

Partitions non-croisées et éléments c -triangles dans les groupes de COXETER

Mémoire de stage de Master 2
Institut Denis Poisson - Université de Tours

Jad ABOU YASSIN
Encadré par Thomas GOBET et Cédric LECOUCVEY

Avril - juin 2023

Résumé

Les groupes de COXETER apparaissent naturellement dans différentes branches des mathématiques, telles que la géométrie, la théorie des représentations, l'algèbre et la combinatoire. Leur étude fait donc intervenir de nombreux liens entre ces domaines. Ces derniers ont été introduits dans l'objectif de fournir une version abstraite des groupes de réflexions dans un espace euclidien, et cette abstraction généralise cette notion à des groupes de réflexions dans des espaces plus généraux. Lorsqu'on s'intéresse à des ensembles d'éléments apparaissant dans l'étude algébrique et d'autres apparaissant dans l'étude géométrique des groupes de COXETER, il est souhaitable, voire attendu, qu'il y ait un lien explicite entre les deux lorsque ceux-ci se trouvent être énumérés par les mêmes nombres. L'étude des éléments c -triangles intervient précisément dans ce but : donner un lien bijectif explicite entre des objets algébriques, les partitions non croisées, et des objets géométriques, les clusters. Ceux-ci sont énumérés par les nombres de COXETER-CATALAN, généralisant les fameux nombres de CATALAN. Ils interviennent également, et de manière indépendante, lorsqu'on s'intéresse à la lecture postfixe d'un arbre binaire de recherche.

Dans un premier temps, nous allons définir la notion de groupe de COXETER et mettre en avant les résultats fondamentaux sur ces objets. Ensuite, nous présenterons le problème puis introduirons la notion d'éléments c -triangles comme solution. Enfin, nous terminerons par une étude détaillée des éléments c -triangles dans une famille de groupes de COXETER particulière avant de présenter des pistes pour aborder ces questions sur une famille de type affine.

Table des matières

1	Groupes de COXETER	1
1.1	Définition et premières propriétés	1
1.1.1	Systèmes de Coxeter	1
1.1.2	Longueur et réflexions	3
1.2	Classification	4
1.2.1	Groupes de COXETER finis	4
1.2.2	Groupes de COXETER affines	5
1.3	Représentation et système de racines	6
1.3.1	Représentation géométrique d'un groupe de COXETER	6
1.3.2	Systèmes de racines	7
1.3.3	Lien entre racines et réflexions	9
1.3.4	Sous-groupes paraboliques	11
2	Partitions non-croisées et éléments c-triangles	12
2.1	Partitions non croisées combinatoires	13
2.1.1	Définition	13
2.1.2	Dénombrement	13
2.1.3	Structure de treillis	16
2.2	Partitions non croisées algébriques	19
2.3	Éléments c -triangles	21
2.3.1	Définition	21
2.3.2	Bijection de READING	23

3	Étude des éléments c-triangles dans le cas A_n	26
3.1	Une caractérisation des éléments c -triangles	26
3.2	Preuve de la caractérisation	28
3.2.1	Système de racines	28
3.2.2	Forme d'EULER	30
3.2.3	Sous-groupes paraboliques de rang 2 généralisés	32
3.2.4	Éléments c -alignés et conclusion	34
3.3	Lien avec les arbres binaires de recherche	35
3.3.1	Rappels sur les arbres	35
3.3.2	Relation sylvestre et algorithme SSA	36
4	Essai de généralisation dans le cas \widetilde{A}_{n-1}	38
4.1	Permutations affines	38
4.1.1	Écriture fenêtre	39
4.1.2	Transpositions affines	39
4.2	Système de racines	41
4.2.1	Matrice de CARTAN et l'élément δ	42
4.2.2	Système de racines de \widetilde{A}_{n-1}	42
4.2.3	Preuve du théorème sur le système de racines	43
4.3	Une tentative	46
4.3.1	À propos des inversions	47
4.3.2	Calcul de la forme d'EULER	48
4.3.3	Problèmes rencontrés	48

1 Groupes de COXETER

Nous allons présenter rapidement la notion de groupe de COXETER, objets centraux de ce mémoire. Nous renvoyons à [BB05] et [Hum90] pour les démonstrations des résultats admis dans cette partie ainsi que pour une étude plus approfondie des groupes de COXETER.

1.1 Définition et premières propriétés

1.1.1 Systèmes de Coxeter

Les groupes de COXETER sont une famille de groupes définis par générateurs et relations.

Définition 1 (Matrice de COXETER). Soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble fini de cardinal n et $(m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille d'entiers éventuellement infinis telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 1 \quad \text{et} \quad \forall 1 \leq i < j \leq n, m_{i,j} = m_{j,i} \geq 2$$

On appelle $(m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une *matrice de COXETER*.

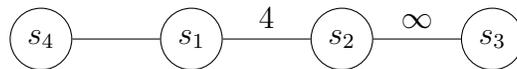
Remarque. On notera parfois $m(s, s') = m_{i,j}$ si $s = s_i$ et $s' = s_j$.

Il est également courant de se représenter les matrices de COXETER par des graphes, appelés *graphes de COXETER* ou *diagrammes de COXETER*. Il s'agit d'un graphe non-orienté complet à $|S|$ sommets, étiquetés par les éléments de S . Le poids de l'arête reliant s_i à s_j si $i \neq j$ est $m_{i,j}$. Afin de simplifier le diagramme, on ne représente pas les arêtes de poids 2, et on ne note pas le poids des arêtes de poids 3.

Exemple 2. On considère la matrice de COXETER

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & \infty & 2 \\ 2 & \infty & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors son graphe de COXETER est



Bien évidemment, un graphe de COXETER détermine de manière unique une matrice de COXETER et réciproquement, ainsi, la donnée au choix de l'un des deux suffit pour définir l'objet principal de cette partie : les groupes de COXETER. Généralement, les matrices de COXETER sont plus pratiques à utiliser dans les résultats théoriques tandis que les graphes de COXETER sont plus intuitifs dans la pratique.

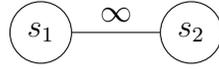
Définition 3 (Système de COXETER). Soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble fini de cardinal n et $A = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de COXETER associée. On définit le *groupe de COXETER* associé à S et A le groupe admettant la présentation suivante :

$$W = \langle S \mid \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} < +\infty \Rightarrow (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle$$

et on appelle le couple (W, S) un *système de COXETER*. De manière générale, un système de

COXETER est une paire (W, S) où W est un groupe et S un ensemble fini tel qu'il existe une matrice de COXETER telle que W admette la présentation ci-dessus.

Remarquons que tous les générateurs sont d'ordre au plus 2 dans W car $m_{i,i} = 1$ pour tout i . Pourtant, bien que S soit fini et que tous les générateurs sont d'ordre fini, il est possible que W soit infini. En effet, le groupe de COXETER associé au diagramme



admet la présentation

$$W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = 1 = s_2^2 \rangle$$

donc est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est infini (il s'agit du groupe diédral infini). L'étude des groupes de COXETER infinis est délicate et de nombreuses questions résolues dans le cas fini sont encore ouvertes dans les cas infinis.

Exemple 4 (Deux exemples fondamentaux). Parmi les groupes de COXETER, on retrouve les groupes symétriques et les groupes diédraux. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d'ordre n . On sait qu'il est engendré par les transpositions élémentaires

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad s_i = (i \ i+1)$$

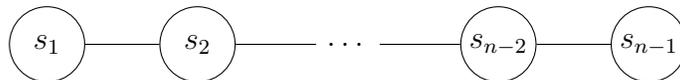
qui sont des éléments d'ordre 2. De plus, ceux-ci vérifient :

$$\begin{cases} s_i s_j = s_j s_i & \text{si } |i-j| > 1 & \text{(deux permutations à supports disjoints commutent)} \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{si } i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket & \text{(conjugaison de permutation)} \end{cases}$$

c'est-à-dire que $m_{i,j} = 2$ si $|i-j| > 1$ et $m(i, i+1) = 3$ si $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. En particulier, on a une surjection

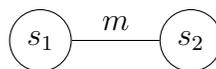
$$\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_n$$

donnée par $s_i \mapsto (i \ i+1)$. Il reste à montrer qu'il s'agit d'une bijection, nous verrons ceci plus tard lorsque nous donnerons une caractérisation des groupes de COXETER. Admettant ceci, on obtient alors que le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est le groupe de COXETER associé au diagramme



qu'on appelle de type A_{n-1} .¹

Dans le cas des groupes diédraux, le résultat est plus simple à obtenir. En effet, un groupe est diédral si et seulement si il est engendré par deux éléments distincts d'ordre 2, et l'ordre du groupe est alors le double l'ordre du produit de ces deux générateurs. En particulier, les groupes diédraux sont exactement les groupes de COXETER associés aux diagrammes



pour $m \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, qu'on appelle de type $I_2(m)$.

1. Nous reviendrons sur la classification des groupes de COXETER finis

1.1.2 Longueur et réflexions

Un outil important dans l'étude des groupes de COXETER est la notion de longueur d'un élément, donc la bonne définition est assurée par le fait que tous les éléments de S sont d'ordre fini dans W .

Définition 5 (Longueur). Soit $w \in W$. On note $l(w)$, qu'on appelle *longueur* de w , l'entier

$$l(w) = \min\{r \in \mathbb{N} ; \exists i_1, \dots, i_r \in \llbracket 1, n \rrbracket, w = s_{i_1} \dots s_{i_r}\}$$

Bien que la longueur d'un élément de w soit définie comme le nombre de « lettres » dans une plus courte écriture de w dans l'alphabet S , celle-ci peut ne pas être unique. On appelle *écriture réduite* de w toute écriture de w en produit de $l(w)$ générateurs.

Citons quelques résultats élémentaires mais très utiles sur la fonction longueur.

Lemme 6. Soient $w, w' \in W$ et $s \in S$. Alors

$$l(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1 \tag{1}$$

$$l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S \tag{2}$$

$$l(w) = l(w^{-1}) \tag{3}$$

$$l(w) - l(w') \leq l(ww') \leq l(w) + l(w') \tag{4}$$

$$l(ws) = l(w) \pm 1 \tag{5}$$

Dans le cas du groupe symétrique \mathfrak{S}_n (en considérant les transpositions élémentaires comme partie génératrice), la longueur d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est donc le nombre minimal de transpositions élémentaires dont le produit est égal à σ .

Terminons cette brève introduction aux groupes de COXETER en définissant les *réflexions* de W , qui sont des conjugués de générateurs :

$$T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$$

Ces éléments sont d'une importance capitale dans l'étude des groupes de COXETER. Par exemple, dans le cas du groupe symétrique d'ordre n (groupe de COXETER de type A_{n-1}), les générateurs sont les transpositions élémentaires $(i \ i+1)$ et les réflexions sont les transpositions $(i \ j)$.

Comme $S \subset T$, les réflexions engendrent W . On peut donc également considérer la longueur d'un élément de W écrit comme produit d'éléments de T

Définition 7 (Longueur de réflexion). Soit $w \in W$. On note $l_T(w)$, qu'on appelle *longueur de réflexion* de w , l'entier

$$l_T(w) = \min\{r \in \mathbb{N} ; \exists t_1, \dots, t_r \in T, w = t_1 \dots t_r\}$$

On a pour tout $w \in W$, $l_T(w) \leq l(w)$

Lemme 8. Soit $w, x \in W$. Alors $l_T(xwx^{-1}) = l_T(w)$

Démonstration. Soient $t_1, \dots, t_r \in T$ tels que $t_1 \dots t_r = w$ et $r = l_T(w)$. Alors

$$xwx^{-1} = xt_1x^{-1}, xt_2x^{-1}, \dots, xt_rx^{-1}$$

est un produit de r réflexions (car T est stable par conjugaison). Donc $l_T(xwx^{-1}) \leq l_T(w)$. Le sens réciproque est clair en l'appliquant avec $w = xwx^{-1}$ et $x = x^{-1}$ \square

Enfin, définissons la notion d'*élément de COXETER*. Il s'agit simplement d'un produit de tous les éléments de S où chaque générateur n'apparaît qu'une et une seule fois. Ces éléments jouent un rôle particulier dans l'étude des groupes de COXETER et sont souvent notés c . Il s'agit en effet du même c que dans le titre du mémoire « éléments c -triables ».

1.2 Classification

1.2.1 Groupes de COXETER finis

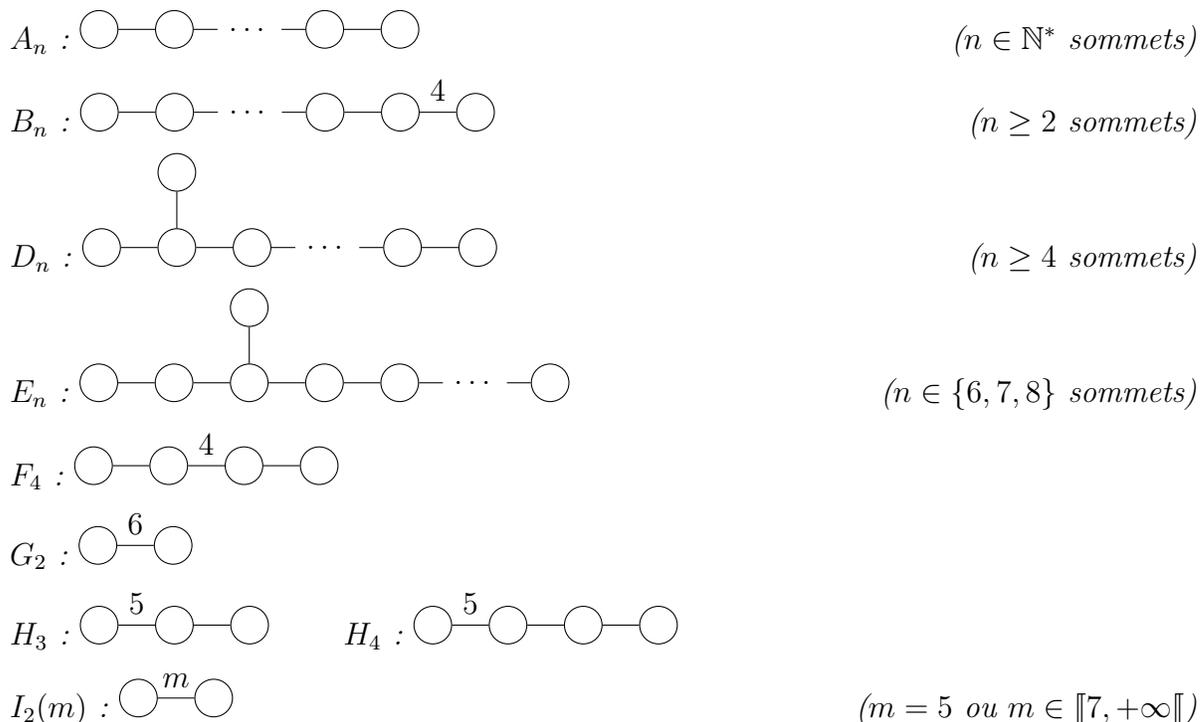
Il est naturel de se demander quels sont tous les groupes de COXETER. La réponse à cette question est en réalité très difficile, mais des classifications partielles existent. On peut commencer par se demander s'il existe une classification des groupes de COXETER finis, et c'est bien le cas. Tout d'abord, un produit direct de groupes de COXETER étant encore un groupe de COXETER, on se restreint au cas des groupes de COXETER irréductibles.

