad ; \quad B(t) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; t < \binom{2k}{k}\right\}.$$

Montrer que $N(t) \leq 2B(t)$, et que $B(t) = o(\ln t)$ lorsque $t \to \infty$.

$\triangleright$ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 139 : ENS 2023

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et deux fonctions a et b continues sur I.

1. Soit x une solution non nulle de $y'' + ay' + by = 0$ sur I. Montrer que les zéros de x sont isolés.

2. On suppose a de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer l'existence d'une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I telle que $f(t) = x(t)\mathrm{e}^{z(t)}$ soit solution d'une équation différentielle de la forme $y'' + qy = 0$, où q est continue sur I.

3. On note E_q l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$ sur I. Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues sur I, vérifiant $q_1 \leq q_2$. On considère $y_1 \in E_{q_1} \setminus \{0\}$ et $y_2 \in E_{q_2} \setminus \{0\}$, ainsi que α et β deux zéros consécutifs de y_1. Montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

Exercice 140 : ENS 2024

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que pour tous $m, n \geq 1$:

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n + c.$$

1. Montrer que, dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} \frac{a_m}{m}\right).$$

2. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = F(x) + 1$. On note $F^n = F \circ \cdots \circ F$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite :

$$\left(\frac{F^n(x) - x}{n}\right)_{n\geq 1}$$

a une limite, et que celle-ci est indépendante de x.

Exercice 141 : ENS 2024

On note $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *positif* lorsque $f \geq 0$ entraîne $u(f) \geq 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ positif. Montrer que $\forall f \in E$, $|u(f)| \leq u(|f|)$.

2. Soient $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\exists c > 0,\ \forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + c(x-y)^2.$$

3. On considère une suite $(u_n) \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ d'opérateurs positifs telle que pour tout $k \in \{0,1,2\}$, la suite $(u_n(e_k))$ converge uniformément vers e_k sur $[0,1]$, où l'on a noté $e_k(x) = x^k$. Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(u_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Lien avec le théorème d'approximation de Weierstrass ?

Exercice 142 : ENS 2024

Soit $n \geq 1$ un entier. On note :

- $E = \{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i\}$,
- A l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}^n$,
- $f(G) = \{F \cap G \mid F \in E\}$,
- $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des parties de G.

Déterminer le maximum de l'ensemble :

$$X = \{\operatorname{card} G \mid G \in A,\ f(G) = \mathcal{P}(G)\}.$$

Exercice 143 : Ulm 2022

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x-1) + f(x+1) + f(x-\pi) + f(x+\pi)}{4}.$$

Exercice 144 : Ulm 2023

On munit l'ensemble $\mathcal{B}$ des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie. On considère $g \in \mathcal{B}$ à support compact[29] et on note :

$$W(g) = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\operatorname{vect}}(x \longmapsto g(x-n)).$$

Caractériser les $t \in \mathbb{R}$ tels que l'adhérence de $W(g)$ soit invariante par translation par t.

[29]Le *support* d'une fonction $f : E \to F$ est l'adhérence de l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \neq 0\}$. Par conséquent, une fonction continue est à support compact si et seulement si elle est nulle en dehors d'un compact.

Calcul différentiel

Exercice 145 : Centrale 2023

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} g \,:\, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \frac{x}{x^2+t^2}. \end{aligned}$$

1. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer Δg.
2. On considère à présent :

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $f'' - f = 0$.

3. En déduire une expression de f.

Exercice 146 : Centrale 2024

Soit $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i,j \in \{1,\dots,n\},\, m_{i,j} \in [-1,1]\}$. On pose :

$$\alpha = \sup_{A\in\mathcal{S}} \det(A).$$

1. Montrer que $\det \in \mathscr{C}^0(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$.
2. Montrer que α est bien défini et est un maximum.
3. Montrer que α est atteint en une matrice M vérifiant :
   - $\det(M) > 0$;
   - $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $m_{i,j} \in \{-1,1\}$.

Exercice 147 : Mines 2023

Déterminer le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

soit de classe $\mathscr{C}^k$ mais pas $\mathscr{C}^{k+1}$.

