

Le jeu de Go est PSPACE-difficile

Guilhem Repetto *

11 décembre 2023

Résumé

Nous décrivons une réduction en temps polynomial du problème de décision TQBF au problème GOGÉNÉRALISÉ. Cette réduction s'effectue en trois étapes. Une instance de TQBF est d'abord mise sous une forme normale, dite "alternante". Puis, on effectue une réduction de ce sous-ensemble des instances de TQBF au jeu GÉOGRAPHIE. Ensuite, on effectue une réduction de ce problème vers le problème GÉOGRAPHIEPLANAIRE, qui est une variante de GÉOGRAPHIE dont toutes les instances se représentent par un graphe planaire. Enfin, on effectue une réduction de ce dernier problème vers GOGÉNÉRALISÉ.

Comme le problème TQBF est PSPACE-complet et que la réduction décrite est calculable en temps polynomial, le problème GOGÉNÉRALISÉ hérite de la PSPACE-difficulté de TQBF.

Définissons les trois problèmes de décision en jeu :

TQBF

Entrée une formule booléenne quantifiée close en forme prénexe φ

Sortie Vrai si et seulement si φ est vraie

GÉOGRAPHIE

Entrée une instance du jeu GÉOGRAPHIE

Sortie Vrai si et seulement si le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante.

GOGÉNÉRALISÉ

Entrée un plateau de Go de taille arbitraire

Sortie Vrai si et seulement si les blancs disposent d'une stratégie gagnante.

Le jeu GÉOGRAPHIE est le suivant : le plateau de jeu, donné en entrée, est un graphe orienté fini $G = (S, A)$. Le joueur 1 choisit un sommet initial, qui devient le sommet courant. Ensuite, les joueurs jouent alternativement de la façon suivante, en commençant par le joueur 2 : le joueur dont c'est le tour choisit un arc ayant pour origine le sommet courant. Le sommet courant

*Toutes les idées présentées ici proviennent du cours de théorie de la complexité donné à l'ENS de Rennes par François Schwarzentruber.

change et devient le sommet d'arrivée de l'arc. Enfin, l'ancien sommet courant est supprimé du graphe.

Le dernier joueur à pouvoir jouer gagne. Comme le nombre de sommets décroît strictement à chaque tour, on a la garantie que le jeu termine toujours en au plus $|S|$ coups.

I Réduction de TQBF à une forme normale

Dire que le joueur 1 de GÉOGRAPHIE dispose d'une stratégie gagnante revient à dire qu'il existe un coup initial tel que pour toute réplique du joueur 2, il existe un coup tel que pour toute réplique... tel que le joueur 1 est le dernier à jouer. Ainsi, il est pratique de ne considérer que les formules de TQBF de la forme suivante : $\psi = \exists p_1 \forall q_1 \cdots \exists p_n \forall q_n \varphi$, où φ est sans quantificateur, et ψ n'a pas de variables libres.

Cette forme permet de modéliser un jeu de logique à deux joueurs : un joueur existentiel $\exists$ et un joueur universel $\forall$ construisent alternativement une valuation. Le jeu se déroule en faisant évoluer un couple (ψ, ν) composé d'une formule logique et d'une valuation de la façon suivante :

- Le couple initial est $(\psi, \emptyset)$.
- Si la formule du couple actuel est sans quantificateurs, alors le joueur $\exists$ gagne si $\nu \models \psi$, sinon, le joueur $\forall$ gagne.
- Si le couple actuel est de la forme $(\exists q \widehat{\varphi}, \nu)$, alors le joueur $\exists$ choisit une valeur $v \in \{\top, \perp\}$, et le couple devient $(\widehat{\varphi}, \nu \cup \{q \mapsto v\})$
- Si le couple actuel est de la forme $(\forall p \widehat{\varphi}, \nu)$, alors le joueur $\forall$ choisit une valeur $v \in \{\top, \perp\}$, et le couple devient $(\widehat{\varphi}, \nu \cup \{p \mapsto v\})$

On constate qu'une formule de cette forme est vraie si et seulement si le joueur $\exists$ dispose d'une stratégie gagnante.

C'est ce jeu qui va être simulé dans le jeu GÉOGRAPHIE.