Définition 9 (Groupes de COXETER irréductibles). Soit Γ un graphe de COXETER et W le groupe de COXETER associé. On dit que W est *irréductible* si Γ est connexe.

Le résultat de classification des groupes de COXETER finis et irréductibles s'énonce comme suit et fut démontré par H. S. M. COXETER en 1935

Théorème 10 (Classification des groupes de COXETER irréductibles finis [Cox35]).

Soit Γ un graphe de COXETER et W le groupe de COXETER associé à Γ . Alors W est fini et irréductible si et seulement si Γ appartient à l'une des familles suivante :



La démonstration de ce théorème repose notamment sur l'étude des représentations linéaires des groupes de COXETER et en particulier l'étude de leurs systèmes de racines, que nous verrons dans la sous-section suivante. Cette classification permet en particulier de démontrer des résultats généraux au « cas par cas » dans le cas où on n'a pas de démonstrations homogènes.

1.2.2 Groupes de COXETER affines

Dans le cas infini, les choses se compliquent. Par exemple, déterminer dans quels cas deux groupes de COXETER sont isomorphes en tant que groupes abstraits est une question à laquelle il est difficile de répondre dans le cas général. Cependant, certaines familles de groupes de COXETER infinis peuvent être exhibées, comme par exemple les groupes de COXETER affines.

Définition 11 (Groupe de COXETER affine). Soit W un groupe de COXETER. On dit qu'il est *affine* s'il est virtuellement abélien, c'est-à-dire s'il existe un sous-groupe d'indice fini de W qui soit abélien.

Exemple 12 (Permutations périodiques). Un exemple de groupe de COXETER affine important, sur lequel nous reviendrons plus en détail lors de l'étude du groupe \widehat{A}_{n-1} dans la partie 4 est celui des permutations périodiques, qu'on appelle également permutations affines. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ constitué des permutations n -périodiques, c'est-à-dire les permutations $w \in \mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad w(x+n) = w(x) + n$$

avec de plus la condition

$$\sum_{x=1}^n w(x) = \sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$$

On note $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ l'ensemble des permutations n -périodiques de \mathbb{Z} , et il est clair qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$. De plus, il n'est pas difficile de voir que

$$\widehat{\mathfrak{S}}_n \simeq \mathfrak{S}_n \rtimes \Lambda$$

où Λ est le sous-groupe additif des n -uplets de \mathbb{Z} dont la somme des coordonnées est nulle, en considérant l'action $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \Lambda$ par permutation des coordonnées. En particulier, $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ est virtuellement abélien.

On peut également démontrer qu'il s'agit d'un groupe de COXETER, de générateurs les transpositions élémentaires pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$s_i : \begin{array}{lll} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ i+np & \mapsto & i+1+np \quad p \in \mathbb{Z} \\ i+1+np & \mapsto & i+np \quad p \in \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & k \quad k \neq i, i+1[n] \end{array}$$

ainsi que de la transposition

$$s_0 : \begin{array}{lll} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ 1+np & \mapsto & n+(n-1)p \quad p \in \mathbb{Z} \\ n+np & \mapsto & 1+(n+1)p \quad p \in \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & k \quad k \neq 0, 1[n] \end{array}$$

d'une manière similaire au cas de \mathfrak{S}_n [BB05]. Ceci fait de $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ un groupe de COXETER affine, et on l'appelle souvent *groupe de permutations affines*.

Nous renvoyons vers [Bou07] pour une classification des groupes de COXETER affines. Celle-ci est très similaire à celle des groupes de COXETER finis car ces groupes affines peuvent être construits à partir des groupes finis, par l'ajout d'un générateur. Citons simplement un seul cas, le cas de type \widetilde{A}_{n-1} , qui sera central dans la suite de ce mémoire.

Définition 13 (Groupe de COXETER de type \widetilde{A}_{n-1}). Un groupe de COXETER est dit de type \widetilde{A}_{n-1} si son graphe de COXETER admet n sommets et est de la forme

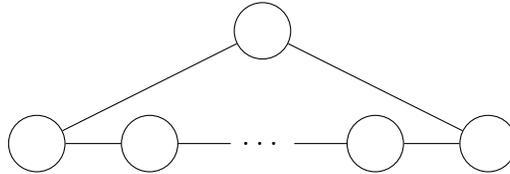


FIGURE 1 – Graphe de COXETER de type \widetilde{A}_{n-1}

Proposition 14. Soit W un groupe de COXETER de type \widetilde{A}_{n-1} . Alors W est isomorphe à $\widehat{\mathfrak{S}}_n$.

1.3 Représentation et système de racines

Un outil crucial à l'étude des groupes de COXETER est un « système de racines ». Il s'agit d'une donnée géométrique, obtenue à partir d'une certaine représentation linéaire du groupe de COXETER choisi, encodant les propriétés de ce groupe. Dans la suite de cette sous-partie, on se fixe $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble fini et (W, S) un système de COXETER.

1.3.1 Représentation géométrique d'un groupe de COXETER

Présentons rapidement une petite motivation pour l'introduction d'une telle notion. Dans un espace euclidien E , il est naturel de s'intéresser aux isométries vectorielles de E , parmi lesquelles les réflexions orthogonales constituent une famille importante. En se donnant un nombre fini de réflexions orthogonales $\{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_n}\}$, on peut alors se demander quelle sera la nature et la structure du sous-groupe de $O(E)$ engendré par ces réflexions (par exemple, quelle est la structure du groupe engendré par l'ensemble des symétries d'un polygone régulier du plan?). Il s'agit en fait toujours d'un groupe de COXETER². Cependant, tous les groupes de COXETER ne sont pas des groupes de réflexions orthogonales d'un espace euclidien. Il est alors nécessaire d'alléger un peu certaines contraintes géométriques : nous allons obtenir des représentations géométriques de W en tant que groupe de réflexion d'un espace vectoriel de dimension finie munie d'une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive.

Définition 15. Soit V un espace vectoriel réel de dimension n . On fixe une base de V qu'on

2. Ceci n'est pas une coïncidence, les groupes de COXETER ont été introduits précisément dans ce but

note $\{\alpha_s ; s \in S\}$. On définit une forme bilinéaire symétrique sur V de la manière suivante :

$$\langle \alpha_s, \alpha_{s'} \rangle = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right) & \text{si } m(s, s') < +\infty \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons qu'aucun vecteur de la base $\{\alpha_s ; s \in S\}$ n'est isotrope, car $m(s, s) = 1$ pour tout $s \in S$. En particulier, $\{\alpha_s\}^\perp = \ker(\langle \alpha_s, \cdot \rangle)$ est de dimension $n - 1$ et en somme directe avec $\mathbb{R}\alpha_s$. Ceci justifie alors la définition suivante :

Définition 16. Pour tout $s \in S$, on définit la réflexion associée à s par :

$$\begin{aligned} \sigma_s : V &\rightarrow V \\ \beta &\mapsto \beta - 2\langle \alpha_s, \beta \rangle \alpha_s \end{aligned}$$

Ce sont des éléments de $GL(V)$ d'ordre 2 qui préservent la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On s'intéresse alors au sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les réflexions σ_s pour tout $s \in S$. Tous les éléments de ce groupe préservent la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ car c'est le cas des générateurs.

Théorème 17 (Représentation linéaire de W).

L'application $\sigma : s \in S \mapsto \sigma_s \in GL(V)$ s'étend de manière unique en un isomorphisme de groupes $\sigma : W \rightarrow \sigma(W) = \langle \sigma_s ; s \in S \rangle$, et $\sigma(W)$ préserve la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La démonstration de ce résultat est faite dans [Hum90]. On appelle alors σ une *représentation géométrique* de W . Ce théorème admet des conséquences intéressantes, comme par exemple le fait que dans W , les générateurs sont tous d'ordre exactement 2 (et non pas « au plus 2 »), ou bien que deux générateurs s et s' distincts dans S définissent des éléments distincts dans W (il aurait été possible que les relations de COXETER soient « trop contraignantes » et aboutissent à $s = s'$ dans W). Le fait de devoir passer par la représentation géométrique de W pour démontrer des propriétés algébriques en apparence élémentaires motive l'étude de $\sigma(W)$.

Remarque. On notera dans tout ce qui suit $w(\alpha)$ au lieu de $\sigma(w)(\alpha)$ pour tout $w \in W$ et $\alpha \in V$.

1.3.2 Systèmes de racines

Définition 18 (Système de racines). On pose

$$\Phi = \{w(\alpha_s) ; w \in W, s \in S\}$$

qu'on appelle *système de racines* de W . Il s'agit d'un sous-ensemble de V constitué de vecteurs unitaires appelés *racines*, vérifiant $-\Phi = \Phi$ et stable par tous les éléments de w .

On dit qu'une racine $\alpha \in \Phi$ est *positive* si toutes ses coordonnées dans la base $(\alpha_s)_{s \in S}$ sont positives, et *négative* si elles sont toutes négatives. On note Φ^+ (resp. Φ^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) de W .

Les racines $\{\alpha_s ; s \in S\}$ sont appelées les *racines simples*.

Le résultat suivant est crucial dans l'étude géométrique des groupes de COXETER car il donne un lien entre la fonction longueur et l'action de W sur le système de racines Φ

Proposition 19. Soit $w \in W$ et $s \in S$. On a l'alternative suivante

- Si $l(ws) > l(w)$, alors $w(\alpha_s) \in \Phi^+$
- Si $l(ws) < l(w)$, alors $w(\alpha_s) \in \Phi^-$

Le second point découle du premier en l'appliquant à ws au lieu de w , puis en utilisant le fait que $s(\alpha_s) = -\alpha_s$. Le premier point se démontre par récurrence sur $l(w)$ et est fait dans [Hum90]. Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'une racine est toujours soit positive, soit négative :

Corollaire 20.

$$\Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$$

La fonction longueur s'interprète alors géométriquement en fonction du signe des racines sous l'action des éléments de W .

Proposition 21. Soit $w \in W$ et $s \in S$. Alors

- Sous l'action de s , la racine positive α_s est envoyée vers $-\alpha_s$ et les autres racines positives sont permutées.
- La longueur de w est égale au nombre de racines positives envoyées par w sur des racines négatives :

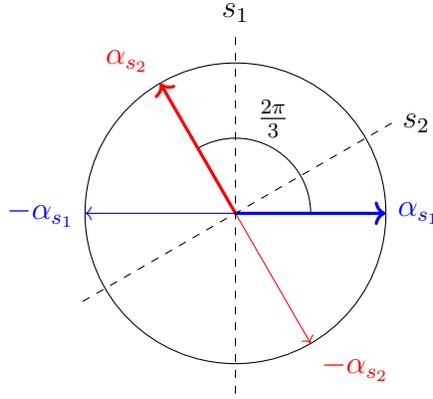
$$l(w) = |\{\alpha \in \Phi^+ ; w(\alpha) \in \Phi^-\}|$$

Exemple 22 (Cas de A_n). Étudions le système de racines de type A_n . On considère alors un espace vectoriel de dimension finie V engendré par $(\alpha_s)_{s \in S}$ où $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et une forme bilinéaire symétrique définie par

$$\langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_j} \rangle = \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \text{si } |i - j| > 1 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} & \text{si } |i - j| = 1 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{1}\right) = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

ainsi, les racines α_{s_i} et α_{s_j} sont orthogonales si $|i - j| > 1$ et forment un angle de $2\pi/3$ sinon. Les autres racines sont alors données par $w(\alpha_{s_i})$ avec $w \in W$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, où l'action de w sur une racine se fait par application de réflexions successives selon l'écriture réduite de w choisie. Cela peut vite devenir très long, car $|W| = n!$. Traitons le cas de A_2 pour l'instant, puis nous viendrons sur une autre réalisation des racines positives permettant un calcul des systèmes de racines beaucoup plus efficace (dans le cas d'un groupe de COXETER général).

On se place donc dans \mathfrak{S}_3 , de générateurs canoniques $s_1 = (1\ 2)$ et $s_2 = (2\ 3)$. Pour l'instant, nous avons ceci :



où les racines positives sont marquées en trait épais, et les axes de symétrie des réflexions données par s_1 et s_2 sont en pointillés. Énumérons les éléments de \mathfrak{S}_3 dans une écriture réduite :

$$\mathfrak{S}_3 = \{\text{id}, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, s_1s_2s_1\}.$$

Les autres racines s'obtiennent donc en appliquant chaque élément de \mathfrak{S}_3 aux α_{s_i} . En faisant ceci, on remarque que seules deux racines se trouvent rajoutées par rapport à celles qu'on avait déjà : $s_1(\alpha_{s_2}) = s_2(\alpha_{s_1})$, et son opposé. Finalement, le système de racines de type A_2 est :

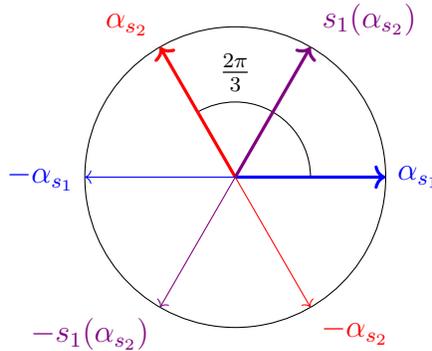


FIGURE 2 – Système de racines de type A_2

1.3.3 Lien entre racines et réflexions

Comme vu dans l'exemple précédent, il est très coûteux de calculer $\Phi = \{w(\alpha_s) ; w \in W, s \in S\}$ de manière générale. Nous allons établir un lien direct entre les réflexions et les racines de W permettant de simplifier ces calculs. [Hum90]

Théorème 23. *L'application*

$$s : \begin{array}{ccc} \Phi^+ & \rightarrow & T \\ \alpha = w(\alpha_s) & \mapsto & s_\alpha = wsw^{-1} \end{array}$$

est bien définie et bijective

Démonstration. Soit $t \in T$, c'est-à-dire un conjugué d'un générateur qu'on note $t = wsw^{-1}$. On considère la racine $\alpha = w(\alpha_s)$. On a alors

$$\forall \beta \in \Phi, wsw^{-1}(\beta) = \beta - 2\langle w^{-1}(\beta), \alpha_s \rangle w(\alpha_s) = \beta - 2\langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

car w préserve la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En particulier, $t = wsw^{-1}$ ne dépend que de α , donc l'application s est bien définie.