Exercice 148 : Mines 2023

Existence, continuité et extrema de :

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \int_0^{\infty} \frac{\sin(t+x)}{t+y}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 149 : Mines 2023

1. Montrer que $\det \in \mathscr{C}^1(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ et que sa différentielle en I_n est la trace.
2. Montrer que sa différentielle en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $H \longmapsto \mathrm{tr}\left(\mathrm{com}(X)^T H\right)$.
3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer qu'il existe un unique prolongement continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de :

$$\begin{aligned} \phi \,:\, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto \det(X)X^{-1}. \end{aligned}$$

5. On pose $f(t) = \det(At + B)$. Montrer que :

$$f'(0) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \Delta_{i,j} b_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne le cofacteur[30] d'indice (i, j) de A.

Exercice 150 : Mines 2024

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne et on considère la fonction :

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{1}{2}\sin(x + y), \frac{1}{2}\cos(x - y)\right). \end{aligned}$$

1. Déterminer la différentielle de f.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\|df(x, y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
3. En déduire que le système :
$$\begin{cases} 2x = \sin(x + y) \\ 2y = \cos(x - y) \end{cases}$$

admet au plus une solution.

Exercice 151 : Mines 2024

On définit $f : (x, y) \longmapsto \min\left(x^2, y^2\right)$. Domaine de continuité de f ? de différentiabilité ? Caractère $\mathscr{C}^1$?

Exercice 152 : Mines 2024

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$. On fixe également $R > 0$, et on pose :

$$m = \min_{x \in B} \|\nabla f(x)\|$$

où B désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R.

1. Montrer que f est lipschitzienne sur $B_f(0, R)$.
2. Pour $r \in [0, R]$, on note :
$$\alpha(r) = \max_{x \in B} f(x).$$

Montrer que α est bien définie et qu'elle est lipschitzienne sur $[0, R]$.

3. Soit $r_0 \in [0, R[$. Démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall r \in \,]r_0, r_0 + \delta],\ \frac{\alpha(r) - \alpha(r_0)}{r - r_0} \geq m(1 - \varepsilon).$$

4. Montrer que $\alpha(r) \geq mr + f(0)$.

Exercice 153 : ENS 2022

1. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que si $\Delta u \geq 0$, alors la restriction de u à la boule unité atteint son maximum sur la sphère unité S.

[30]Le *cofacteur* d'indice (i, j) d'une matrice A est le coefficient (i, j) de sa comatrice, c'est-à-dire $(-1)^{i+j}\det(D_{i,j})$, où $D_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, la comatrice de A décrit d'ailleurs l'interaction de A avec le produit vectoriel : pour tous vecteurs u et v, $Au \wedge Av = (\mathrm{com}\, A)(u \wedge v)$.

2. Soit V l'application qui à une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ associe son déterminant de Vandermonde. Montrer que V atteint son maximum sur $S \cap H$, où H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ à déterminer.

Exercice 154 : ENS 2022

Soit $\star$ une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$, faisant de $(\mathbb{R}, \star)$ un groupe. On note e son neutre, et on pose :

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x \star y.$$

1. Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y) \partial_2(y, e).$$

3. Soit $\phi : (\mathbb{R}, \star) \to (\mathbb{R}, +)$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \int_e^x \frac{1}{\partial_2 f(t, e)} \, \mathrm{d}t.$$

Groupes, anneaux, arithmétique

Exercice 155 : Centrale 2022

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

1.a) Montrer que $f_A : k \longmapsto k\cdot 1_A$ est l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ vers A.

1.b) Montrer qu'il existe un unique $\kappa_A \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f_A) = \kappa_A\mathbb{Z}$.[31]

2.a) Montrer que si A est un corps, alors $\kappa_A = 0$ ou κ_A est un nombre premier.

2.b) Montrer que si A est un corps fini, alors $\kappa_A \neq 0$.

3.a) On suppose que A est un corps fini de cardinal p^n avec $n \geq 1$ et p premier.[32]
Montrer que $F : x \longmapsto x^p$ est un automorphisme de corps de A.

3.b) Déterminer l'ordre de F dans le groupe des automorphismes de A.

Exercice 156 : Centrale 2023 (Cassini 2, Algèbre 1, Exercice 4.33)

On définit la *fonction de Möbius* par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré parfait strictement supérieur à 1} \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{sinon, où } \omega(n) \text{ est le nombre de facteurs premiers distincts de } n \end{cases}$$

On donne la *formule du crible*, stipulant que pour des ensembles finis $V_1,\dots,V_k$:

$$\operatorname{card}(V_1\cup\cdots\cup V_k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_j\leq n}\operatorname{card}(V_{i_1}\cap\cdots\cap V_{i_j})\right).$$

1. Montrer la formule du crible pour $k=2$. Que donne-t-elle pour $k=3$?

2. On admet la formule du crible pour tout $k\in\mathbb{N}$. On munit $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$ de la probabilité uniforme et on y tire un couple (a,b) au hasard. On note r_n la probabilité que $a\wedge b = 1$. Exprimer r_n en fonction de μ.