Soit une formule booléenne quantifiée. On peut effectivement supposer qu'elle est de la forme

$$\exists p_1 \forall q_1 \cdots \exists p_n \forall q_n \varphi$$

En effet, on effectue une première transformation tr_1 qui transforme une formule quelconque $Q_1 q_1 \cdots Q_n q_n$, où $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, en une formule équivalente en ajoutant au plus n nouvelles

variables $p_1, \dots, p_n$, en définissant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{tr}_1(\varphi) &= \varphi \quad \text{si } \varphi \text{ est sans quantificateurs} \\ \text{tr}_1(\forall q_j \forall q_{j+1} \varphi) &= \forall q_j \exists p_j \forall q_{j+1} \text{tr}_1(\varphi) \\ \text{tr}_1(\exists q_j \exists q_{j+1} \varphi) &= \exists q_j \forall p_j \exists q_{j+1} \text{tr}_1(\varphi) \\ \text{tr}_1(\forall q_j \exists q_{j+1} \varphi) &= \forall q_j \exists q_{j+1} \text{tr}_1(\varphi) \\ \text{tr}_1(\exists q_j \forall q_{j+1} \varphi) &= \exists q_j \forall q_{j+1} \text{tr}_1(\varphi) \end{array} \right.$$

On a bien $\psi \equiv \text{tr}_1(\psi)$, car les variables ajoutés par tr_1 n'ajoutent aucune information à la formule. De plus, la réduction tr_1 se calcule en temps polynomial (et même linéaire) en la taille de φ : $|\text{tr}_1(\psi)| \leq 2|\psi|$.

On peut enfin supposer que φ est une conjonction de clauses : $\varphi = C_1 \wedge \dots \wedge C_n$ où les C_i sont de la forme $C_i = l_1^i \vee \dots \vee l_m^i$, ou les l_k^i sont des littéraux.

II Réduction à GÉOGRAPHIE

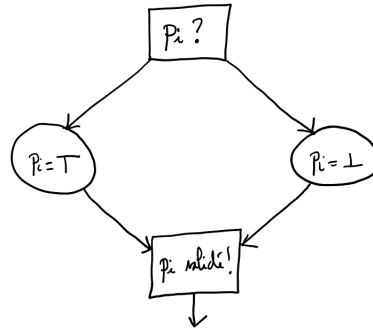
On effectue une transformation tr_2 de cette formule en instance de GÉOGRAPHIE. Le joueur 1 est le joueur "existentiel", et le joueur 2 le joueur "universel". L'instance de GÉOGRAPHIE sera un jeu dans lequel les coups possibles seront très limités. La partie se déroulera toujours en deux phases :

- dans la première phase, le choix de valeurs de vérités pour les variables p_i et q_i sera simulé, et l'instance du jeu sera telle que le joueur 1 choisira exactement les valeurs des p_i , et le joueur 2 les valeurs de q_i
- dans la seconde phase, le joueur 2 mettra au défi le joueur 1 sur la validité de la formule avec les choix de valeurs précédents. Un choix de l'une des clauses de φ sera simulé. Si 1 disposait effectivement d'une stratégie gagnante, toutes les clauses sont vraies. Sinon, et si le joueur 2 a joué de façon optimale, l'une des clauses est fausse. Le joueur 1 tentera de donner une preuve de la validité de la formule, constitué d'une des variables d'icelle qui rend vraie la clause.

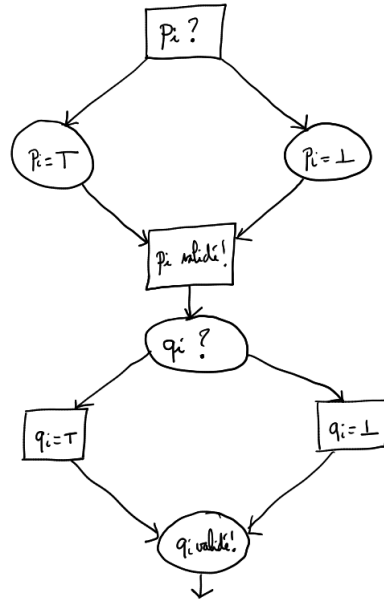
Décrivons à présent la réduction tr_2 et ses gadgets. Pour plus de clarté, on représentera des sommets ronds et carrés, la distinction étant d'ordre purement visuel. Les sommets ronds représenteront les sommets jouables par le joueur 1 et les sommets carrés seront ceux jouables par le joueur 2 ($\forall$). Les noms des sommets n'ont ici pas d'importance dans le jeu.