Elle est surjective car si $wsw^{-1} \in T$ vérifie $w(\alpha_s) \in \Phi^-$, alors $ws(\alpha_s) \in \Phi^+$ et $(ws)s(ws)^{-1} = wsw^{-1} = t$. Donc t est l'image de $ws(\alpha_s)$ par s . Elle est injective car si $\alpha, \beta \in \Phi^+$ sont tels que $s_\alpha = s_\beta$, alors

$$-\beta = s_\beta(\beta) = s_\alpha(\beta) = \beta - 2\langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

donc

$$\beta = \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

Comme β et α sont des racines positives et sont colinéaires, alors elles sont égales car $\Phi = -\Phi$ et les racines sont unitaires. D'où l'injectivité. \square

On notera alors β_t l'antécédent de t par s . En particulier, si $s \in S$, alors $\beta_s = \alpha_s$. Ce changement de lettre permet de garder la distinction entre les racines simples et les autres racines positives.

Corollaire 24. *Soient $w \in W$ et $t \in T$, alors $w(\beta_t) = \pm \beta_{wtw^{-1}}$*

Le théorème 23 permet alors de construire l'ensemble des racines positives (donc l'ensemble des racines en rajoutant les racines opposées) uniquement par la donnée des réflexions. On a également une généralisation de la proposition 19.

Proposition 25. *Soit $w \in W$ et $\alpha \in \Phi^+$. Alors $l(ws_\alpha) < l(w)$ si et seulement si $w(\alpha) < 0$*

En combinant la proposition 25 et la proposition 21, on obtient un premier lien intéressant entre les réflexions et la longueur d'un mot

Corollaire 26. *Soit $w \in W$. Alors*

$$l(w) = |\{t \in T ; l(wt) < l(w)\}| = |\{t \in T ; l(tw) < l(w)\}|.$$

On appelle *ensemble d'inversion à droite* (resp. à gauche) de w les ensembles $inv_R(w)$ (resp. $inv_L(w)$) définis par

$$inv_R(w) = \{t \in T ; l(wt) < l(w)\} \quad \text{et} \quad inv_L(w) = \{t \in T ; l(tw) < l(w)\}$$

En particulier, le signe de $w(\beta_t)$ du corollaire 24 est donné par si s_α est une inversion à droite de w ou non.

Ce qui précède montre qu'il s'agit d'ensembles de même cardinal, égal à $l(w)$.

Corollaire 27. *Pour toute écriture réduite $w = s_1 \dots s_r$ de w , on a*

$$\begin{aligned} inv_L(w) &= \{s_1, s_1s_2s_1, \dots, s_1s_2 \dots s_{r-1}s_r s_{r-1} \dots s_2s_1\} \\ inv_R(w) &= \{s_r, s_r s_{r-1} s_r, \dots, s_r s_{r-1} \dots s_2s_1s_2 \dots s_{r-1}s_r\} \end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons-le pour $inv_L(w)$, l'argument est identique pour $inv_R(w)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note

$$t_i = s_1s_2 \dots s_{i-1}s_i s_{i-1} \dots s_2s_1.$$

Montrons que $inv_L(w) = \{t_1, \dots, t_r\}$. Tout d'abord, les t_i sont tous distincts car si $i < j$ et $t_i = t_j$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} t_i = t_j &\Leftrightarrow s_1 \dots s_i \dots s_1 = s_1 \dots s_j \dots s_1 \\ &\Leftrightarrow s_i = s_{i+1} \dots s_j \dots s_{i+1} \\ &\Leftrightarrow s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j \end{aligned}$$

et ceci n'est pas possible car $w = s_1 \dots s_r$ est une écriture réduite de w , si on avait l'égalité

$$s_i s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j$$

alors on aurait

$$w = s_1 \dots s_{i-1} s_i \dots s_{j-1} s_j \dots s_r = s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{j-1} s_j s_j \dots s_r = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_r$$

où la notation « chapeau » signifie que les lettres marquées sont retirées. En particulier, il s'agit d'un mot de longueur au plus $r - 2$, ce qui contredit que la longueur de w est égale à r .

Ainsi, tous les éléments t_i sont distincts, et il y en a exactement r . Par égalité des cardinaux, il suffit alors de montrer que tous les t_i sont des inversions à gauche de w :

$$t_i w = \underbrace{s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1}_{t_i} \underbrace{s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_i s_{i+1} \dots s_r}_w = s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_r$$

donc $t_i w$ est un mot contenant $r - 1$ lettres, donc est de longueur au plus $r - 1$. Ainsi, $l(t_i w) < l(w)$ donc t_i est bien une inversion à gauche de w . \square

Les ensembles d'inversions vont jouer un rôle important lorsque nous parlerons d'éléments c -triangles dans la partie 2.3.2 et lorsque nous nous intéresserons plus précisément aux cas de A_n et \widehat{A}_{n-1} dans les parties 3 et 4.

1.3.4 Sous-groupes paraboliques

On s'intéresse maintenant aux sous-groupes d'un groupe de COXETER, et en particulier aux sous-groupes engendrés par une sous-partie de S .

Définition 28 (Sous-groupe parabolique). Soit (W, S) un système de COXETER et $I \subset S$. On note W_I le sous-groupe de W engendré par I . On dit qu'un sous-groupe W' de W est parabolique s'il est conjugué à un sous-groupe de la forme W_I pour $I \subset S$.

Remarque. Bien souvent, on note $W_{\langle s \rangle}$ pour désigner le sous-groupe parabolique $W_{S \setminus \{s\}}$

Le résultat principal sur les sous-groupes paraboliques est que ce sont toujours des groupes de COXETER [Hum90].

Théorème 29. Soit (W, S) un système de COXETER.

1. Soit $I \subset S$. Alors (W_I, I) est un système de COXETER. De manière générale, un sous-groupe parabolique est un groupe de COXETER.
2. Soit $w = s_1 \dots s_n$ une expression réduite de $w \in W$. Si $w \in W_I$, alors tous les $s_i \in I$ et c'est une expression réduite de w dans (W_I, I) . En particulier, les fonctions longueur l et l_I coïncident.

3. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(S) & \longrightarrow & \{W_I ; I \subset S\} \\ I & \longmapsto & W_I \end{array}$$

de l'ensemble des parties de S vers les sous-groupes de la forme W_I de W est un isomorphisme de treillis pour l'inclusion.

Démonstration. On démontre seulement le premier point. On note \overline{W}_I le groupe de COXETER de générateurs I et de matrice de COXETER la restriction à $I \times I$ de celle de (W, S) . On dispose d'une application $\overline{W}_I \rightarrow W_I$ naturelle qu'on définit sur les générateurs, et qui est bien définie car les relations entre les éléments de I à la source et au but sont les mêmes, ceci montrant au passage qu'elle est surjective. Il suffit de montrer alors que cette application est injective pour conclure. Les parties précédentes montrent que \overline{W}_I admet une représentation géométrique dans un espace $\overline{V}_I = \text{Vect}(\overline{\alpha}_s ; s \in I)$ muni de la forme bilinéaire symétrique définie en 15 (en remplaçant S par I et en ajoutant des barres au dessus des α_s). De même, W admet une représentation géométrique dans un espace $V = \text{Vect}(\alpha_s ; s \in S)$ muni de la forme bilinéaire symétrique de 15. Puisque la matrice de COXETER de (\overline{W}_I, I) est la restriction de celle de (W, S) , on peut identifier \overline{V}_I au sous-espace de V noté V_I engendré par les $(\alpha_s)_{s \in I}$, et les deux formes bilinéaires coïncident. On a donc une injection

$$\overline{W}_I \hookrightarrow GL(\overline{V}_I) \simeq GL(V_I)$$

Or, W_I est un sous-groupe de W donc son image par la représentation géométrique de W appartient à $GL(V_I)$ par définition. Comme $W_I \hookrightarrow GL(V)$ est injective, sa corestriction à $GL(V_I)$ l'est également. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{W}_I & \xrightarrow{\quad} & GL(V_I) \\ & \searrow & \nearrow \\ & W_I & \end{array}$$

donc l'application $\overline{W}_I \rightarrow W_I$ est bien injective. Donc W_I est un groupe de COXETER. \square

En corollaire, on a même le résultat suivant, qui n'est pas du tout évident du point de vue algébrique :

Proposition 30. *Soit (W, S) un système de COXETER. Alors S est un système de générateur minimal en tant que groupe de COXETER. Autrement-dit, pour tout $I \subset S$, si $W_I = W$ alors $I = S$.*

Ceci justifie en particulier la notion de *rang* d'un groupe de COXETER, qui est le cardinal de n'importe quel système de générateur S faisant de (W, S) un système de COXETER. Par exemple, on sait que tous les groupes symétriques sont engendrés par deux éléments : $(1\ 2)$ et le n -cycle $(1, 2, \dots, n)$. Cependant, ce système de générateur ne fait pas de \mathfrak{S}_n un groupe de COXETER.

Les sous-groupes paraboliques sont un outil important de la théorie des groupes de COXETER car ils permettent bien souvent de faire des récurrences en diminuant progressivement le nombre de générateurs, en particulier grâce au second point du théorème 29.

2 Partitions non-croisées et éléments c -triables

On s'intéresse maintenant à un objet combinatoire particulier qu'on retrouve dans les groupes de COXETER.

2.1 Partitions non croisées combinatoires

2.1.1 Définition

On commence par introduire un objet plus élémentaire que les partitions non croisées (généralisées). On se place dans l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on considère les partitions de cet ensemble qui n'intersectent pas lorsqu'on considère les enveloppes convexes des points de chaque partie lorsque l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est représenté dans un cercle.

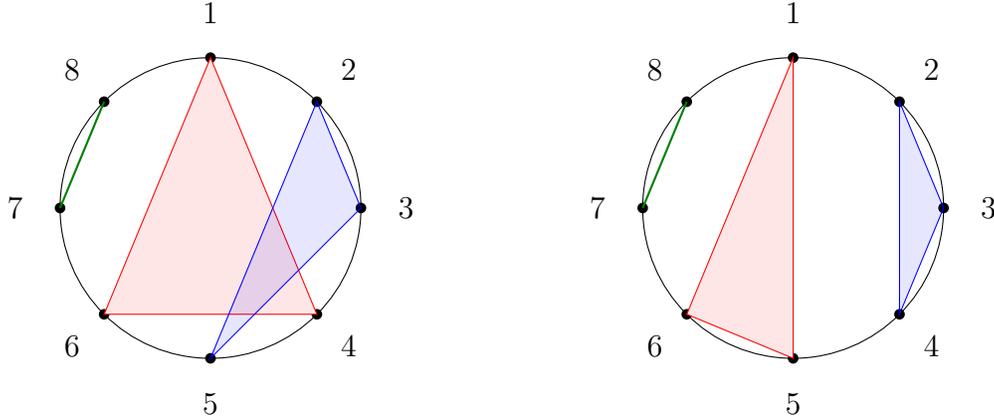


FIGURE 3 – Une partition croisée et une partition non croisée de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$

Dans cette figure, on voit que la partition

$$\{\{1, 4, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{7, 8\}\}$$

est croisée, tandis que la partition

$$\{\{1, 5, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}\}$$

est non croisée.

Définition 31 (Partition non croisée combinatoire). Soit $\{P_1, \dots, P_r\} \subset \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On dit qu'elle est *non croisée* s'il n'existe pas de quadruplet

$$i < j < k < l \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

et des entiers $p \neq q \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tels que $i, k \in P_p$ et $j, l \in P_q$.

Dans l'exemple précédent, la première partition est croisée car $3 < 4 < 5 < 6$ où 3 et 5 appartiennent à une même partie, et 4 et 6 à une même autre partie.

2.1.2 Dénombrement

Puisque l'ensemble des partitions d'un ensemble fini est lui-même fini (de cardinal le n -ième nombre de BELL pour un ensemble de cardinal n), l'ensemble des partitions non-croisées combinatoires de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est lui aussi fini. On peut donc s'intéresser au nombre de telles partitions.

Théorème 32. *Le nombre de partitions non croisées de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est égal au n -ième nombre de CATALAN*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le nombre de partitions non croisées de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On démontre ce résultat par récurrence en utilisant la relation de récurrence bien connue des nombres de CATALAN

$$C_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

Pour $n = 0$, il n'y a qu'une seule partition de l'ensemble vide, et celle-ci est non-croisée, donc $P_0 = 1$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et on suppose le résultat vrai pour tout $k < n + 1$. On cherche à démontrer que

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^n P_k P_{n-k}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, dénombrons le nombre de partitions non croisées de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ telles que $k+1$ soit le minimum de la partie contenant $n+1$. Soit P une autre partie, alors soit tous les éléments de P sont strictement inférieurs à $k+1$, soit ils sont tous compris strictement entre $k+1$ et $n+1$. En particulier, l'intervalle $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ est séparé en deux intervalles $\llbracket 1, k \rrbracket$ et $\llbracket k+1, n+1 \rrbracket$ tels que chaque partie de la partition non croisée considérée soit contenue dans l'un ou l'autre. Les parties étant contenues dans le premier intervalle forment une partition non croisée de celui-ci et il n'y a aucune contrainte particulière. Les autres forment une partition non croisées de $\llbracket k+1, n+1 \rrbracket$ telle que $k+1$ et $n+1$ soient dans la même partie (et il s'agit de la seule contrainte).

Réciproquement, l'union d'une partition non croisée de $\llbracket 1, k \rrbracket$ et d'une partition non croisée de $\llbracket k+1, n+1 \rrbracket$ telle que $k+1$ et $n+1$ appartiennent à une même partie est une partition non croisée de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ telle que $k+1$ soit le plus petit élément de la partie contenant $n+1$. Il reste alors à dénombrer le nombre de partitions non croisées de $\llbracket k+1, n+1 \rrbracket$ telles que $k+1$ et $n+1$ soient dans la même partie. C'est en fait égal au nombre de partitions non croisées de $\llbracket k+1, n \rrbracket$ car en retirant $n+1$ de la partie la contenant, la partition reste non croisée, et réciproquement en rajoutant $n+1$ à la partition contenant $k+1$ on ne peut pas introduire de croisement $i < j < k < n+1$ avec j et $n+1$ dans une même partie et i et k dans une même autre partie car sinon on aurait le croisement $k+1 < i < j < k$.

Finalement, une partition non croisée de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dont le minimum de la partie contenant $n+1$ est $k+1$ est entièrement déterminée par une partition non croisée de $\llbracket 1, k \rrbracket$, il y en a P_k par hypothèse de récurrence, et par une partition non croisée de $\llbracket k+1, n \rrbracket$, il y en a P_{n-k} par hypothèse de récurrence. Ainsi, le nombre de partitions non croisées de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vérifie la relation

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^n P_k P_{n-k}$$

d'où l'itération et le résultat. □

Ainsi, l'ensemble des partitions non croisées combinatoires est en bijection avec de nombreux autres objets combinatoires : chemins de DYCK, arbres binaires, parenthésages, triangulations de polygones, ... Étudions le cas de quelques unes de ces bijections [BB07].