3. Montrer que (r_n) converge, calculer sa limite et interpréter le résultat.[33]

Exercice 157 : Centrale 2023

On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Écrire une fonction Python renvoyant p_n en fonction de n.

2. On admet dans un premier temps la proposition $(\mathcal{P})$:

$$P\in\mathbb{Z}[X] \implies P(X+Y)P(X-Y)\in\mathbb{Z}[X,Y^2].$$

On pose $P_1 = X^2-2$ et, pour $n\geq 2$, $P_n = P_{n-1}\left(X-\sqrt{p_n}\right)\times P_{n-1}\left(X+\sqrt{p_n}\right)$.

Montrer que $P_n\in\mathbb{Z}[X]$ et que $P_n\left(\sqrt{p_1}+\cdots+\sqrt{p_n}\right)=0$.

3. Écrire une fonction Python renvoyant P_n en fonction de n.

4. Pour $k<\ell$, montrer que $(X-Y)^k(X+Y)^\ell+(X-Y)^\ell(X+Y)^k\in\mathbb{Z}[X,Y^2]$. En déduire $(\mathcal{P})$.

5. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres complexes annulés par un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.[34]

5.a) Montrer que $\forall P\in\mathbb{Z}[X]$, $\exists (Q,R)\in\mathbb{Z}[X]^2$, $P = Q(X^2)+XR(X^2)$.

5.b) Montrer que si $a\in\mathcal{A}$, alors $a^2\in\mathcal{A}$.

---

[31] Cet entier est appelé la *caractéristique* de A. Le résultat de la question 2.a) reste vrai lorsque A est seulement supposé intègre.

[32] On peut construire un corps de cardinal $q=p^n$ en quotientant $\mathbb{F}_p[X]$ par l'idéal engendré par un polynôme irréductible à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ de degré n, ou encore en considérant le corps de décomposition de X^q-X sur $\mathbb{F}_p$. En fait, si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q, alors $q=p^n$ où p désigne la caractéristique de $\mathbb{K}$, et $n=\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{K})$. Un tel corps est unique à isomorphisme près.

[33] Ce résultat se généralise à n'importe quel nombre d'entiers et fait intervenir la légendaire fonction zêta de Riemann.

[34] Ces complexes sont appelés *entiers algébriques*. On peut montrer qu'ils forment un anneau commutatif intègre, et même un sous-anneau du corps des *nombres algébriques*, qui sont les complexes annulés par un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 158 : Centrale 2024

1.a) Énoncer le théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$, ainsi que le petit théorème de Fermat.

1.b) Rappeler la définition d'un idéal. Montrer que si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a\mathbb{Z}[X]$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$.

1.c) Soient R un anneau et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $pR = \{pr \mid r \in R\}$ est un idéal de R, puis montrer que pour tous $x, y \in R$, $(x+y)^p - (x^p + y^p) \in pR$.

2. Soit p un nombre premier.

2.a) Soient R un anneau, I un idéal de R, $n \geq 1$ un entier. On se donne $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que tous les coefficients de B appartiennent à I. Montrer que $\det(A+B) - \det(A) \in I$.

2.b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $P(X^p) - P^p \in p\mathbb{Z}[X]$.

2.c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\operatorname{tr}(M^p) \equiv \operatorname{tr}(M) \bmod p$.

Exercice 159 : Mines 2022

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y \equiv 4 \bmod 11 \\ xy \equiv 10 \bmod 11 \end{cases}$$

Exercice 160 : Mines 2023

On note $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel dont $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base, puis que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Exercice 161 : Mines 2024

Soient G et G' deux groupes, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer que f est surjectif si, et seulement si, l'image par f de toute partie génératrice de G est génératrice de G'.

Exercice 162 : X 2022

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. On dit que $a \in A$ est un *diviseur de zéro* lorsqu'il existe $b \in A \setminus \{0\}$ tel que $ab = 0$.

1. Montrer que si A est fini et sans diviseur de zéro, alors A est un corps.

2. Soit $f \in A[X] \setminus \{0\}$. Montrer que si f est un diviseur de zéro, alors il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $af = 0$.