Un sommet "Début!" rond est toujours ajouté au début. Il est connecté au gadget représentant $\exists p_1$.

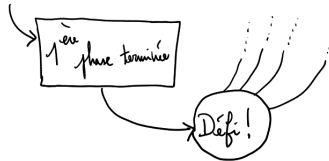
Les symboles " $\exists p_i$ " se traduisent de la façon suivante :



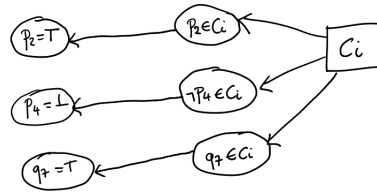
De façon similaire, les symboles " $\exists p_i \forall q_i$ " se traduisent de la façon suivante :



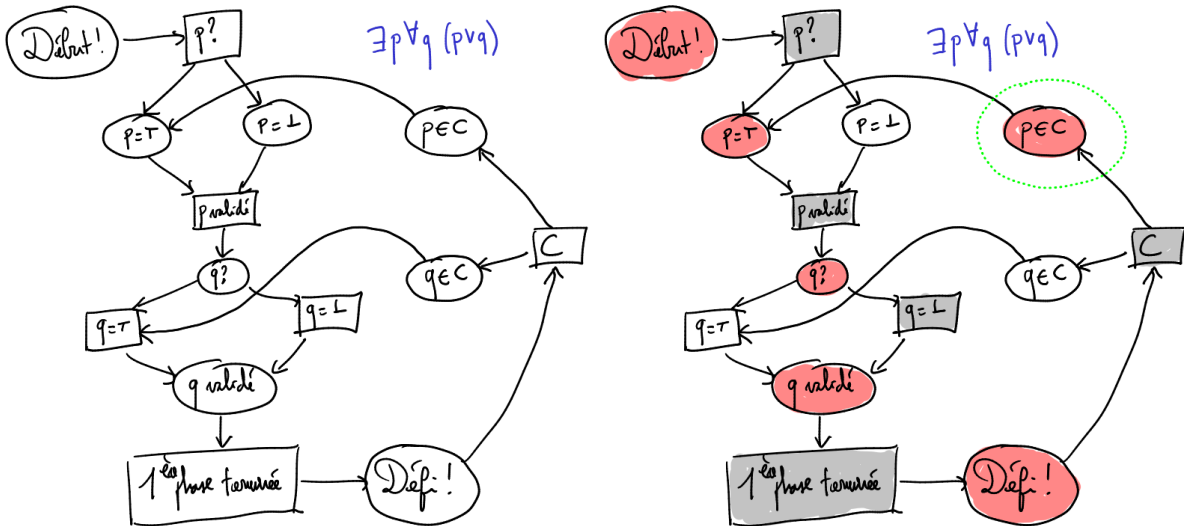
La fin de la première phase du jeu, qui correspond à la fin des quantificateurs de la formule logique, se traduit en



On relie le sommet "Défi!" à n sommets nommés C_i , pour i allant de 1 à n , représentés par le gadget suivant : chaque sommet C_i est relié à des sommets ronds de type " $p_j \in C_i$ " ou " $\neg p_j \in C_i$ " pour chaque littéral p_j ou $\neg p_j$ de C_i . Enfin, si la clause contient le littéral p_j , alors le sommet $p_j \in C_i$ est relié au sommet $p_j = \top$. Si C_i contient le littéral $\neg p_j$, alors le sommet $\neg p_j \in C_i$ est relié au sommet $p_j = \perp$. Dans l'exemple ci-dessous, on a pris $C_i = p_2 \wedge \neg p_4 \wedge q_7$.

