

Histoires de la fonction zêta de Riemann

Stage de fin de licence 3

Giovanni Lebaron, encadré par Erwan Hillion



*INSTITUT de MATHÉMATIQUES
de MARSEILLE*

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–**300**. Euclide : il en existe une infinité.

Un *nombre premier* est un entier qui admet exactement deux diviseurs.

–**300.** Euclide : il en existe une infinité.

–**200.** Crible d'Ératosthène.

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il découvre un lien entre ce type de séries et les nombres premiers :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

1644. Problème de Bâle : que vaut la somme des inverses des carrés ?

1735. Euler répond à cette question :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il découvre un lien entre ce type de séries et les nombres premiers :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

1859. Riemann reprend les travaux d'Euler.

- définition et prolongement de la fonction zêta
- conjecture sur ses zéros
- liens avec les nombres premiers

1 Fonction zêta de Riemann

- Définition et propriétés usuelles
- Équation fonctionnelle de $\zeta(s)$
- Infinité des zéros sur la droite critique

2 Séries de Dirichlet et convolution

3 Liens avec les nombres premiers

- Le théorème de Wiener-Ikehara
- Théorème des nombres premiers
- La formule explicite

4 Caractères et fonctions L de Dirichlet

- Propriétés des séries L de Dirichlet
- Théorème de la progression arithmétique
- L'équation fonctionnelle des $L(s, \chi)$

5 La quête des exposants

- Formule sommatoire de Voronoï
- Le problème des diviseurs de Dirichlet
- Le problème du cercle de Gauss

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Définition

La *fonction zêta de Riemann* est définie, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

C'est une fonction analytique sur $\operatorname{Re}(s) > 1$, avec un pôle simple en $s = 1$.

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

$\rightarrow \zeta(-2n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (zéros *triviaux*)

Fonction zêta de Riemann

Définition, équation fonctionnelle, zéros

Théorème

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant, pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Cette équation fonctionnelle peut s'écrire $h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$.

$\rightarrow \zeta(-2n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ (zéros *triviaux*)

Hypothèse de Riemann. Les zéros non triviaux se situent tous sur la *droite critique* $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

Liens avec les nombres premiers

Théorème des nombres premiers

Liens avec les nombres premiers

Théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\pi(x) = \text{card} \{p \text{ premier} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Liens avec les nombres premiers

Théorème des nombres premiers

Théorème (Hadamard, De La Vallée Poussin, 1896)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\pi(x) = \text{card} \{p \text{ premier} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Une étape cruciale de beaucoup de démonstrations consiste à montrer que $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\text{Re}(s) = 1$.

Liens avec les nombres premiers

La formule explicite

Liens avec les nombres premiers

La formule explicite

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Liens avec les nombres premiers

La formule explicite

Une meilleure approximation de $\pi(x)$ est donnée par la fonction :

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Les zéros non triviaux de ζ sont fortement liés à la répartition des nombres premiers, et à l'estimation de l'écart $|\pi(x) - \text{li}(x)|$.

Liens avec les nombres premiers

La formule explicite

Théorème (Riemann, 1859 / Von Mangoldt, 1895 / Landau, 1908)

Pour tout $x \in (1, \infty)$:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J(x^{1/n})$$

avec :

$$J(x) = \text{li}(x) - \log 2 - \sum_{\rho} \text{li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t(t^2 - 1) \log t} dt$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ .

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Son développement asymptotique prend souvent la forme :

$$A(x) = \text{partie principale} + O(x^\beta).$$

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

On se donne une fonction $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, dont on cherche à étudier la *fonction sommatoire* :

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Son développement asymptotique prend souvent la forme :

$$A(x) = \text{partie principale} + O(x^\beta).$$

Objectif. Optimiser l'exposant β .