Chemins de DYCK Un chemin de DYCK de longueur $2n$ est un mot sur l'alphabet $\{N, S\}$ constitué de n lettres S et n lettres N telles que pour tout k , le préfixe de longueur k comporte au moins autant de lettres S que de lettres N . On les représente par des chemins commençant au point $(0, 0)$ du plan et où chaque lettre avance d'un pas vers la droite, puis vers le nord si c'est un N ou le sud si c'est un S . La propriété sur les préfixes se traduit par le fait que le tracé du chemin reste au dessus de l'axe des abscisses.

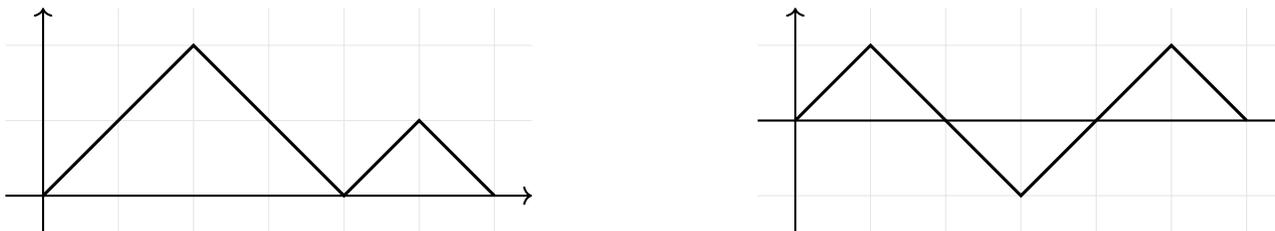


FIGURE 4 – À gauche, un chemin de DYCK. À droite, pas un chemin de DYCK

Il est connu que le nombre de chemins de DYCK de longueur $2n$ est égal au n -ième nombre de CATALAN. Donnons une bijection explicite avec les partitions non croisées combinatoires.

Proposition 33. À toute partition non croisée $P_1 \sqcup \dots \sqcup P_r$ de l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$ on associe une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_i = \begin{cases} |P_k| & \text{si } i = \max(P_k) \text{ pour un } k \in \llbracket 1, r \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application suivante est alors bien définie et bijective :

$$\begin{array}{ccc} \{\text{partitions non croisées de } \llbracket 1, n \rrbracket\} & \rightarrow & \{\text{chemins de DYCK de longueur } 2n\} \\ P_1 \sqcup \dots \sqcup P_r & \mapsto & NS^{\alpha_1} NS^{\alpha_2} \dots NS^{\alpha_{n-1}} NS^{\alpha_n} \end{array} .$$

Exemple 34. Le chemin de DYCK de la figure 4 correspond à la partition non croisée $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$.

Arbres binaires stricts Un arbre binaire strict est un graphe connexe acyclique d'arité au plus 3, tel qu'exactly un seul sommet ait une arité de 2 (qu'on appelle *racine*). On appelle *feuille* les sommets d'arité 1. Les sommets sont appelés des *nœuds* et les sommets différents d'une feuille sont appelés *nœuds interne*.

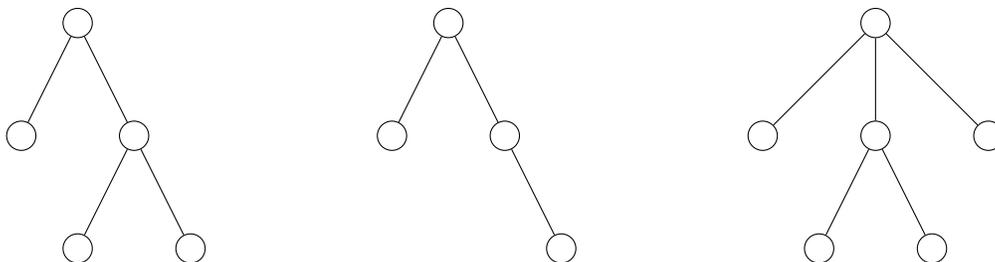


FIGURE 5 – À gauche, un arbre binaire strict. Au milieu, un arbre binaire non strict. À droite, un arbre non binaire

On peut également les définir récursivement : un arbre binaire strict est soit une feuille (noté \circ), soit une paire d'arbres binaires stricts. Par exemple, l'arbre binaire strict de l'exemple précédent est

$$A = (\circ, (\circ, \circ)).$$

Proposition 35. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \{ \text{arbres binaires stricts à } n \text{ nœuds internes} \} & \rightarrow & \text{chemins de DYCK de longueur } 2n \\ \circ & \mapsto & \varepsilon \text{ (mot vide)} \\ (A_1, A_2) & \mapsto & \sigma(A_1)N\sigma(A_2)S \end{array}$$

est bien définie et bijective.

En particulier, les arbres binaires stricts à n nœuds internes sont énumérés par les nombres de CATALAN et en bijection avec les partitions non croisées combinatoires.

Exemple 36. L'arbre binaire strict de la figure 5 correspond au chemin de DYCK $NSSS$, lui-même correspondant à la partition non croisée $\{\{1, 2\}\}$.

Les arbres binaires stricts à n nœuds internes sont en bijection avec les arbres binaires à n nœuds en retirant les feuilles. De tels arbres sont alors définis récursivement en étant soit un arbre vide, soit une paire d'arbres binaires.

2.1.3 Structure de treillis

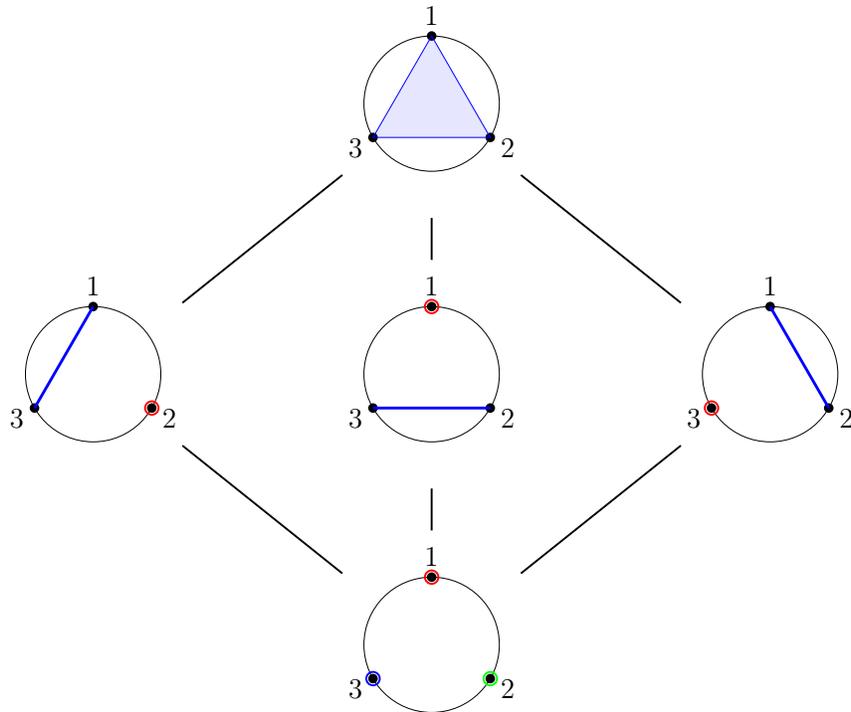
Dans chacun des objets combinatoires précédents (partitions non croisées combinatoires, arbres binaires stricts, chemins de DYCK), il existe une structure de treillis naturelle [BB07]. On peut se demander si les bijections précédentes conservent cette structure. Malheureusement, ce n'est pas le cas, comme nous allons le voir tout de suite. Cette remarque peut sembler anodine mais nous reviendrons dessus lorsque nous parlerons de partitions non croisées algébriques dans la partie suivante.

Treillis de KREWERAS On peut munir l'ensemble des partitions non croisées combinatoires d'une structure de treillis, appelée *treillis de KREWERAS*, qui est définie par « raffinement ».

Définition 37 (Treillis de KREWERAS). Soient $\mathcal{P} = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_r$ et $\mathcal{Q} = Q_1 \sqcup \dots \sqcup Q_s$ deux partitions non croisées de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On dit que $\mathcal{P} \preceq_K \mathcal{Q}$ lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tels que $P_i \subset P_j$

Proposition 38. *L'ensemble des partitions non croisées combinatoires muni de la relation \preceq_K admet une structure de treillis appelée treillis de KREWERAS.*

Exemple 39. Voici le treillis de KREWERAS pour $n = 3$



Treillis de STANLEY Cette structure de treillis sur les chemins de DYCK est définie par « recouvrement ».

Définition 40 (Treillis de STANLEY). Soit $P = NS^{\alpha_1}NS^{\alpha_2} \dots NS^{\alpha_n}$ un chemin de DYCK de longueur $2n$. On note pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$e_i(P) = i - \sum_{j \leq i} \alpha_j$$

indiquant l'altitude de P après la i -ème descente.

On définit alors pour tous chemins de DYCK P et Q une relation $P \preceq_S Q$ par

$$P \preceq_S Q \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i(P) \leq e_i(Q).$$

Visuellement, on a $P \preceq_S Q$ lorsque P reste en dessous de Q .

Proposition 41. *L'ensemble des chemins de DYCK de longueur $2n$ muni de la relation \preceq_S admet une structure de treillis, appelée treillis de STANLEY.*

Exemple 42. Voici le treillis de STANLEY pour $n = 3$

Proposition 45. *L'ensemble des arbres binaires stricts à n nœuds internes muni de la relation \preceq_T admet une structure de treillis, appelée treillis de TAMARI.*

Exemple 46. Voici le treillis de TAMARI pour $n = 3$

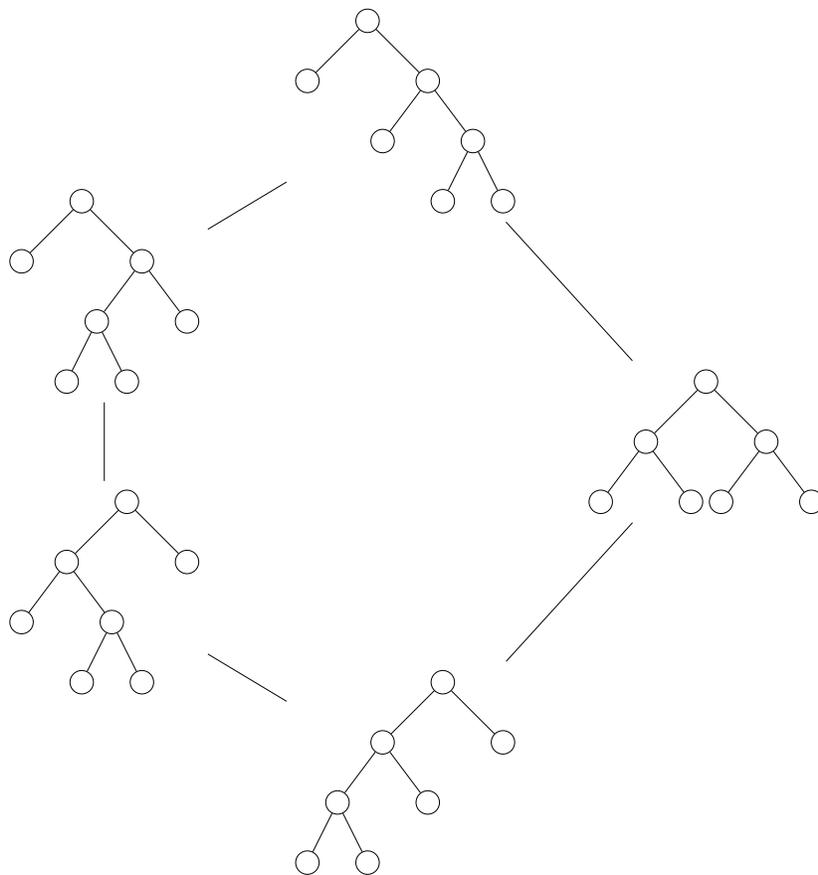


FIGURE 7 – Diagramme de HASSE du treillis de TAMARI pour $n = 3$

Le treillis de TAMARI est donc différent de celui de STANLEY et KREWERAS. Autrement dit, bien que ces trois objets sont en même nombre (énumérés par les nombres de CATALAN), les différentes relations entre les éléments sont différentes, ce qui en fait des objets intrinsèquement différents.

2.2 Partitions non croisées algébriques

Nous allons maintenant donner une définition algébrique des partitions non croisées, généralisant au passage la notion de partition non croisée combinatoire que nous venons de voir [Rea05]. On reprend les notations de la partie 1.1.2.

Définition 47 (Ordre absolu). Soient $w, w' \in W$. On définit un ordre $w \leq_T w'$ sur W , qu'on appelle *ordre absolu*, par :

$$w \leq_T w' \Leftrightarrow l_T(w') = l_T(w) + l_T(w^{-1}w').$$

Autrement dit, $w \leq_T w'$ lorsqu'il existe une écriture de w' réduite en les réflexions commençant par une écriture irréductible en les réflexions de w .

Fixons à présent (W, S) un système de COXETER et c un élément de COXETER de W .

Définition 48 (Partition non croisée). Soit $w \in W$. On dit que w est une *partition non croisée* relativement à c lorsque $w \leq_T c$. On note $\mathbf{NC}(W, c)$ l'ensemble des partitions non croisées relativement à c de W .

La nomenclature « partition non croisée » est justifiée par le théorème suivant

Théorème 49 (Biane [Bia97]). Soit $W = \mathfrak{S}_n$ et c un élément de COXETER. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{NC}(W, c) & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{partitions non croisées combinatoires} \\ \text{de } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ ordonné selon } c \end{array} \right\} \\ w & \mapsto & \text{support des cycles de } w \end{array}$$

est bien définie et c'est un isomorphisme de treillis entre $(\mathbf{NC}(c), \leq_T)$ et l'ensemble des partitions non croisées muni de la structure de treillis de KREWERAS (voir 2.1.3)

Ici, une partition non croisée combinatoire de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ordonnée selon c signifie que les nombres $1, 2, \dots, n$ représentés sur le cercle sont dans l'ordre donné par l'écriture en cycle de c . Autrement dit, l'ordre usuel sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est changé en $i_1 < \dots < i_n$ si

$$c = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

est l'écriture en cycle de c .

Ainsi, contrairement aux autres objets vus dans la partie 2.1, les partitions non croisées (algébriques) sont non seulement en même nombre, mais également admettent la même structure de treillis que les partitions non croisées combinatoires dans le cas de type A_n . Dorénavant, une partition non croisée du groupe de COXETER \mathfrak{S}_n sera implicitement indifféremment une partition non croisée algébrique ou combinatoire.

Le résultat du théorème 49 ne dépend pas de l'élément de COXETER choisi. En fait, dans un groupe de COXETER W dont le graphe de COXETER est un arbre, c'est-à-dire un graphe acyclique connexe, tous les ensembles partiellement ordonnés $(\mathbf{NC}(W, c), \leq_T)$ sont isomorphes. C'est le cas car tous les éléments de COXETER sont conjugués [Hum90] et T est stable par conjugaison. Cependant, dans le cas général où le graphe de COXETER est quelconque, ce résultat n'est plus vrai.