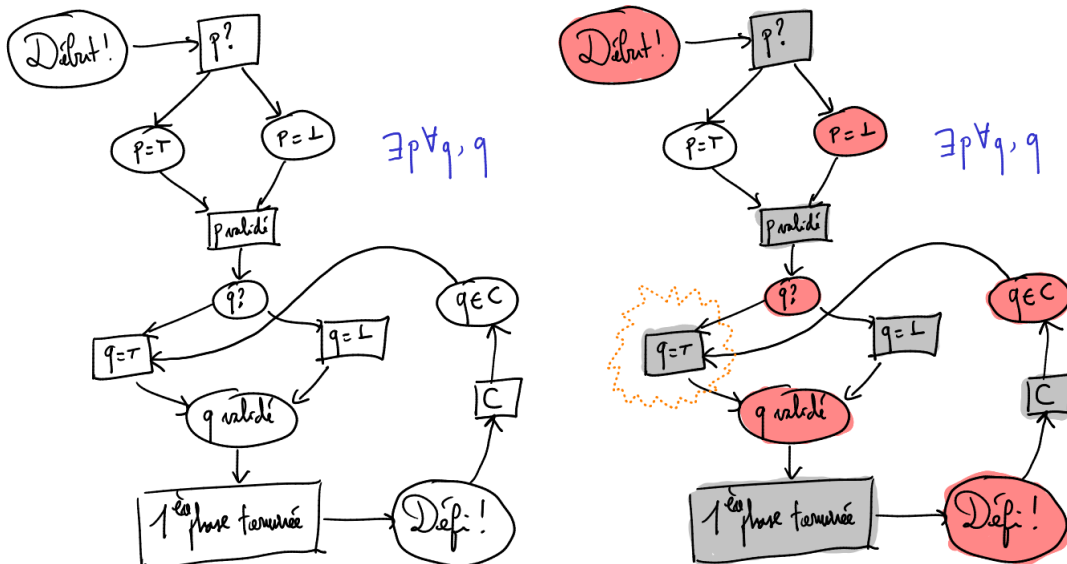


Donnons un exemple d'instance avec une formule vraie :



La stratégie gagnante du joueur 1 consiste à jouer $p = \top$ puis $p \in C$ lorsque l'occasion se présente. Elle est mise en œuvre dans la partie coloriée à droite.

Donnons un exemple dans lequel la formule est fausse :



Une partie de GÉOGRAPHIE jouée sur cette instance est la suivante, ou on a colorié les sommets

joués. La formule est fausse ; le joueur 1 ne dispose pas de stratégie gagnante. Le joueur 1 perd.

La réduction tr_2 construit toujours trois sommets (“Début!”, “1^e phase terminée” et “Défi!”). Elle construit huit sommets pour chaque facteur de la forme $\exists p \forall q$ de la formule initiale, soit 2 sommets par symbole. Elle construit un sommet pour chaque clause, puis un sommet pour chaque littéral, soit au plus deux sommets pour chaque littéral.

Si on note $|\psi|$ le nombre de symboles de ψ , alors le nombre de sommets construit par tr_2 est majoré par $3 + 2|\psi|$.

Le degré du graphe est majoré par $|\psi|$, il correspond au degré sortant du sommet “Défi!”. Ainsi, on a bien

$$|tr_2(\psi)| \leq 3 + 3|\psi|$$

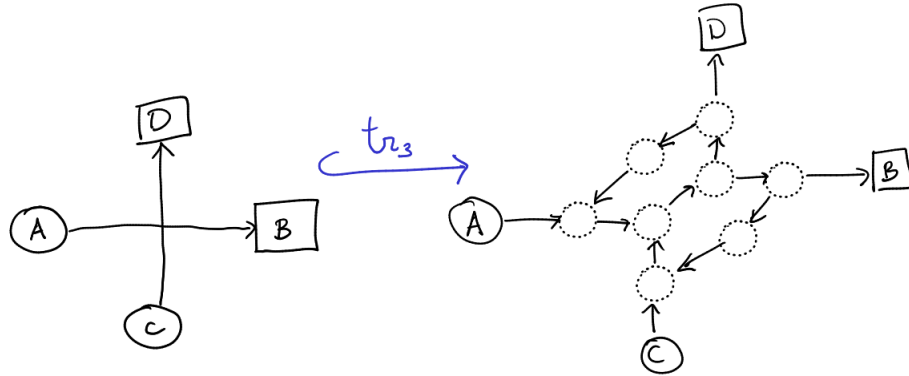
III Réduction de GÉOGRAPHIE à GÉOGRAPHIEPLANAIRE

