

# Paire génératrice de sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$

Antoine DEQUAY

21 septembre 2022

## Notes

- Prof : .
- Leçons : 101, 104, 105, 108, 190.
- Références :
  - *131 DVP*, LESESVRE.

**Théorème 1** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t_n$  la proportion de paires  $(x, y) \in \mathfrak{S}_n^2$  qui engendrent un sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_n$ . Alors :

$$t_n = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

*Preuve.*

**Lemme 2** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^{-1} k t_k$$

*Preuve.* On considère la décomposition

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$$

avec les  $A_i$  éventuellement vides. Soit  $(n_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n i n_i = n$ . Commençons par calculer le cardinal de

$$A = \left\{ (A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}, \llbracket 1, n \rrbracket = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \# \{A_j, \# A_j = i\} = n_i \right\}$$

Pour cela, on découpe  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en  $n$  blocs de taille croissante, de sorte qu'on ait exactement  $n_i$  blocs de taille  $i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

*A dire à l'oral en écrivant la formule :* Dénombrer  $A$  revient à dénombrer le nombre de façons de "remplir" ces blocs par les éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , c'est à dire dénombrer des permutations (d'où le  $n!$ ) de  $\mathfrak{S}_n$  qui stabilisent chaque bloc (d'où le  $\prod_{i=1}^n (i!)^{n_i}$ ) sans se soucier de leur ordre (d'où le

$\prod_{i=1}^n n_i!$ ), ce qui donne :

$$\#A = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{n_i} n_i!}$$

Calculons maintenant le cardinal de :

$$B = \{(x, y) \in \mathfrak{S}_n^2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (A_i \neq \emptyset \implies \exists z \in \langle x, y \rangle, \text{orb}(z) = A_i)\}$$

*A dire à l'oral en écrivant la formule :* Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on peut choisir librement les restrictions  $x|_{A_i}$  et  $y|_{A_i}$  au sein de leur orbite  $A_i$ .  $\langle x|_{A_i}, y|_{A_i} \rangle$  est bien un sous-groupe de

$\mathfrak{S}_{\#A_i}$  agissant transitivement sur  $A_i$ , d'où, avec la convention  $t_0 = 1$  :

$$\#B = \prod_{i=1}^n (\#A_i!)^2 t_{\#A_i} = \prod_{i=1}^n ((i!)^2 t_i)^{n_i}$$

On obtient donc, en énumérant l'ensemble des décompositions possibles de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , l'ensemble des paires de  $\mathfrak{S}_n^2$  via ce qui précède, d'où :

$$n!^2 = \sum_{\substack{(n_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{i=1}^n i n_i = n}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (i!)^{n_i} n_i!} \prod_{i=1}^n ((i!)^2 t_i)^{n_i} = n! \sum_{\substack{(n_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{i=1}^n i n_i = n}} \prod_{i=1}^n \frac{(i! t_i)^{n_i}}{n_i!}$$

On peut donc écrire l'égalité entre séries formelles :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n! X^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(n_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{i=1}^n i n_i = n}} \prod_{i=1}^n \frac{(i! t_i)^{n_i}}{n_i!} \right) X^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(n_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{i=1}^n i n_i = n}} \prod_{i=1}^n \frac{(i! t_i X^i)^{n_i}}{n_i!} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(i! t_i X^i)^j}{j!} = \prod_{i=1}^{+\infty} \exp(i! t_i X^i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} i! t_i X^i\right) \end{aligned}$$

Une dérivée formelle permet alors d'avoir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot n! X^{n-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot j! t_j X^{j-1} \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} i! t_i X^i\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot j! t_j X^{j-1} \sum_{k=1}^{+\infty} k! X^k$$

En particulier, l'égalité des coefficients d'ordre  $n-1$  donne bien :

$$n = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n i \cdot i! t_i (n-i)! = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^{-1} i t_i$$

□

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_n = n(1 - t_n)$  et  $c_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} i$ . On cherche donc à prouver que

$r_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ . Par le lemme, on a, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé :

$$\begin{aligned} r_n &= n - n t_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}^{-1} i t_i - n t_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} i t_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} r_i = c_n - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} r_i \end{aligned}$$

Comme les  $t_i$  sont des proportions,  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_i \leq 1$ , et donc  $0 \leq r_n \leq c_n$ . Étudions  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Par changement de variables et symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$c_n = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} i = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} (n-i) = n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} - c_n$$

Ainsi, pour  $n \geq 6$ , on peut écrire :

$$c_n = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} = 1 + \frac{2}{n-1} + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1}$$

On a, pour  $i \in \llbracket 3, n-3 \rrbracket$ ,  $\binom{n}{3} \leq \binom{n}{i}$ , d'où :

$$\frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-3} \binom{n}{i}^{-1} \leq \frac{n^2}{2} \binom{n}{3}^{-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$c_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc bornée, donc  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  aussi. Il existe donc  $M > 0$ , tel que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} r_i \leq M \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i}^{-1} = 2M \frac{c_n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$r_n = c_n - O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

□