En considérant d'autres groupes de COXETER que le groupe symétrique, on obtient alors d'autres familles de partitions non croisées. Dans le cas où le groupe de COXETER est fini, ces partitions non croisées sont également en nombre fini, énumérés par d'autres suites de nombres que les nombres de CATALAN. Cette généralisation porte le nom de COXETER-CATALAN ou W -CATALAN. La proposition suivante liste les différents nombres de W -Catalan (voir [Rea05]).

Proposition 50. Pour chaque famille de la classification des groupes de COXETER irréduc-

tibles finis, le cardinal de $\mathbf{NC}(c)$ est donné par

A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2	H_3	H_4	$I_2(m)$
$\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$	$\binom{2n}{n}$	$\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$	833	4160	25080	105	8	32	280	$m+2$

Dans le théorème 49, la structure de treillis des partitions non croisées de \mathfrak{S}_n fait partie de la conclusion. De manière générale, l'ordre absolu donne une structure de treillis lorsque W est fini, il s'agit d'un résultat dû à BESSIS démontré au cas par cas en utilisant la classification des groupes de COXETER finis irréductibles [Bes02], puis démontré par BRADY et WATT [BW07] et READING [Rea09] de manière uniforme. La structure de treillis est un résultat important car elle donne une solution au *problème du mot* dans les groupes de tresses associés, c'est-à-dire les groupes définis par la même présentation que les groupes de COXETER mais sans les relations $s_i^2 = 1$ [Bes02].

Dans les autres cas, beaucoup de questions ouvertes subsistent. Le cas du groupe affine \widetilde{A}_{n-1} a été démontré par DIGNE [Dig05] pour certains éléments de COXETER, avant d'établir le cas \widetilde{C}_n [Dig11]. D'autres résultats sont connus dans des cas particuliers, mais la question générale de déterminer les couples (W, c) tels que $(\mathbf{NC}(W, c), \leq_T)$ soit un treillis reste encore une question ouverte.

2.3 Éléments c -triangles

Nous venons de voir que les partitions non croisées sont énumérées par les nombres de COXETER-CATALAN. Dans l'étude générale des groupes de COXETER finis, d'autres objets combinatoires et géométriques sont également énumérés par ces mêmes nombres comme par exemple les « *cluster fans* » qui interviennent dans les algèbres amassées (*cluster algebras* en anglais) [FZ03]. Ces deux familles d'objets étant en même nombre et associés aux mêmes groupes de COXETER, il semble naturel d'avoir une bijection explicite entre les deux. Celle-ci a été établie par READING en 2005 [Rea05] et passe par l'intermédiaire des éléments c -triangles. Dans la suite de ce mémoire, nous étudierons uniquement la bijection entre les partitions non croisées et les éléments c -triangles, ainsi qu'une étude détaillée de ces derniers dans des cas particuliers.

2.3.1 Définition

Dans tout ce qui suit, on se fixe (W, S) un système de COXETER et $c = s_1 \dots s_n$ un élément de COXETER, c'est-à-dire un produit de tous les générateurs de S dans un certain ordre.

Définition 51 (Mot c -triangle pour w). On note c^∞ le mot défini par une répétition infinie de c :

$$c^\infty = s_1 \dots s_n s_1 \dots s_n s_1 \dots s_n s_1 \dots$$

Soit $w \in W$. Alors toute écriture de w apparaît une infinité de fois en tant que sous-mot de c^∞ . On note $\text{sort}_c(w)$ l'écriture irréductible de w qui apparaît en premier comme sous-mot de c^∞ , dans l'ordre lexicographique des positions de chaque lettre dans c^∞ . On appelle $\text{sort}_c(w)$ le *mot c -triangle pour w* .

Une notation pratique consiste à placer des barres verticales entre chaque répétition de c dans c^∞ . Celle-ci ne font pas partie du mot, il s'agit simplement d'une aide visuelle. Par exemple, dans

$W = \mathfrak{S}_3$, pour $c = s_1s_2$, on a $\text{sort}_c(s_2s_1s_2) = s_1s_2s_1$ et $\text{sort}_c(s_2s_1) = s_2s_1$:

$$c^\infty = s_1s_2|s_1s_2|s_1s_2|\dots \quad c^\infty = s_1s_2|s_1s_2|s_1s_2|\dots$$

Pour tout mot $w \in W$, on associe une suite $(w_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que w_i soit le facteur de $\text{sort}_c(w)$ présent en tant que sous-mot dans la i -ème copie de c de c^∞ . Comme c est une permutation des éléments de S , un sous-mot de c peut-être identifié à un sous-ensemble de S . En particulier, on peut considérer que la suite $(w_i)_i$ est une suite de sous-ensembles de S . Dans les exemples précédents, on a

$$c^\infty = \underbrace{s_1s_2}_{w_1} | \underbrace{s_1s_2}_{w_2} | \underbrace{s_1s_2}_{w_3=\emptyset} | \dots \quad c^\infty = \underbrace{s_2s_2}_{w_1} | \underbrace{s_1s_2}_{w_2} | \underbrace{s_1s_2}_{w_3=\emptyset} | \dots$$

On voit que dans le premier cas, on a une suite décroissante $w_1 \supset w_2 \supset w_3 = \emptyset = \dots = w_i = \dots$ tandis que dans le second cas w_1 et w_2 ne sont pas comparables pour l'inclusion.

Définition 52 (Élément c -triable). Soit $w \in W$. On dit que w est c -triable si la suite $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie précédemment est décroissante pour l'inclusion. On note $\text{Sort}_c(W)$ l'ensemble des éléments c -triangles de W .

Remarque. Cette définition laisse penser que la notion « être c -triable » dépend non seulement de c mais aussi de l'écriture réduite qu'on a choisie. Cependant, ce n'est pas le cas. L'élément $\text{sort}_c(w)$ pour une écriture réduite de c s'obtient en permutant les lettres de $\text{sort}_c(w)$ d'une autre écriture réduite de c uniquement entre les diviseurs verticaux $|$. En particulier, les w_i étant des sous-ensembles de S sans ordre entre les éléments, alors la suite $(w_i)_i$ est identique quelque soit l'écriture réduite de c choisie, et donc la définition d'un élément c -triable ne dépend pas du choix de l'écriture réduite de c .

En particulier, $s_2s_1s_2$ est c -triable, mais s_2s_1 ne l'est pas pour $W = \mathfrak{S}_3$ et $c = s_1s_2$. Sur des petits exemples, il est facile de lister tous les mots c -triangles pour $w \in W$. Cependant, pour des grands groupes (le cardinal de \mathfrak{S}_n étant égal à $n!$, cela arrive très vite), on pourra détecter le caractère c -triable d'un élément par récurrence :

Lemme 53. Soit s une lettre initiale de c (parmi toutes les écritures irréductibles possibles de c) et $w \in W$.

- Si $l(sw) > l(w)$ (c'est-à-dire que s n'est pas une lettre initiale de w), alors on a l'équivalence : w est c -triable si et seulement si w appartient au sous-groupe parabolique³ $W_{\langle s \rangle}$ et est un élément sc -triable de $W_{\langle s \rangle}$
- Si $l(sw) < l(w)$ (c'est-à-dire que s est une lettre initiale de w), alors on a l'équivalence : w est c -triable si et seulement si sw est scs -triable.

Remarque. Ce lemme découle immédiatement de la définition d'un élément c -triable. En effet, si s est une lettre initiale de c , alors toute écriture irréductible de sc est un produit de tous les éléments de $S \setminus \{s\}$. Si $w \in W_{\langle s \rangle}$, alors s n'apparaît pas dans aucun des w_i . On peut donc les retirer de c .

$$c^\infty = s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_1} | s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_2} | s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_3} | \dots$$

$$(s_1c)^\infty = s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_1} | s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_2} | s_1 \underbrace{s_2 \dots s_n}_{\supset w_3} | \dots$$

3. Voir la partie 1.3.4 sur les sous-groupes paraboliques

Pour le second point, l'argument est similaire. Si s est une lettre initiale de c , alors scs correspond à l'élément de COXETER c dans lequel la lettre s a été déplacée à la fin. Dans le mot c^∞ , cela correspond à oublier la première lettre et à décaler les barres $|$ d'un cran vers la droite. Il est donc clair que w est c -triable si et seulement si sw est scs -triable.

Ces récurrences permettent de simplifier le calcul des éléments c -triangles pour un groupe de COXETER et un élément de COXETER donnés, mais restent tout de même assez difficiles en pratique. Nous verrons dans la partie 3 différentes manières de les obtenir efficacement dans le cas A_n . De tels caractérisations existent également dans d'autres types finis. Nous discuterons un peu du cas infini dans la partie 4 et particulièrement du cas \widetilde{A}_{n-1} .

2.3.2 Bijection de READING

Nous allons à présent voir que les éléments c -triangles sont bien en bijection avec les partitions non-croisées dans le cas d'un groupe de COXETER fini. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions préliminaires.

Définition 54 (Descente). Soit $w \in W$ et $s \in S$. On dit que s est une *descente à droite* (resp. à gauche) de w si $l(ws) < l(w)$ (resp. $l(sw) < l(w)$). On note $D_R(w)$ (resp. $D_L(w)$) l'ensemble des descentes à droites (resp. à gauche) de w .

Les descentes à droite correspondent en fait aux dernières lettres possibles d'une écriture réduite de w , et les descentes à gauche aux premières lettres possibles. Les ensembles d'inversions sont définis de manière analogue en considérant des réflexions au lieu de générateurs, leur définition a été donnée en 1.3.3.

Exemple 55. Si $W = \mathfrak{S}_n$ et $w \in W$, alors

$$\text{inv}_R(w) = \{(i, j) ; i < j \text{ et } w(i) > w(j)\}$$

et on retrouve la définition usuelle des inversions d'une permutation de \mathfrak{S}_n .

Rappelons quelques résultats :

Lemme 56. Soit $w \in W$. Alors

1. On a les relations $D_L(w) = D_R(w^{-1})$ et $\text{inv}_L(w) = \text{inv}_R(w^{-1})$
2. Le cardinal de $\text{inv}_L(w)$ et $\text{inv}_R(w)$ est égal à $l(w)$
3. Pour toute écriture réduite $w = s_1 \dots s_r$ de w , on a

$$\begin{aligned} \text{inv}_L(w) &= \{s_1, s_1s_2s_1, \dots, s_1s_2 \dots s_{r-1}s_r s_{r-1} \dots s_2s_1\} \\ \text{inv}_R(w) &= \{s_r, s_r s_{r-1} s_r, \dots, s_r s_{r-1} \dots s_2 s_1 s_2 \dots s_{r-1} s_r\} \end{aligned}$$

Démonstration.

1. C'est une conséquence immédiate du fait que $l(w) = l(w^{-1})$ (voir le lemme 6)
2. Voir le corollaire 26
3. Voir le corollaire 27

□

Le fait de connaître explicitement les ensembles d'inversions nous permet alors d'y définir un ordre, une fois une écriture réduite de w fixée. Parmi tous les choix possibles d'une telle écriture, fixons celle donnée par $\text{sort}_c(w)$, qu'on note $s_1 \dots s_r$. Définissons à présent la notion de *couverture* de w , dernier ingrédient permettant d'établir la bijection de READING entre les éléments c -triables de W et les partitions non-croisées de W .

Définition 57 (Couverture). Soit $s_1 \dots s_r$ l'écriture réduite de w donnée par $\text{sort}_c(w)$. On définit un ordre total sur $\text{inv}_L(w)$ par

$$\text{inv}_L(w) = \{s_1 < s_1 s_2 s_1 < \dots < s_1 s_2 \dots s_r \dots s_2 s_1\}$$

On appelle ensemble de *couvertures* de w l'ensemble $\text{Couv}(w) = w D_R(w) w^{-1}$ muni de l'ordre induit par celui de $\text{inv}_L(w)$.

La définition est justifiée car $\text{Couv}(w) \subset \text{inv}_L(w)$. En effet, soit $s \in D_R(w)$. En particulier, $l(w s w^{-1}) = l(ws) < l(w)$, donc $w s w^{-1} \in \text{inv}_L(w)$.

Nous pouvons à présent énoncer la bijection de READING

Théorème 58 (READING [Rea05]). Soit W un groupe de COXETER fini. Si $w \in \text{Sort}_c(W)$, on note $\text{Couv}(w) = \{t_1 < \dots < t_l\}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} nc_c : \text{Sort}_c(W) &\rightarrow \mathbf{NC}(W, c) \\ w &\mapsto t_1 \dots t_l \end{aligned}$$

est bien définie et bijective. De plus, on a

$$\forall w \in \text{Sort}_c(W), l_T(nc_c(w)) = l = |\text{Couv}(w)|$$

Ce théorème donne une telle bijection uniquement dans le cas fini. Dans le cas d'un groupe de COXETER infini, cette application n'est qu'injective [RS10].

Exemple 59. On se place dans W un groupe de type B_2 . Un groupe de COXETER de type B_n peut être représenté par des permutations sur $\llbracket -n, n \rrbracket \setminus \{0\}$ préservant la parité, de générateurs s_0, \dots, s_{n-1} définis par [BB05] :

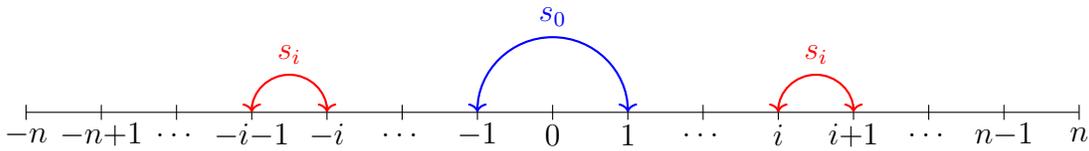


FIGURE 8 – Réalisation de B_n en tant que groupe de permutation

Les partitions non croisées de B_n s'identifient aux partitions non croisées de l'ensemble ordonné

$$(1, 2, \dots, n, -1, -2, \dots, -n)$$

représentés sur un cercle comme pour le cas A_n des partitions non croisées combinatoires, avec en plus une contrainte de symétrie centrale. Celles-ci correspondent alors aux supports des cycles de la décomposition en cycles à supports disjoints, comme pour le cas A_n . Dans le cas de type B_2 , nous pouvons facilement tous les énumérer. D'après la proposition 50, il y a

$\binom{4}{2} = 6$ partitions non-croisées dans W . Le tableau suivant représente alors la bijection nc_c pour $c = s_0s_1$.

w	1	s_0	s_0s_1	$s_0s_1 s_0$	$s_0s_1 s_0s_1$	s_1
$nc_c(w)$	1	s_0	$s_0s_1s_0$	$s_1s_0s_1$	s_0s_1	s_1

La preuve de ce théorème est relativement longue et fait appel à plusieurs reprises à la classification des groupes de COXETER finis irréductibles ainsi qu'à une vérification par ordinateur dans certains cas. Nous allons simplement démontrer la bonne définition de cette application dans ce mémoire, et nous renvoyons à [Rea05] pour la preuve dans son intégralité.