On s’intéresse à présent à la version de GÉOGRAPHIE nommée GÉOGRAPHIEPLANAIRE, où la seule différence est que le graphe du jeu est planaire, et que le degré du graphe ne dépasse pas trois. On montre qu’il existe une réduction en temps polynomial de l’ensemble des instances de GÉOGRAPHIE de la forme $tr_2 \circ tr_1(\psi)$, où ψ est une formule booléenne quantifiée, à GÉOGRAPHIEPLANAIRE.

Étant donné une instance $G = tr_2 \circ tr_1(\psi)$ de GÉOGRAPHIE, il s’agit de trouver un graphe de jeu équivalent $tr_3(G)$ de degré au plus trois et sans croisements entre les arcs, tel que le joueur 1 dispose d’une stratégie gagnante sans G si et seulement s’il dispose d’une stratégie gagnante dans $tr_3(G)$.

On utilise deux gadgets.

Le premier permet de supprimer un croisement :



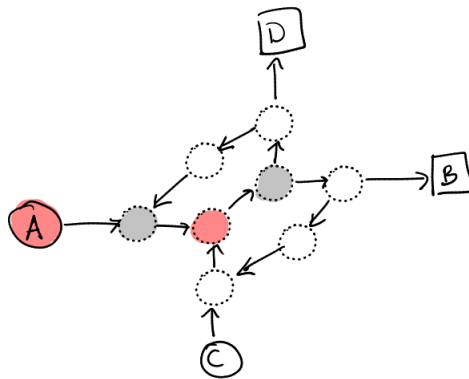
Dans ce premier gadget, on ajoute huit sommets (représentés en pointillés). Par construction de

tr₂, les seuls éventuels croisements du graphe G sont ceux entre les arcs de type $\boxed{p_j \in C_i} \longrightarrow \boxed{p_j = V}$ et les arcs de type $\boxed{p_j?} \longrightarrow \boxed{p_j = V}$, où $V \in \{\top, \perp\}$.

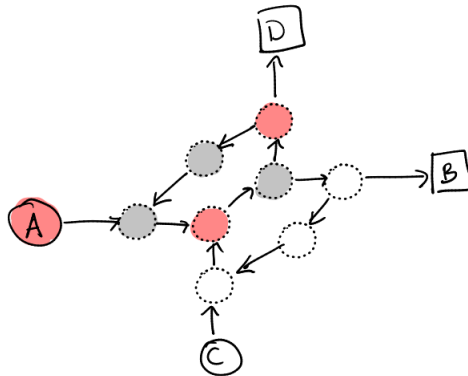
Pour chaque croisement, il n'y a que deux possibilités :

- soit un seul des arcs n'est susceptible d'être choisi au cours de la partie
- soit l'autre arc sera emprunté en dernier par le joueur gagnant

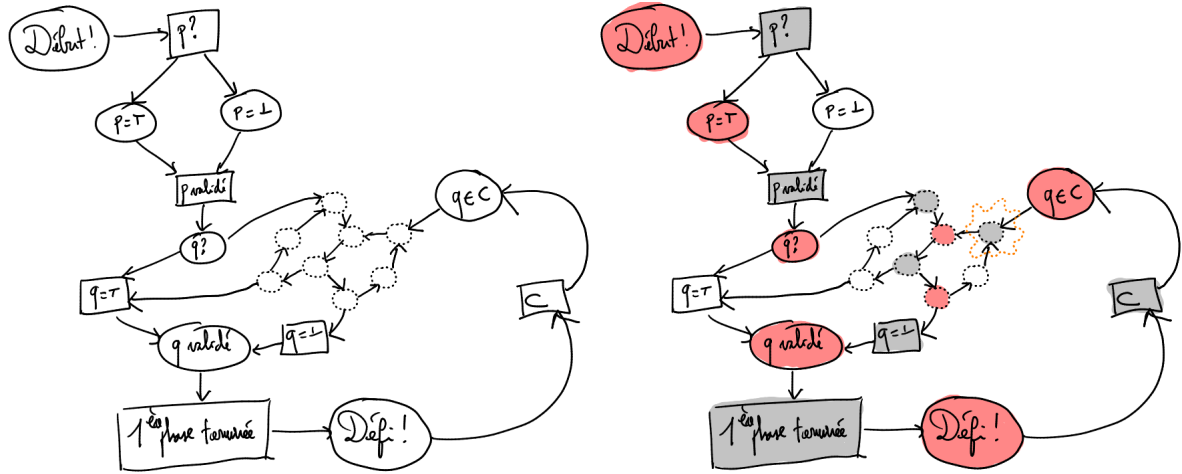
Ce gadget conserve ces propriétés. Supposons par exemple que le sommet courant est A . Trois tours plus tard, le jeu est nécessairement dans la situation suivante :