Exercice 163 : X 2023

Soit A une $\mathbb{C}-$algèbre[35] de dimension finie. On suppose que pour tous $a, b \in A$, $\|ab\| = \|a\|\,\|b\|$.

1. Montrer que $\forall x \in A$, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\|x - z_0\| \leq \|x - z\|$.

2. On pose $a = x - z_0$ et on suppose que $\|a\| = 2$. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$:

$$\left\| a - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \right\| \geq 2.$$

3. Montrer que $\|a - 1\| = \|a - 5\| = 2$.

4. En déduire que $a = 0$. Conclure au sujet de A.

5. Trouver une autre démonstration de ce résultat.

Exercice 164 : X 2023 (Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*, p. 30)

On considère $\sigma \in S_n$ et on note $Z(\sigma) = \{\tau \in S_n \mid \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\}$.

1. Montrer que $Z(\sigma)$ est un sous-groupe de S_n et que $Z(\varphi(\sigma)) = \varphi(Z(\sigma))$ pour tout $\varphi \in \operatorname{Aut}(S_n)$.

2. On suppose que σ est un produit de k transpositions à supports disjoints. Calculer $\operatorname{card}(Z(\sigma))$.

[35] Dans tout l'exercice, on identifiera naturellement $z \in \mathbb{C}$ à $z \cdot 1_A \in A$.

3. On suppose $n \neq 6$ et on considère $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_n)$. Montrer que si τ est une transposition, alors $\varphi(\tau)$ est également une transposition.

4. En déduire que tout automorphisme de S_n est intérieur[36] lorsque $n \neq 6$.

Exercice 165 : ENS 2022

Montrer que les morphismes continus de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 166 : ENS 2022

On considère le groupe :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$
Si B est un sous-groupe de G, on définit $C(B) = \{g^{-1}Bg \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\} \cap G$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe non trivial H de G tel que $C(H) = H$.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

Exercice 167 : ENS 2022

Soit $n \geq 5$ un nombre premier. On pose $\zeta = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, on pose :
$$d(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \zeta^{jk} \right).$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\zeta] = \{P(\zeta) \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}$ est un anneau.

2. Étudier l'application :
$$N(a_0, \dots, a_{n-1}) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \zeta^{jk} \right).$$

3. Montrer que $P(\zeta)$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\zeta]$ si, et seulement si, $N(P(\zeta)) = 1$.

4. On admet que :
$$M \in \mathbb{Z}[X] \implies \frac{M(X) - M(1)}{X - 1} \in \mathbb{Z}[X].$$

Montrer que l'équation $d(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_0 + \dots + a_{n-1}$ possède une infinité de solutions.

Exercice 168 : ENS 2023

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires, on pose $L = v_1\mathbb{Z} + v_2\mathbb{Z}$, et on note $\mathrm{vol}(L) = \det(v_1, v_2)$.

1. Soit B une boule d'aire strictement supérieure à $\mathrm{vol}(L)$. Montrer qu'il existe $x, y \in B$ tels que $x - y \in L$.

2. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists I \in L,\ \|I\|_2 \leq 2(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{\mathrm{vol}(L)}{\pi}}.$$

3. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \bmod 4$. Montrer que -1 est un carré modulo p.

4. Montrer que p est somme de deux carrés.

▷ **Des indications sont disponibles pour cet exercice. Cliquez ici pour les consulter.**

[36] Dans un groupe G, un automorphisme f est appelé *intérieur* lorsqu'il existe $g \in G$ tel que $f(x) = gxg^{-1}$.

Probabilités

Exercice 169 : CCP 2024

1. Soit X une variable aléatoire entière. Montrer que $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$ est bien définie sur $]-1, 1[$.

2. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires entières indépendantes. Montrer que $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} + G_{X_2}$:

   a) par un produit de Cauchy,

   b) par la formule $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

3. On admet le résultat précédent pour $n \geq 2$ variables entières. On considère une urne qui contient 4 boules dont une portant le numéro 0, deux le numéro 1, et une le numéro 2. On réalise n tirages avec remise dans l'urne, et on note X_k la variable aléatoire entière prenant la valeur sur la boule au $k^{\text{ème}}$ tirage, ainsi que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer G_{S_n} puis donner la loi de S_n.

Exercice 170 : Centrale 2023

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

2. En déduire une majoration de la probabilité d'obtenir au moins 3/4 de « face » au cours de N lancers d'une pièce équilibrée.

3. Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leq \mathrm{e}^{y\mu}\left(1 - \mu + \mu \mathrm{e}^y\right) \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{a}{a-b} \quad \text{et} \quad y = t(b-a).$$

Exercice 171 : Centrale 2023

Soit $A = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les $X_{i,j}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

1. Écrire une fonction Python `A(n)` qui renvoie la matrice A si les $X_{i,j}$ suivent une loi de Rademacher.[37]

2. On admet que $D = \det(A)$ est une variable aléatoire. Conjecturer les valeurs de $\mathbb{E}(D)$ et $\mathrm{Var}(D)$ en fonction de n, et vérifier cela pour $n = 1$ et $n = 2$.

3. Montrer que $\mathbb{E}(D) = \det\left(\mathbb{E}(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}\right)$.

4. Calculer $\mathbb{E}(\chi_A(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer $\mathrm{Var}(D)$. On pourra montrer que si $\sigma, \tau \in S_n$:

$$\mathrm{cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\ ;\ \prod_{i=1}^{n} X_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \tau, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

6. Montrer que[38] :

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|_2 .$$

où C_i désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. En déduire que $D \leq n^{n/2}$.

7. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\left(D \leq n!\sqrt{n}\right)$.

Exercice 172 : Mines 2022

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges. Chaque fois qu'on pioche une boule, on la remet dans l'urne et on y rajoute c boules de la même couleur. On note Y le premier instant où l'on tire une boule rouge. Déterminer la loi de Y. Admet-elle une espérance ?

[37] On dit que X suit une loi de Rademacher lorsque $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, en référence au mathématicien du même nom. Un théorème portant son nom énonce qu'une fonction lipschitzienne est presque partout dérivable.

[38] C'est l'inégalité de Hadamard. Les mathématiciens Jacques Hadamard et Charles-Jean de la Vallée Poussin furent les premiers à démontrer le théorème des nombres premiers en 1896, à l'aide des travaux de Riemann sur la fonction zêta.

Exercice 173 : Mines 2022

On considère une urne avec a boules blanches et b boules noires. On tire successivement et sans remise toutes les boules de cette urne. On note X la variable aléatoire désigne le numéro du tirage de la dernière boule blanche.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}\binom{k}{p}=\binom{q+1}{p+1}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{\binom{n-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}}$.
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 174 : Mines 2022

On considère une urne contenant n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules. On replace cette poignée dans l'urne et on mélange. On tire une deuxième poignée. Déterminer la probabilité que les deux poignées n'aient aucune boule en commun.

Exercice 175 : Mines 2022

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires, chacune suivant une loi géométrique de paramètre $1/n$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n}\leq x\right)$ pour $x>0$.
2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On définit, pour $p\geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=np+1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\\
b_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right)\exp\left(-\frac{k-1}{n}\right)\\
c_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}-\exp\left(-\frac{k-1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Montrer que :

$$|a_n|\leq \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{-p}\quad;\quad b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\quad;\quad |c_n|\leq\frac{p^2}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. En déduire :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 176 : Mines 2022

On considère une urne contenant n jetons, numérotés de 1 à n. On en tire m simultanément, et on les trie par ordre croissant des numéros. Soit X_i la variable aléatoire qui correspond au numéro du $i^{\text{ème}}$ jeton. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.

Exercice 177 : Mines 2022

Deux urnes contiennent initialement 2 boules blanches (urne 1) et α boules noires (urne 2). À chaque étape, on prélève une boule dans l'urne 1 et une boule dans l'urne 2, et on échange leurs places. Calculer l'espérance du nombre de boules blanches dans l'urne 1.

Exercice 178 : Mines 2022

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}_+)$. On pose :

$$p_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que (p_n) définisse une distribution de probabilité.
L'hypothèse « f de classe $\mathscr{C}^1$ » est-elle nécessaire ?

Exercice 179 : Mines 2023

On considère un graphe G à $n \geq 2$ sommets. Pour des sommets x et y distincts de G, on note $T_{x,y}$ la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ qui vaut 1 si et seulement s'il y a une arête entre x et y.

1. Combien d'arêtes peut posséder G au maximum ?

2. Pour un sommet x de G, on appelle *degré* de x et on note $\deg(x)$ la variable aléatoire qui compte le nombre d'arêtes de G dont x est une extrémité. Déterminer la loi de $\deg(x)$.