Démonstration. Démontrons la bonne définition de nc_c . Si $w \in \text{Sort}_c(W)$ et $Couv(w) = \{t_1 < \dots < t_l\}$, on montre que $t_1 \dots t_l \in \mathbf{NC}(W, c)$. On note s la première lettre de l'écriture réduite de c choisie. Distinguons deux cas :

- Soit $s \notin D_L(w)$ (c'est-à-dire que $l(sw) > l(w)$). Alors par le lemme 53, $w \in \text{Sort}_{sc}(W_{\langle s \rangle})$. Par récurrence sur le rang de W (c'est-à-dire le nombre de générateurs par la proposition 30), on a $nc_{sc}(w) \in \mathbf{NC}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. Or, par le lemme 56, comme $w \in W_{\langle s \rangle}$, alors $inv_L(w)$ et $Couv(w)$ sont identiques qu'on voit $w \in W$ ou $w \in W_{\langle s \rangle}$. En particulier, par définition de l'application nc_{sc} , on a $nc_{sc}(w) = t_1 \dots t_l \in \mathbf{NC}(W_{\langle s \rangle}, sc)$. En particulier, on a par définition des partitions non croisées (voir la définition 48)

$$t_1 \dots t_l \leq_T sc \leq_T c$$

donc $nc_c(w) \in \mathbf{NC}(W, c)$ et l'application nc_c est bien définie dans ce cas.

- Soit $s \in D_L(w)$ (c'est-à-dire que $l(sw) < l(w)$). Dans ce cas, il y a la possibilité que s soit une couverture de w , distinguons alors ces deux cas
 - ▷ Si s n'est pas une couverture de w , alors $D_R(sw) = D_R(w)$ (c'est une conséquence de la condition d'échange, voir [BB05]) En particulier, on a $Couv(sw) = swD_R(w)w^{-1}s = sCouv(w)s$, cette égalité étant vue comme ensembles partiellement ordonnés car la conjugaison par s est une opération croissante pour \leq_T car la longueur de réflexion est invariante par conjugaison (voir le lemme 8). Or, par le lemme 53, sw est scs -triable, donc

$$nc_{scs}(sw) = (st_1s)(st_2s) \dots (st_ls) = st_1 \dots t_ls = snc_c(w)s$$

Par récurrence sur $l(w)$ (car $l(sw) < l(w)$), on obtient que $nc_{scs}(sw) \leq_T scs$, donc $snc_c(w)s \leq_T scs$. En conjuguant par s , on obtient que

$$nc_c(w) \leq_T c$$

donc $nc_c(w) \in \mathbf{NC}(W, c)$.

- ▷ Si s est une couverture de w , alors l'écriture réduite de w donnée par $\text{sort}_c(w)$ et qu'on note $s_1 \dots s_r$ débute par la lettre s , donc l'écriture réduite de sw donnée par $\text{sort}_{scs}(sw)$ est $s_2 \dots s_r$. En particulier, on a

$$\text{inv}_L(sw) = \{s_2, s_2s_3s_2, \dots, s_2 \dots s_{r-1}s_r s_{r-1} \dots s_2\}$$

donc

$$\text{Couv}(sw) = \{st_2s, st_3s, \dots, st_1s\}$$

et ainsi $nc_{scs}(sw) = st_2 \dots t_1s$. Par récurrence sur la longueur de w (car $l(sw) < l(w)$), on obtient que $st_2 \dots t_1s \in \mathbf{NC}(W, scs)$, et donc que $t_2 \dots t_1 \in \mathbf{NC}(W, c)$ par conjugaison. Un résultat démontré au cas par cas (avec vérification par ordinateur) donne alors que $t_2 \dots t_1 \in W_{\langle s \rangle}$ (voir [Rea05]) et donc $t_1 \dots t_l = st_2 \dots t_1 \leq_T c$. Donc $nc_c(w) \in \mathbf{NC}(W, c)$.

D'où la bonne définition de l'application nc_c . \square

La motivation originelle de la bijection de READING et d'utiliser $\text{Sort}_c(w)$ comme ensemble intermédiaire pour établir une bijection entre $\mathbf{NC}(W, c)$ et d'autres structures combinatoires et géométriques de W . Il serait souhaitable d'avoir une version explicite de son inverse. Celle-ci n'est pas uniforme et doit se faire au cas par cas en utilisant la classification des groupes de COXETER irréductibles finis (voir le théorème 10) [Gob18].

3 Étude des éléments c -triangles dans le cas A_n

Nous allons à présent étudier plus en détail les éléments c -triangles dans le cas d'un groupe de COXETER de type A_n . Plusieurs caractérisations existent dans ce cas, selon les choix de l'élément de COXETER c .

3.1 Une caractérisation des éléments c -triangles

Dans le cas du groupe symétrique, on a une caractérisation simple des éléments c -triangles, qu'on peut « lire » directement depuis leur écriture.

Pour rappel, un groupe de COXETER de type A_{n-1} et de générateurs $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ est isomorphe au groupe symétrique d'ordre n avec pour générateurs

$$s_i = (i \ i + 1).$$

On représente une permutation de \mathfrak{S}_n par son *écriture ligne*.

Définition 60 (Écriture ligne d'une permutation). Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. L'*écriture ligne* de w est le mot sur l'alphabet $\llbracket 1, n \rrbracket$ donné par

$$w(1) \dots w(n)$$

On notera $w = w(1) \dots w(n)$ pour désigner l'écriture ligne de w

Exemple 61. Les transpositions élémentaires ont une écriture ligne

$$s_i = 12 \dots (i-1)(i+1)i(i+2) \dots n$$

Un outil pratique lorsqu'on travaille avec des écritures lignes est la notion de motif.

Définition 62 (Motif). Soit $m = m_1 \dots m_k$ un mot sur un alphabet totalement ordonné. On dit que m est un *motif apparaissant* dans $w \in \mathfrak{S}_n$ s'il existe un sous-mot de w de longueur k $w_1 \dots w_k$ tel que l'application $w_i \mapsto m_i$ soit bien définie et croissante. On dit sinon que w *évite le motif* m .

Exemple 63. Soit $w = 24531 \in \mathfrak{S}_5$. Soient $i < j < k$. Alors w évite le motif kij , mais w n'évite pas le motif jki car 251 est un sous-mot de w dont les lettres sont dans le même ordre que jki .

Avant d'énoncer le théorème de caractérisation des éléments c -triables de \mathfrak{S}_n , remarquons que les éléments de COXETER d'un groupe de type A_n peuvent s'écrire sous une forme particulière. D'abord, tous les éléments de COXETER sont conjugués (c'est vrai dans tout groupe de COXETER [Hum90]). Comme l'élément de COXETER standard $s_1 \dots s_{n-1}$ est le n -c-cle $(1, 2, \dots, n-1, n)$, alors tous les éléments de COXETER sont des n -cycles. Les n -cycles

$$(i_1 = 1, i_2, \dots, i_k = n, i_{k+1}, \dots, i_n)$$

où $i_1 < \dots < i_k$ et $i_k > \dots > i_n$ sont tous des éléments de COXETER car égaux à

$$s_{i_2-1} \dots s_{i_1} s_{i_3-1} \dots s_{i_2} \dots s_{i_k-1} \dots s_{i_{k-1}}$$

(il suffit de calculer les images de $1, 2, \dots, n$, l'ordre sur les i_m permet d'ignorer un grand nombre de blocs $s_{i_m-1} \dots s_{i_{m-1}}$ lors des calculs). Or, il y a exactement 2^{n-2} tels éléments car ils sont tous distincts et sont entièrement déterminés par le choix des éléments à gauche et à droite de n dans l'écriture en cycle, c'est-à-dire deux choix pour chaque entier dans $[[2, n-1]]$. Or, il y a exactement 2^{n-2} éléments de COXETER distincts dans \mathfrak{S}_n car son graphe de COXETER est un arbre admettant $n-2$ arêtes [Shi97]. Ainsi, on a décrit tous les éléments de COXETER de \mathfrak{S}_n .

Le lemme suivant sera utile plus tard, et donne un lien entre l'écriture en ligne d'un élément de COXETER et son écriture en mot sur l'alphabet S .

Lemme 64. Soit c un élément de COXETER de \mathfrak{S}_n . Alors s_{j-1} est avant s_j dans c si et seulement si $j \in L_c$.

Démonstration. Supposons que s_{j-1} précède s_j dans c . Alors puisque c est de la forme

$$s_{i_2-1} \dots s_{i_1} s_{i_3-1} \dots s_{i_2} \dots s_{i_k-1} \dots s_{i_{k-1}}$$

s_j est nécessairement dans un bloc $s_{i_m-1} \dots s_{i_{m-1}}$ ultérieur à celui de s_{j-1} car les indices dans un même bloc décroissent. Mais ces indices sont également consécutifs, donc nécessairement s_{j-1} est en tête de son bloc (sinon l'élément précédent serait s_j). Cela signifie exactement qu'il s'agit d'un élément de L_c . Réciproquement, si s_{j-1} n'est pas un élément de L_c , alors il n'est pas en tête de son bloc. L'élément précédent est alors s_j qui précède donc s_{j-1} dans c . \square

La caractérisation des éléments c -triables de \mathfrak{S}_n est le théorème central de ce mémoire et s'énonce comme suit :

Théorème 65 (Caractérisation des éléments c -triables de type A_n [RS10]).

Soit $W = \mathfrak{S}_n$ et $c = (i_1 = 1, i_2, \dots, i_k = n, \dots, i_n)$ avec $i_2 < \dots < i_k$ et $i_k > \dots > i_n$. On note

$$L_c = \{i_2, \dots, i_{k-1}\}$$

$$R_c = \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$$

Alors w est c -triable si et seulement si w évite les motifs kij avec $i < j < k$ et $j \in L_c$ et les

motifs jki avec $i < j < k$ et $j \in R_c$

En particulier, si c est l'élément de COXETER standard $c = s_1 \dots s_{n-1}$, alors $L_c = \emptyset$ et la caractérisation s'énonce plus simplement : w est c -triable si et seulement si w évite les motifs kij avec $i < j < k$.

Exemple 66. On considère c l'élément de COXETER de \mathfrak{S}_9 suivant

$$c = (1, 2, 4, 6, 8, 9, 7, 5, 3).$$

On se donne un élément $w = 216543987 \in \mathfrak{S}_9$. Alors w est c -triable. En effet, pour $j \in L_c = \{2, 4, 6, 8\}$, il n'y a aucun motif kij car pour $j = 2$ il n'y a pas de place pour k et i , pour $j = 4$ le seul i possible est 1 mais 2 n'est pas un k possible. Pour $j = 6$ il n'y a pas de k possible et pour $j = 8$ le seul k possible est 9 mais ne laisse pas de place pour i . Les mêmes observations montrent que si $j \in R_c = \{7, 5, 3\}$, alors on ne trouve pas de motif jki .

En revanche, l'élément $w = 159264837$ n'est pas c -triable car 926 est un sous-mot de w qui correspond au motif kij avec $j \in L_c$.

La partie suivante est destinée à la démonstration du théorème 65 et est fortement inspirée de [RS10].

3.2 Preuve de la caractérisation

Commençons par dresser un schéma de la preuve. Nous allons montrer que les ensembles d'inversions d'un élément c -triable ont une structure particulière. Connaissant quelles inversions sont autorisées ou non, ceci donnera directement les motifs à éviter. Afin d'obtenir ces contraintes sur ces ensembles d'inversions, nous allons étudier une forme bilinéaire sur l'espace donné par la représentation géométrique de W qu'on appelle *forme d'EULER* et se restreindre à chaque fois à des sous-groupes paraboliques de rang 2. La compréhension du système de racines de type A_n sera fondamentale et nous y consacrerons une sous-partie.

3.2.1 Système de racines

Construisons le système de racines de type A_n . Nous avons déjà fait à la main le cas $n = 2$ à partir de la définition dans la partie 1.3.2. Grâce au lien entre les racines et les réflexions vus dans la partie 1.3.3, et comme on connaît très bien les réflexions de \mathfrak{S}_n (ce sont simplement les transpositions), alors il est aisé de déterminer le système de racines dans le cas général.

Rappelons que dans le cas A_n , le système de racines vérifie

$$\langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_j} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } |i - j| > 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } |i - j| = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, deux racines simples sont orthogonales lorsqu'elles sont éloignées, et forment un angle de $2\pi/3$ lorsqu'elles sont consécutives. Ceci permet alors de les placer dans l'espace V . Il reste à calculer les autres racines, de la forme $w(\alpha_s)$ pour $w \in W$ et $s \in S$. On utilise alors le théorème 23 : il suffit de calculer les $w(\alpha_s)$ pour seulement $|T|$ couples (w, s) (au lieu de $|W| \times |S|!$). Dans le cas du groupe symétrique d'ordre $n + 1$, le nombre de calculs à faire passe de $(n + 1)! \times n$ à

$$|T| = |\{(i, j) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket ; i < j\}| = \frac{n(n + 1)}{2}$$

En plus, dans le cas A_n , on peut encore plus simplifier les calculs. Les racines positives β_t s'expriment très facilement en terme des racines simples α_s :

Lemme 67. *Soit $t = (i j) \in T$ une transposition de \mathfrak{S}_{n+1} avec $i < j$. Alors*

$$\beta_t = \alpha_{s_i} + \alpha_{s_{i+1}} + \cdots + \alpha_{s_{j-1}}$$

Démonstration. Démontrons le résultat par récurrence descendante finie sur i avec j fixé. Si $i = j - 1$, alors le résultat est immédiat car $\beta_{(j-1 j)} = \alpha_{(j-1 j)} = \alpha_{s_{j-1}}$. Soit maintenant $i < j - 1$ et on suppose le résultat vrai au rang $i + 1$. Par conjugaison, on a

$$(i j) = s_i(i + 1 j)s_i$$

et par hypothèse de récurrence, on a

$$\beta_{(i+1 j)} = \alpha_{s_{i+1}} + \cdots + \alpha_{s_{j-1}}$$

Ainsi, par l'équation 6 :

$$\langle \alpha_{s_i}, \beta_{(i+1 j)} \rangle = \langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_{i+1}} \rangle + \cdots + \langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_{j-1}} \rangle = -\frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0$$

Donc finalement

$$\beta_{(i j)} = \pm s_i(\beta_{(i+1 j)}) = \pm (\beta_{(i+1 j)} - 2\langle \alpha_{s_i}, \beta_{(i+1 j)} \rangle \alpha_{s_i}) = \pm (\beta_{(i+1 j)} + \alpha_{s_i})$$