La quête des exposants

Formule sommatoire de Voronoï

Théorème

Soit $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

$$L(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

se prolonge en une fonction méromorphe, vérifiant une équation fonctionnelle de la forme :

$$h(s)L(s, a) = h(1-s)L(1-s, a).$$

Alors, sous des hypothèses convenables, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)f(n) = f(0)L(0, a) + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \int_0^{\infty} f(t)H(nt) dt.$$

La quête des exposants

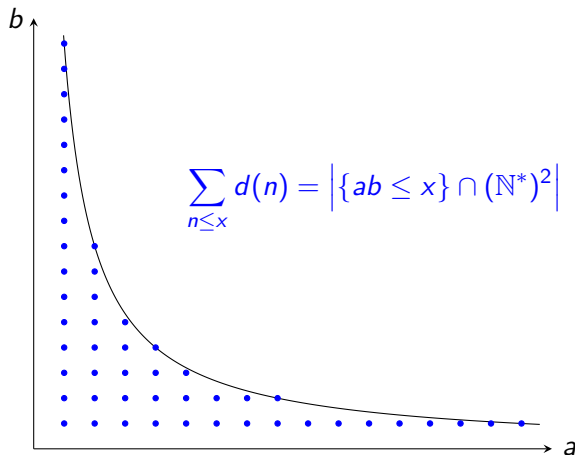
Le problème des diviseurs de Dirichlet

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .

La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

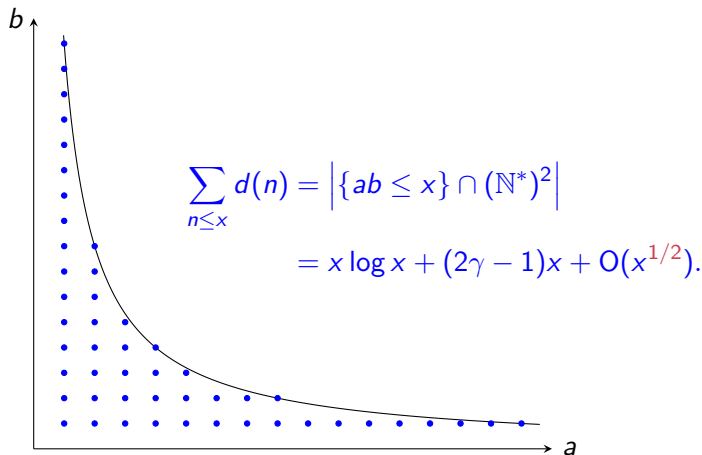
On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .



La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .



La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Théorème (Voronoi, 1904)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/3} \log x).$$

La quête des exposants

Le problème des diviseurs de Dirichlet

La fonction L associée à $d(n)$ est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Théorème (Voronoi, 1904)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{1/3} \log x).$$

On sait que l'exposant optimal se trouve entre $1/4$ et $131/416 \approx 0.3149$.

La quête des exposants

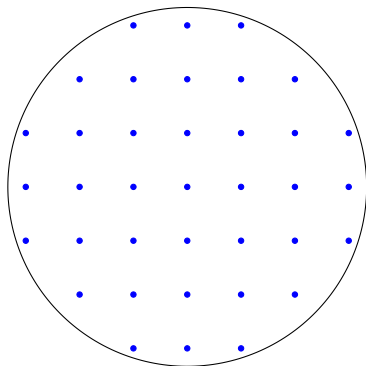
Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.

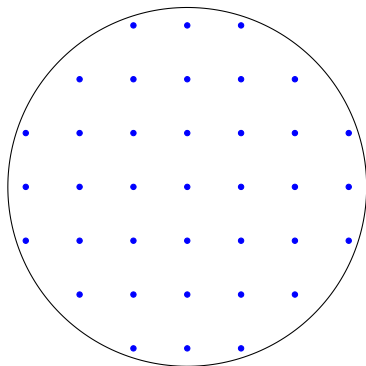


$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \left| \mathbb{D}(0, \sqrt{x}) \cap \mathbb{Z}^2 \right|$$

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

On note $r_2(n) = \text{card} \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$.



$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} r_2(n) &= \left| \mathbb{D}(0, \sqrt{x}) \cap \mathbb{Z}^2 \right| \\ &= \pi x + O(x^{1/2}). \end{aligned}$$

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s) L(s, \chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s, \chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s) L(s, \chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s, \chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Théorème (Voronoi, 1904)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \pi x + O(x^{1/3}).$$

La quête des exposants

Le problème du cercle de Gauss

La fonction L associée à $r_2(n)$ est :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{n^s} = \zeta(s) L(s, \chi_4) \quad \text{avec} \quad L(s, \chi_4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Théorème (Voronoi, 1904)

Lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\sum_{n \leq x} r_2(n) = \pi x + O(x^{1/3}).$$

On sait que l'exposant optimal se trouve entre $1/4$ et $131/416 \approx 0.3149$.

Merci !

Merci pour votre attention !