3. On dit qu'un sommet x de G est *isolé* lorsque $\deg(x) = 0$, et on note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de sommets isolés de G. Montrer que $\mathbb{E}(Z) = n(1-p)^{n-1}$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(Z = 0)\,\mathbb{E}(Z)^2 \leq \mathrm{Var}(Z)$.

5. On suppose à présent qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$p = C \times \frac{\ln n}{n}.$$

Trouver un développement asymptotique de $\mathbb{E}(Z)$.

6. Trouver un développement asymptotique de $\mathbb{P}(Z > 0)$. On distinguera les cas $C > 1$ et $C < 1$.

Exercice 180 : Mines 2023

Dans un sac se trouvent n boules noires et b boules blanches. On les tire une à une sans remise, et on note X le rang de la dernière boule blanche tirée. Déterminer la loi, l'espérance, et la variance de X.

Exercice 181 : Mines 2023

On considère une urne contenant quatre jetons : 0, 1, 1, 2. On tire n jetons avec remise, et on note S la valeur totale obtenue. Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 182 : Mines 2023

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = \alpha \exp\left(1 + t^2\right)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Trouver α et déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N})$, $\mathbb{P}(X \in 3\mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(X \in 6\mathbb{N})$.

Exercice 183 : Mines 2023

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont entières. On dit que Y est *k-divisible* s'il existe des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ indépendantes et suivant la même loi, telles que $Y = X_1 + \cdots + X_k$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi de $U + V$ lorsque $U \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.
En déduire que si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors Y est $k-$divisible pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $Y = X_1 + \cdots + X_k$ une variable aléatoire $k-$divisible.

2.a) Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(-A \leq Y \leq A) = 1$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\mathbb{P}\left(-\frac{A}{n} \leq X_i \leq \frac{A}{n}\right) = 1$$

2.b) Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\mathrm{Var}(X_i) \leq \frac{A^2}{n^2}.$$

En déduire une majoration de $\mathrm{Var}(Y)$.

2.c) Quelles sont les variables aléatoires bornées et infiniment divisibles ?

3. On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Montrer que Y n'est pas $k-$divisible pour $k \geq 2$.

4. On suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Déterminer les $k \in \mathbb{N}$ tels que Y soit $k-$divisible.

Exercice 184 : Mines 2024

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [a,b]$, on se donne une suite $(X_{n,x})$ de variables aléatoires réelles, admettant un moment d'ordre 2 et ayant toutes pour espérance x. On définit les suites de fonctions :

$$E_n(x) = \mathbb{E}(f(X_{n,x})) \quad ; \quad V_n(x) = \mathrm{Var}(X_{n,x}).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (V_n) pour que (E_n) converge uniformément vers f.

Exercice 185 : ENS 2022

1. Donner l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

2. Une boîte contient n cartes. Un collectionneur en tire une et la remet dans la boîte, et ainsi de suite jusqu'à toutes les avoir tirées. Calculer l'espérance du nombre de tirages.

Exercice 186 : ENS 2022

On tire des vecteurs aléatoirement avec remise dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^n$ et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaire pour en obtenir un système générateur. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 187 : ENS 2023

On munit $\Omega = S_n$ de la loi uniforme. On tire au sort $\sigma \in \Omega$ et on note :

- A_i l'événement $\sigma(i) = i$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$,
- N la variable aléatoire qui compte le nombre de points fixes de σ.

1. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ pour $A \subset \Omega$.

2. Pour $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

3. On donne la *formule du crible* (voir exercice 156). Calculer $\mathbb{P}(N > 0)$.

4. Calculer le nombre de *dérangements* (voir exercice 82) de $\{1,\dots,n\}$.

5. Calculer $\mathbb{P}(N = k)$. Que dire lorsque $n \to \infty$?

Exercice 188 : ENS 2023

On considère deux suites de réels (a_k) à valeurs dans $[1,2]$ et (p_k) à valeurs dans $[0,1]$. On se donne également une suite (X_k) de variables aléatoires réelles indépendantes, et on suppose que :

$$\mathbb{P}(X_k = a_k) = \mathbb{P}(X_k = -a_k) = \frac{p_k}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - p_k.$$

1. À quelle condition sur a_k et p_k a-t-on $\mathrm{Var}(X_k) = 1$? On la supposera vérifiée par la suite.