Le signe \pm du membre de droite est donc positif car $\beta_{(i,j)}$ et $\beta_{(i+1 j)} + \alpha_{s_i}$ sont des racines positives, on a alors

$$\beta_{(i j)} = \alpha_{s_i} + \cdots + \alpha_{s_{j-1}}$$

D'où l'itération de la récurrence, et le résultat voulu. \square

Une conséquence immédiate mais pratique est que

Corollaire 68. *Soient $i < j < k$. Alors*

$$\beta_{(i k)} = \beta_{(i j)} + \beta_{(j k)}$$

Ainsi, les racines positives de A_n sont les sommes consécutives de racines simples. Sachant ceci, il devient très facile de construire les systèmes de racines de type A_n explicitement. Le cas $n = 2$ se fait alors en une étape : la seule racine positive non simple est $\beta_{(1 3)}$ qui est égale à la somme des racines simples :

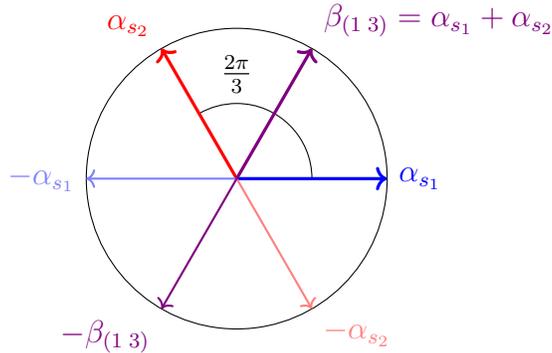


FIGURE 9 – Système de racines de type A_2

et pour $n = 3$, les seules racines non simples sont $\beta_{(1\ 3)}$, $\beta_{(1\ 4)}$ et $\beta_{(2\ 4)}$:

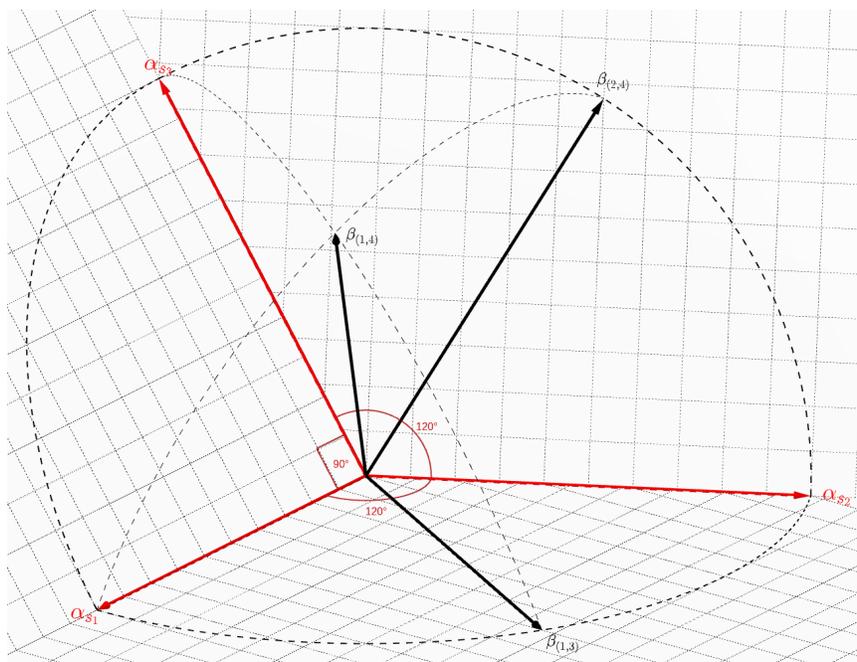


FIGURE 10 – Racines positives de type A_3

Ces remarques seront utiles dans la partie suivante où on cherchera à calculer une certaine forme bilinéaire sur V .

3.2.2 Forme d'EULER

La forme d'EULER est une forme bilinéaire sur V définie à partir de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et qui donnera des informations utiles sur les ensembles d'inversions d'un élément $w \in W$.

Commençons d'abord par présenter un outil pratique encodant les informations géométriques du système de racines : une *matrice de CARTAN généralisée*. Il s'agit d'une matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ symétrique⁴ dont les coefficients diagonaux sont égaux à 2 et les autres coefficients sont négatifs, et vérifient

$$a_{i,j}^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{m_{i,j}} \right) = 4 \langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_j} \rangle^2$$

Dans le cas d'un groupe de COXETER de type A_n correspondant au groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} avec pour générateurs les transpositions élémentaires $s_i = (i\ i+1)$, la matrice de CARTAN généralisée est alors

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La forme d'EULER est alors définie à partir de la matrice de CARTAN généralisée de la manière suivante

4. Ce n'est pas nécessairement le cas si on choisit la convention « type LIE » des systèmes de racines

Définition 69 (Forme d'EULER). Soit (W, S) un système de COXETER avec $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et de matrice de CARTAN généralisée (a_{s_i, s_j}) . Soit $c = c_1 \dots c_n$ un élément de Coxeter avec $c_i \in S$ tous distincts. On définit sur V une forme bilinéaire E_c , qu'on appelle *forme d'EULER* par

$$E_c(\alpha_{c_i}, \alpha_{c_j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a_{c_i, c_j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Dans le cas A_n , pour un élément de COXETER $c = s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(n)}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la forme d'EULER est alors

$$E_c(\alpha_{s_{\sigma(i)}}, \alpha_{s_{\sigma(j)}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i > j \text{ et } \sigma(j) = \sigma(i) \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La modification suivante de E_c nous sera plus utile dans la suite :

Définition 70 (Forme ω_c). On note ω_c la forme bilinéaire anti-symétrique obtenue à partie de E_c :

$$\forall \alpha, \beta \in V, \omega_c(\alpha, \beta) = E_c(\alpha, \beta) - E_c(\beta, \alpha)$$

En particulier, on a dans notre cas :

$$\omega_c(\alpha_{s_{\sigma(i)}}, \alpha_{s_{\sigma(j)}}) = \begin{cases} -1 & \text{si } i > j \text{ et } \sigma(j) = \sigma(i) \pm 1 \\ 1 & \text{si } i < j \text{ et } \sigma(j) = \sigma(i) \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par changement d'indice, on a donc :

$$E_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \text{ et } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\omega_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = \begin{cases} -1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \text{ et } j = i \pm 1 \\ 1 & \text{si } \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) \text{ et } j = i \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $c = s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(n)}$, alors $\sigma^{-1}(i)$ est la position dans c de s_i . Autrement dit, on peut réécrire les égalités précédentes d'une manière plus naturelle :

Proposition 71 (Forme d'EULER dans le cas A_n). Soit $c = s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(n)}$ un élément de COXETER d'un groupe de type A_n . Alors :

$$E_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } j = i \pm 1 \text{ et } s_i \text{ apparaît après } s_j \text{ dans } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\omega_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = \begin{cases} -1 & \text{si } j = i \pm 1 \text{ et } s_i \text{ apparaît après } s_j \text{ dans } c \\ 1 & \text{si } j = i \pm 1 \text{ et } s_i \text{ apparaît avant } s_j \text{ dans } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit apparaître un premier intérêt des formes bilinéaires : elles encodent la position des générateurs dans c . En fait, selon l'ordre des générateurs dans c , les valeurs prises par w_c sur les racines sera modifiée. Or, nous verrons que ces valeurs donnent des renseignements sur les ensembles d'inversions des éléments de W : ceci donnera en particulier la disjonction kij avec $j \in L_c$ et jki avec $j \in R_c$ qu'on a dans la théorème 65.

Terminons cette partie par le calcul de la forme ω_c sur les transpositions. Commençons d'abord par le cas de deux transpositions $(i j)$ et $(j k)$ avec $i < j < k$. Dans ce cas, on a

$$\omega_c(\beta_{(i j)}, \beta_{(j k)}) = \sum_{p=i}^{j-1} \sum_{q=j}^{k-1} \omega_c(\alpha_{s_p}, \alpha_{s_q}) = \omega_c(\alpha_{s_{j-1}}, \alpha_{s_j}) \quad (7)$$

Comme $w_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = 0$ si i et j ne sont pas consécutifs, alors le seul terme non nul de la somme est celui correspondant à $p = j - 1$ et $q = j$. Autrement dit, on a

$$\omega_c(\beta_{(i j)}, \beta_{(j k)}) = \omega_c(\alpha_{s_{j-1}}, \alpha_{s_j})$$

qui vaut 1 si s_{j-1} apparaît avant s_j dans c , et -1 sinon.

Les autres cas s'obtiennent par bilinéarité et anti-symétrie grâce au corollaire 68. Par exemple, le cas de deux transpositions $(i j)$ et $(k l)$ avec $i < k < j < l$ donne :

$$\begin{aligned} \omega_c(\beta_{(i j)}, \beta_{(k l)}) &= \omega_c(\beta_{(i k)} + \beta_{(k j)}, \beta_{(k j)} + \beta_{(j l)}) \\ &= \underbrace{\omega_c(\beta_{(i k)}, \beta_{(k j)})}_{(i)} + \underbrace{\omega_c(\beta_{(i k)}, \beta_{(j l)})}_{(ii)} + \underbrace{\omega_c(\beta_{(k j)}, \beta_{(k j)})}_{(iii)} + \underbrace{\omega_c(\beta_{(k j)}, \beta_{(j l)})}_{(iv)} \end{aligned}$$

Les termes (i) et (iv) découlent du cas précédent, valant 2, 0 ou -2 selon la position de s_{k-1} , s_k , s_{j-1} et s_j . Le terme (iii) est nul par anti-symétrie de ω_c et le terme (ii) est nul car en développant comme dans le calcul (7), chaque terme de la somme est nul. Finalement, on a :

$$\omega_c(\beta_{(i j)}, \beta_{(k l)}) = \begin{cases} 2 & \text{si } s_{k-1} \text{ précède } s_k \text{ et } s_{j-1} \text{ précède } s_j \text{ dans } c \\ -2 & \text{si } s_{k-1} \text{ succède } s_k \text{ et } s_{j-1} \text{ succède } s_j \text{ dans } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2.3 Sous-groupes paraboliques de rang 2 généralisés

L'idée de la suite de la démonstration du théorème 65 est de se restreindre à des sous-groupes paraboliques de rang 2. En fait, ce ne sera pas suffisant, et il nous allons alors généraliser légèrement cette notion

Définition 72 (Sous-groupes paraboliques de rang 2 généralisés). Soient t_1 et t_2 deux réflexions distinctes. On considère l'ensemble

$$A = \{t \in T ; \beta_t \in \text{Vect}(\beta_{t_1}, \beta_{t_2})\}$$

On appelle alors *sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé* le sous-groupe de W engendré par A , et on appelle t_1 et t_2 ses *générateurs canoniques*.

Remarque. Attention, bien que t_1 et t_2 sont appelés « générateurs canoniques » et qu'un sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé est de rang 2, ce sous-groupe n'est pas le sous-groupe engendré par t_1 et t_2 .

De manière générale, l'ensemble des *générateurs canoniques* d'un sous-groupe W' de W engendré par des réflexion est l'unique sous-ensemble $R \subset T$ vérifiant

- Pour tout $t \in W' \cap T$, $\beta_t \in \text{Vect}(\beta_r ; r \in R)$
- Pour tout $r \in R$, la racine β_r n'est pas dans l'espace engendré par les autres β_t pour $t \in R \setminus \{r\}$

et dans ce cas, (W', R) est alors un système de COXETER sont les réflexions sont exactement les transpositions de W appartenant à W' [RS10].

Dans le cas du type A_n , si t_1 et t_2 sont deux transpositions distinctes, alors par le corollaire 68

$$\text{Vect}(\beta_{t_1}, \beta_{t_2}) \cap \Phi \subset \{\pm\beta_{t_1}, \pm\beta_{t_2}, \pm(\beta_{t_1} + \beta_{t_2})\}$$

avec égalité si et seulement si $\beta_{t_1} + \beta_{t_2}$ est une racine, c'est-à-dire si et seulement si t_1 et t_2 sont de la forme $(i j)$ et $(j k)$ avec $i < j < k$.

Lemme 73. *Soit W' un sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé non commutatif. Alors W' admet pour générateurs canoniques $(i j)$ et $(j k)$ pour des entiers $i < j < k$.*

Si W' est un sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé, et si t_1 et t_2 sont ses générateurs canoniques, on définit une suite $(u_k)_{k \geq 1}$, de longueur m l'ordre du produit $t_2 t_1$ (éventuellement infini) par

$$u_k = t_1(t_2 t_1)^{k-1}$$

En particulier, $u_1 = t_1$ et $u_m = t_2$. Lorsque $m = +\infty$, on s'autorisera à considérer les éléments u_{m-1}, u_{m-2} etc. définis par $u_{m-k} = (t_2 t_1)^{k-1} t_2$. Dans le cas de type A_n , cela ne se produira pas car $m \in \{2, 3\}$.

Les sous-groupes paraboliques généralisés de rang 2 permettent alors de caractériser les ensembles d'inversions :

Proposition 74 ([RS10]). *Soit $I \subset T$ un sous-ensemble fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe $w \in W$ tel que $I = \text{inv}_L(w)$*
- (ii) *Pour tout sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé W' , si t_1 et t_2 sont les générateurs canoniques de W' , alors l'intersection $I \cap W'$ est soit un segment initial soit un segment final de la suite (u_1, \dots, u_m)*

Une autre propriété importante de la suite $(u_k)_k$, en lien avec la forme d'EULER est le fait suivant

Proposition 75. *Soit W' un sous-groupe de rang 2 généralisé, avec $(u_k)_k$ la suite définie ci-dessus. Alors :*

- *Si $\omega_c(\beta_{u_1}, \beta_{u_m}) = 0$, alors $\omega_c(\beta_{u_i}, \beta_{u_j}) = 0$ pour tous indices i, j . On dit dans ce cas que la restriction de ω_c à W' est nulle.*
- *Si $\omega_c(\beta_{u_1}, \beta_{u_m}) > 0$, alors $\omega_c(\beta_{u_i}, \beta_{u_j}) > 0$ pour tous indices $i < j$.*
- *Si $\omega_c(\beta_{u_1}, \beta_{u_m}) < 0$, alors $\omega_c(\beta_{u_i}, \beta_{u_j}) < 0$ pour tous indices $i < j$.*

Démonstration. Le premier point est clair par anti-symétrie de ω_c et par le fait que les racines β_{u_i} sont des combinaisons linéaires à coefficients positifs de β_{u_1} et β_{u_m} . Cette remarque est également le point de départ pour démontrer les points (ii) et (iii). En effet, si $i < j$, on écrit

$$\beta_{u_i} = a\beta_{u_1} + b\beta_{u_2} \quad \text{et} \quad \beta_{u_j} = c\beta_{u_1} + d\beta_{u_2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ tels que $a + b > 0$ et $c + d > 0$. En développant $\omega_c(\beta_{u_i}, \beta_{u_j})$, on cherche à montrer que $ad - bc > 0$. Si $i = 1$ ou $i = m$, on a $d = 0$ ou $c = 0$ donc le résultat est vrai. Sinon, on considère la racine positive $u_1(\beta_{u_i})$ qui est $\beta_{u_{i'}}$ avec $i' = m - i + 2$. De même, $u_1(\beta_{u_j}) = \beta_{u_{j'}}$ avec $j' = m - j + 2$. En effet, on a

$$u_1(\beta_{u_i}) = \beta_{u_1 u_i u_1}$$

où

$$u_1 u_i u_1 = u_1 u_1 (u_m u_1)^{i-1} u_1 = (u_m u_1)^{i-1} u_1 = (u_1 u_m)^{m-i+1} u_1 = u_1 (u_m u_1)^{m-i+1} = u_{m-i+2}$$

En particulier, $j' < i'$. De même en appliquant u_m .