Si le joueur 1 décide de jouer le coup qui aurait été impossible sur le graphe G , alors le joueur 2 gagne au coup suivant :



Le seul coup valable pour le joueur 1 est de jouer le sommet qui permet de se rapprocher du sommet B :

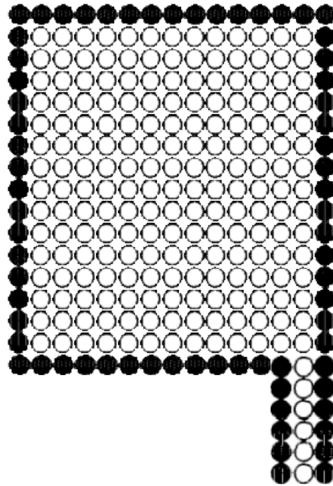


On note que le joueur 1 ne perd pas “au même” endroit que dans le graphe $tr_2 \circ tr_1(\exists p, \forall q, p \vee q)$, mais perd tout de même.

IV Réduction de GÉOGRAPHIEPLANAIRE à GOGÉNÉRALISÉ

On décrit la réduction tr_4 , constituée de gadgets qui permettent de traduire de façon presque immédiate une instance de GÉOGRAPHIEPLANAIRE en instance de GOGÉNÉRALISÉ.

La configuration de GOGÉNÉRALISÉ comportera toujours un “réservoir” de pions blancs entourés par des pions noirs. Le nombre de pions blancs sera supérieur à la moitié de la superficie du plateau de Go, de sorte si ces pions blancs deviennent imprenables, par exemple en étant connectés à des “yeux”, alors la victoire est pour les blancs. De même, la capture de ces pions blancs entraîne automatiquement la victoire des noirs.