2. On pose :

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Montrer que :

$$\mathbb{E}(\cos(tS_N)) = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{tX_k}{\sqrt{N}}\right)\right).$$

3. En déduire :

$$\mathbb{E}(\cos(tS_N)) \xrightarrow[N\to\infty]{} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Exercice 189 : Ulm 2022

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que XY suit une loi de Poisson. Montrer que X ou Y est à valeurs dans $\{0,1\}$.

Exercice 190 : Ulm 2022

Soient $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des réels $\sigma_0, \ldots, \sigma_n > 0$ tels que, pour toutes variables aléatoires indépendantes $A_0, \ldots, A_n$ qui vérifient, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{P}(A_i = 0) = 0 \quad ; \quad \mathbb{E}(A_i) = 0 \quad ; \quad \mathrm{Var}(A_i) = \sigma_i^2$$

la probabilité que $P_n = A_0 + A_1 X + \cdots + A_n X^n$ ait n racines réelles soit supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$.

Indications

Cette section contient des indications fournies dans certains exercices ou certaines questions difficiles, qui sont parfois apparues au cours de l'échange avec l'examinateur pour les oraux qui s'y prêtent.

Exercice 10

Montrer que la composante connexe par arcs de Id dans G est un sous-groupe distingué de G.[39]
Dans le cas où G est connexe par arcs et $G \neq \{\mathrm{Id}\}$, montrer que G contient une rotation d'angle π.

Exercice 63

Chercher un vecteur propre commun à a et b.

Exercice 64

Pour la question 3, étant donnés $X = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $Y = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pourra considérer :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k \mathrm{e}^{ikt} \quad ; \quad Q(t) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathrm{e}^{ikt}.$$

Exercice 87

Pour la question 4, on pourra poser $g(t) = f(t) - L_n(f)(t) - CU_n(t)$ où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 126

Prendre $r_2 < (r_1)^s (r_3)^{1-s}$.

Exercice 138

Montrer que les fonctions $i \longmapsto \binom{i+j}{i}$ et $j \longmapsto \binom{i+j}{j}$ sont strictement croissantes.

Exercice 166

Déterminer d'abord $C(M)$ lorsque M est un singleton. Pour ce faire, écrire les relations entre coefficients et racines du polynôme caractéristique, et montrer que $C(\{A\}) = C(\{B\})$ si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Exercice 168

Pour la question 4, on pourra choisir L tel que $\|I\|_2^2 = p$ pour tout $I \in L$.
On pourra également prendre $v_1 = (p, 0)$ et $v_2 = (q, 1)$ où $q^2 \equiv -1 \bmod p$.

[39] On rappelle qu'un sous-groupe H de G est dit *distingué* lorsque $gHg^{-1} \subset H$ pour tout $g \in G$.

Corrigés

Exercice 11 (corrigé proposé par Vivien)

Lemme. Pour toute base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\sum_{k=1}^{n} \exp \langle Ax_k, x_k \rangle \leq \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^A\right).$$

Démonstration. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A. D'après le théorème spectral, il existe alors $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} Q^T$$

où l'on a noté, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha_i = \dim \ker(A - \lambda_i I_n)$. La matrice du projecteur spectral associé est :

$$P_i = Q \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_{\alpha_i} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^T.$$

On a de plus, par construction, les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{r} P_i = Q^T Q = I_n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i = A \quad ; \quad P_i P_j = \delta_{i,j} P_i.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur unitaire, on a donc :

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle P_i x, x \rangle$$

et puisque les P_i sont symétriques positives, chaque $\langle P_i x, x \rangle$ est positif. De plus, leur somme vaut 1 donc par l'inégalité de Jensen appliquée à l'exponentielle :

$$\exp \langle Ax, x \rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \langle P_i x, x \rangle.$$

Ainsi, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \exp \langle Ax_k, x_k \rangle \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \langle P_i x_k, x_k \rangle = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle P_i x_k, x_k \rangle}_{=\mathrm{tr}(P_i) = \alpha_i}.$$

On en conclut :

$$\sum_{k=1}^{n} \exp \langle Ax_k, x_k \rangle \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathrm{e}^{\lambda_i} \leq \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^A\right).$$

Soient $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$. Notons $M(t) = tA + (1-t)B$. Puisque c'est une matrice symétrique réelle, il existe une base orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $M(t)$, chaque x_i étant associé à la valeur propre λ_i. Remarquons alors que $tAx_i + (1-t)Bx_i = \lambda_i x_i$, d'où $t \langle Ax_i, x_i \rangle + (1-t) \langle Bx_i, x_i \rangle = \lambda_i$. Ainsi, par convexité de l'exponentielle :

$$\mathrm{tr}\, M(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(t \langle Ax_i, x_i \rangle + (1-t) \langle Bx_i, x_i \rangle) \leq t \sum_{i=1}^{n} \exp \langle Ax_i, x_i \rangle + (1-t) \sum_{i=1}^{n} \exp \langle Bx_i, x_i \rangle.$$

D'après le lemme, on en déduit :

$$\mathrm{tr}\, M(t) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^{tA+(1-t)B}\right) \leq t\, \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^A\right) + (1-t)\, \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^B\right)$$

et ceci traduit la convexité de $M \longmapsto \mathrm{tr}\left(\mathrm{e}^M\right)$ sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Exercice 67 (corrigé proposé par Giovanni)

Cet exercice, que j'ai eu à l'oral, n'est pas bien compliqué, mais il est facile de s'y perdre. La clé est de travailler avec P'/P. Comme P est scindé et de degré $N \geq 1$, on peut l'écrire :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et les α_i sont les racines distinctes de P. Remarquons alors que :

$$(N-1)(P')^2 \geq NPP'' \iff (N-1)\left(\frac{P'}{P}\right)^2 \geq N\frac{P''}{P} \iff -N\left(\frac{P'}{P}\right)' \geq \left(\frac{P'}{P}\right)^2.$$

On utilise alors la formule bien connue :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - \alpha_i}.$$

Il ne reste plus qu'à l'injecter dans l'inégalité précédente. Le résultat à prouver est donc équivalent à :

$$N\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(X-\alpha_i)^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-\alpha_i}\right)^2.$$

Chaque m_i étant positif, on peut définir, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$a_i = \frac{\sqrt{m_i}}{X - \alpha_i} \quad \text{et} \quad b_i = \sqrt{m_i}$$

et puisque la somme des m_i vaut $N = \deg P$, le résultat à prouver équivaut à :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{r} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_i\right)^2.$$

On évalue alors en $x \in \mathbb{R}$ non racine de P (le résultat était évident au départ sinon) et on conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_r(x))$ et $b = (b_1, \ldots, b_r)$ sont positivement liés. Puisque $N = \deg P \geq 1$, ces derniers ne sont pas nuls, donc il y a égalité si, et seulement, s'il existe $t_0(x) > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$x - \alpha_i = \frac{1}{t_0(x)}.$$

On a donc égalité si, et seulement si, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$:

$$x - \alpha_i = x - \alpha_j.$$

Par conséquent, le cas d'égalité correspond au cas où P a exactement une seule racine. $\square$

Exercice 124 (corrigé proposé par Giovanni)

1. Non, prendre par exemple $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$.

2. Si (a_n) est positive, alors f est croissante, donc l'existence de ℓ permet d'affirmer que f est majorée par ℓ, au voisinage de 1^-, et même sur $I = [0, 1[$. Ainsi :

$$\forall x \in I,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq f(x) \leq \ell.$$

Puisqu'on a tronqué la somme, on peut maintenant faire tendre x vers 1^- et on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$$

Comme (a_n) est positive, on en déduit que $\sum a_n$ converge. C'est presque terminé. De nouveau par positivité de (a_n), la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$. Donc f est continue en 1, puis $f(1) = \ell$.

Remarque. On peut faire cela en une ligne :

$$\ell = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x) = \sup_{x \in I} \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{x \in I} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

3. Il suffit de montrer que :

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Tout d'abord, pour $N \geq 1$:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^n \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n\,|a_n| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

d'après le lemme de Cesàro. On doit donc montrer que :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Rappelons que $\sum a_n z^n$ est de rayon 1, donc $\sum n a_n z^n$ également, ce qui justifie la majoration :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

puisque la somme démarre à $n = N + 1 \geq N$. Puisque $(n\,|a_n|)$ est majorée, on a donc :

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \leq \frac{1}{N} \left(\sup_{n > N} n\,|a_n|\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \left(\sup_{n > N} n\,|a_n|\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N+2}.$$

On déduit aisément du fait que $n\,|a_n| \to 0$ le résultat suivant :

$$\limsup_{n \to \infty} n\,|a_n| = \lim_{N \to \infty} \left(\sup_{n > N} n\,|a_n|\right) = 0.$$

Enfin, par inégalité triangulaire :

$$\left| f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right|$$

ce qui donne le résultat cherché puisque f a une limite en 1. $\square$