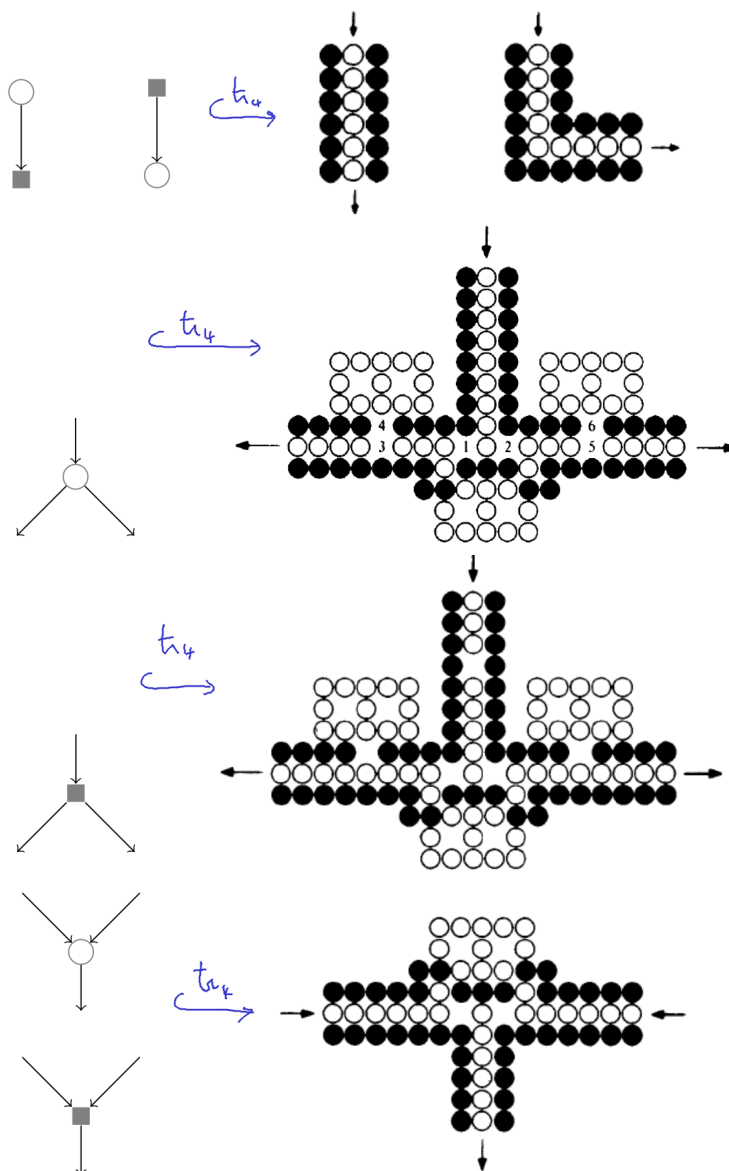


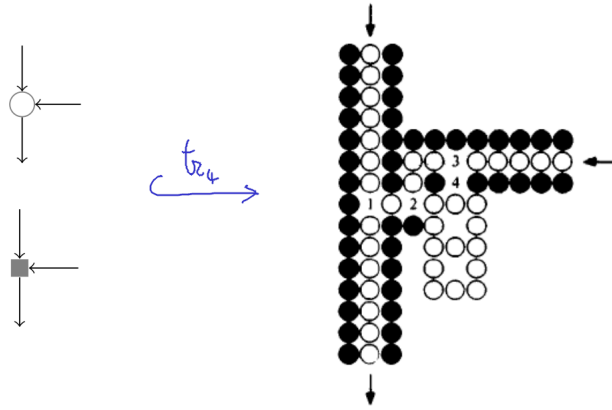
Gadget correspondant au réservoir

L'issue de la partie repose donc uniquement sur le destin des pions blancs du réservoir et le

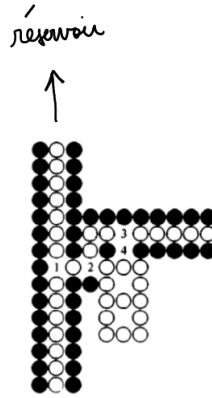
succès de l'entreprise des blancs qui consiste à les connecter à des yeux.

Les gadgets sont les suivants :





Expliquons l'un des choix. Chaque gadget est conçu pour qu'il n'existe qu'un seul coup valable à chaque étape. Par exemple, dans le gadget suivant :



si les blancs ne jouent pas en 1, les noirs y jouent et gagnent. Les blancs doivent donc jouer en 1 si leur stratégie est gagnante. Puis si les noirs ne jouent pas en 2, les blancs connectent le réservoir à une paire d'yeux et gagnent.

Le raisonnement est le même si le réservoir avait été connecté à droite, avec les coups 3 et 4.

Il existe donc une stratégie gagnante pour les blancs dans $\text{tr}_4(G)$ si et seulement si le joueur 1 dispose d'une stratégie gagnante dans G .

Ainsi, les réductions tr_1 à tr_4 se calculent en temps polynomial, donc $\text{tr} = \text{tr}_4 \circ \text{tr}_3 \circ \text{tr}_2 \circ \text{tr}_1$ se calcule également en temps polynomial¹. On a bien

$$\psi \text{ est vraie} \iff \text{tr}(\psi) \text{ est une instance positive de GOGÉNÉRALISÉ}$$

Comme TQBF est PSPACE-complet, le problème GOGÉNÉRALISÉ est PSPACE-difficile.

La page suivante donne une représentation de $\text{tr}(\exists p \forall q, p \vee q)$.

1. Les réductions se calculent plus précisément en temps linéaire. Il en est donc de même pour tr .