Ainsi, u_1 et u_m inversent le sens des racines dans ω_c , donc par anti-symétrie inversent le signe. En plus de cela, l'action de u_1 ou u_m inverse le signe de $ad - bc$. En particulier, le signe de $\omega_c(\beta_{u_i}, \beta_{u_j})$ est égal à celui de $\omega_c(u_1(\beta_{u_j}), u_1(\beta_{u_i})) = \omega_c(\beta_{u_{j'}}, \beta_{u_{i'}})$ avec $i' < j'$. En appliquant un nombre fini de fois u_1 ou u_m , on se ramène au cas où $i = 1$ ou $j = m$ ce qui conclut. \square

3.2.4 Éléments c -alignés et conclusion

Les éléments c -alignés sont une nouvelle famille d'éléments particulier dans les groupes de COXETER. Sans rentrer dans les détails (on renvoie à [RS10]), on peut c -orienter les groupes de COXETER finis [Rea05] en imposant un ordre sur les réflexions compatible avec des conditions sur des sous-groupes paraboliques. Un résultat montré par READING ([Rea05] dans le cas fini, [RS10] dans le cas général) donne que les notions d'éléments c -alignés et c -triables sont les mêmes.

Théorème 76. *Soit c un élément de COXETER. Alors $w \in W$ est c -triable si et seulement si il est c -aligné.*

Le lien entre les sous-groupes paraboliques et les éléments c -triables devient donc clair.

Définition 77 (Élément c -aligné). Soit W' un sous-groupe parabolique de rang 2 généralisé non commutatif. On dit qu'un élément $w \in W$ est c -aligné pour W' si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- La restriction de ω_c à W' est nulle et $inv_L(w) \cap W'$ est de cardinal au plus 1.
- $\omega_c(\beta_{u_1}, \beta_{u_m}) > 0$ et $inv_L(w) \cap W'$ est soit vide, soit le singleton $\{u_m\}$, soit un segment initial fini de la suite (u_1, \dots, u_m) .

On dit alors qu'un élément est c -aligné s'il l'est pour tout sous-groupe parabolique non commutatif W' de rang 2 de W .

Terminons alors la démonstration du théorème 65. Soit $w \in W$, on considère un sous-groupe parabolique W' généralisé de rang 2 et non commutatif. Il est engendré par deux transpositions $t_1 = (i j)$ et $t_2 = (j k)$ avec $i < j < k$. En particulier, la suite (u_1, \dots, u_m) est égale à $((i j), (i k), (j k))$ (ici, $m = 3$). Deux cas se présentent :

- Soit s_{j-1} apparaît avant s_j dans c . Dans ce cas, on a $\omega_c(u_1, u_3) = 1$. Donc w est c -aligné pour W' si et seulement si $inv_L(w) \cap W' \neq \{(i k), (j k)\}$. En particulier, w n'est pas c -aligné (pour W') lorsque $inv_L(w) \cap W' = \{(i k), (j k)\}$. Cela signifie que $w^{-1}(i) > w^{-1}(k)$, $w^{-1}(j) > w^{-1}(k)$ et $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$. Écrit en représentation ligne, cela signifie exactement que les nombres k, i, j apparaissent dans cet ordre dans w , donc que kij est un sous-mot de la représentation ligne de w , car $w^{-1}(m)$ est la position de m dans l'écriture ligne de w pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Soit s_j apparaît avant s_{j-1} dans c . Dans ce cas, on change l'ordre des générateurs canoniques et donc la suite $(u_k)_k : u_1 = (j\ k)$ et $u_3 = (i\ j)$. Par anti-symétrie de la forme ω_c , on a $\omega_c(u_1, u_3) = 1$. Donc w est c -aligné pour W' si et seulement si $inv_L(w) \cap W' \neq \{(i\ k), (i\ j)\}$. En particulier, w n'est pas c -aligné (pour W') lorsque $inv_L(w) \cap W' = \{(i\ k), (i\ j)\}$. Cela signifie que $w^{-1}(i) > w^{-1}(k)$, $w^{-1}(i) > w^{-1}(j)$ et $w^{-1}(j) < w^{-1}(k)$. Écrit en représentation ligne, cela signifie exactement que les nombres $jk i$ apparaissent dans cet ordre, donc que $jk i$ est un sous-mot de la représentation ligne de w .

On conclut alors par le lemme 64 pour retrouver les deux cas du théorème 65. \square

3.3 Lien avec les arbres binaires de recherche

Les partitions non croisées étant en bijection avec les éléments c -triangles par le théorème de 58, celles-ci sont également en bijection avec les arbres binaires stricts (voir la partie 2.1.2), et en particulier avec les arbres binaires de recherche. Nous allons voir une bijection simple entre les éléments c -triangles et les arbres binaires de recherche.

3.3.1 Rappels sur les arbres

Définition 78 (Arbre binaire de recherche). Un arbre binaire de recherche est un arbre binaire à n nœuds étiquetés, c'est-à-dire soit un arbre vide, soit un triplet (x, A_g, A_d) avec x une étiquette et A_g, A_d deux arbres binaires étiquetés. Un arbre binaire de recherche est étiqueté par les éléments d'un ensemble totalement ordonné I et vérifie : pour tout sous-arbre (x, A_g, A_d) d'un arbre binaire de recherche, alors toutes les étiquettes dans A_g sont inférieures à x et toutes les étiquettes de A_d sont strictement supérieures à x

L'étude des arbres binaires de recherche est un incontournable de l'informatique théorique et plus de détails se trouvent dans [Knu73]. Nous nous contenterons de leur définition et quelques propriétés élémentaires.

Lemme 79. Soit A un arbre binaire à n nœuds. Alors il existe une et une seule manière de l'étiqueter par tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour en faire un arbre binaire de recherche.

Ce résultat est clair par « élimination » : soit (x, A_g, A_d) un arbre binaire de recherche, comme tous les nœuds de A_g sont inférieurs à x et que toutes les étiquettes sont distinctes, on a $x > |A_g|$. De même, $x \leq n - |A_d|$. Or, $|A_g| + |A_d| + 1 = n$ car chaque élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ apparaît une et une seule fois. Donc $x = |A_g| + 1$. On continue par récurrence sur A_g et A_d .

Exemple 80. On présente un exemple d'arbre binaire de recherche et d'arbre non binaires de recherche.

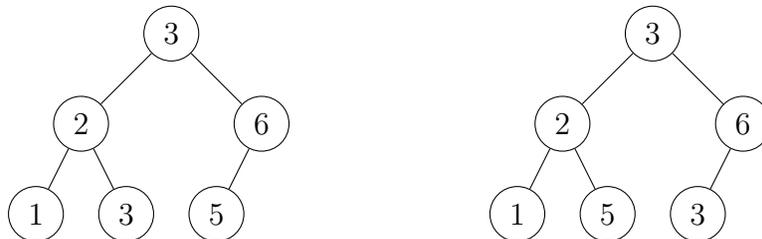


FIGURE 11 – À gauche un arbre binaire de recherche. À droite pas un arbre binaire de recherche.

Le lemme précédent nous dit alors qu'il y a une bijection entre les arbres binaires de recherche et les arbres binaires, donc avec les partitions non-croisées combinatoires et donc avec les éléments c -triangles dans le cas A_n . Nous allons voir une manière explicite d'obtenir les éléments c -triangles (pour $c = s_1 s_2 \dots s_{n-1}$) à partir d'arbres binaires de recherche. Tout d'abord, expliquons rapidement différentes manières de lire un arbre binaire de recherche

Définition 81 (Parcours préfixe, postfixe, infixe). Soit A un arbre binaire de recherche. Une *lecture* de A est une fonction renvoyant les étiquettes de A dans un certain ordre. On définit récursivement les lectures suivantes :

- Lecture *postfixe* : On définit $\text{post}(A)$ la lecture postfixe de A par $\text{post}(\emptyset) = \varepsilon$ (mot vide) et $\text{post}((x, A_g, A_d)) = \text{post}(A_g)\text{post}(A_d)x$
- Lecture *préfixe* : On définit $\text{pre}(A)$ la lecture préfixe de A par $\text{pre}(\emptyset) = \varepsilon$ (mot vide) et $\text{pre}((x, A_g, A_d)) = x\text{pre}(A_g)\text{pre}(A_d)$
- Lecture *infixe* : On définit $\text{in}(A)$ la lecture infixe de A par $\text{in}(\emptyset) = \varepsilon$ (mot vide) et $\text{in}((x, A_g, A_d)) = \text{in}(A_g)x\text{in}(A_d)$

Exemple 82. Sur l'arbre binaire de recherche de l'exemple précédent, les lectures donnent :

- postfixe : 132563
- préfixe : 321365
- infixe : 123356

On remarque que la lecture infixe a renvoyé la liste d'entiers dans l'ordre, c'est en fait un fait général qui découle de la définition d'un arbre binaire de recherche et de la lecture infixe.

Terminons les rappels sur les arbres binaires de recherche par un algorithme d'insertion.

Lemme 83 (Insertion dans un arbre binaire de recherche). Soit A un arbre binaire de recherche étiqueté par un ensemble totalement ordonné I . Soit $i \in I$ un élément qui n'est pas une étiquette d'un nœud de A . L'algorithme suivant ajoute un nœud à A , étiqueté par i , en gardant la structure d'arbre binaire de recherche :

- Si $A = \emptyset$, renvoyer l'arbre $(i, \emptyset, \emptyset)$
- Sinon, $A = (x, A_g, A_d)$. Si $i < x$, soit A'_g l'arbre binaire de recherche obtenu en insérant i dans A_g . Renvoyer (x, A'_g, A_d) . Si $i > x$, soit A'_d l'arbre binaire de recherche obtenu en insérant i dans A_d . Renvoyer (x, A_g, A'_d)

Remarque. Étant donnée une liste d'éléments d'un ensemble totalement ordonné, on peut trier cette liste en insérant successivement les éléments dans un arbre binaire de recherche vide puis en effectuant une lecture infixe. Cet algorithme de tri est *stable*, c'est-à-dire qu'il préserve l'ordre relatif des apparitions des mêmes éléments.

3.3.2 Relation sylvestre et algorithme SSA

Soit \mathcal{A} un ensemble fini totalement ordonné et \mathcal{A}^* le monoïde des mots sur l'alphabet \mathcal{A} . À partir d'un mot $w \in \mathcal{A}$, on construit deux arbres binaires P et Q de même forme de la manière suivante :

1. Poser $P = \emptyset$, $Q = \emptyset$ et $n = l(w)$
2. Pour i allant de n à 1 en décroissant :
3. Insérer la i -ème lettre de w dans P en utilisant l'algorithme d'insertion dans les arbres binaires de recherche.
4. Ajouter un nœud à Q au même endroit où la i -ème lettre de w a été insérée dans P , et l'étiqueter par i
5. Retourner (P, Q)

FIGURE 12 – Sylvester SCHENSTED algorithm (SSA) [HNT04]

Exemple 84. Soit $\mathcal{A} = \{1 < 2 < 3 < 4\}$ et $w = 423141$. Alors on a

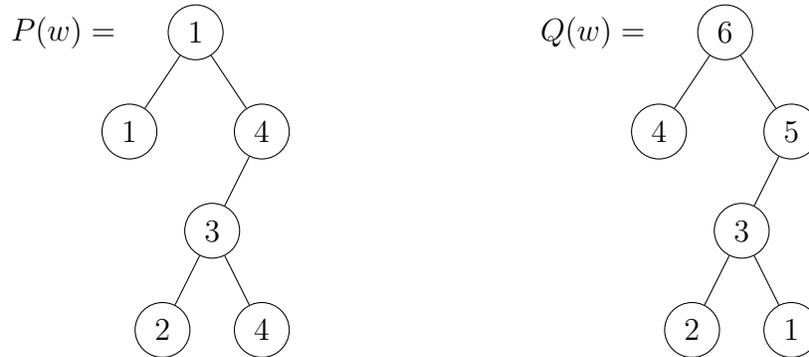


FIGURE 13 – Algorithme SSA appliqué à $w = 423141$

À partir de ces deux arbres, on peut reconstruire w de la manière suivante : la i -ème lettre de w est l'étiquette de $P(w)$ du nœud de position celle de i dans $Q(w)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 85 (Algorithme SSA). *Soit un alphabet totalement ordonné \mathcal{A} . Alors l'algorithme SSA est une bijection entre les mots sur l'alphabet \mathcal{A} et les paires d'arbres de mêmes forme, le premier étant un arbre binaire de recherche et le second un arbre décroissant standard.*

Un arbre décroissant est un arbre tel que les étiquettes des fils d'un nœud soient inférieures à l'étiquette du nœud. Il est dit standard s'il est de taille n et étiqueté par exactement tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Remarque. L'arbre $P(w)$ est étiqueté par les éléments de \mathcal{A} tandis que $Q(w)$ est étiqueté par des entiers.

On définit maintenant une relation d'équivalence sur \mathcal{A}^* appelée *relation sylvestre*. Soient $w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*$ deux mots, on dit que w_1 et w_2 sont *sylvestre adjacents* s'il existe $a \leq b < c \in \mathcal{A}$ tels que

$$w_1 = u a c v b w \quad \text{et} \quad w_2 = u c a v b w$$

pour des mots $u, v, w \in \mathcal{A}^*$, et on définit alors la *relation sylvestre* comme étant la clôture transitive de la relation « sylvestre adjacent ». On appelle *classe sylvestre* les classes d'équivalences modulo cette relation.

Théorème 86 ([HNT04]). Deux mots w_1 et w_2 sont dans la même classe sylvestre si et seulement si les arbres $P(w_1)$ et $P(w_2)$ renvoyés par l'algorithme SSA sont égaux.

Dans une même classe sylvestre, on dispose d'un représentant particulier qu'on appelle *mot canonique* de sa classe sylvestre. Celui-ci est défini comme étant le mot donné par la lecture *postfixe* de $P(w)$ renvoyé par l'algorithme SSA pour un mot w de la classe sylvestre considérée. On le note généralement w_T .

Exemple 87. Le mot canonique de la classe sylvestre de $w = 423141$ de l'exemple précédent est $w_T = 124341$.

Le résultat suivant donne alors le lien entre les classes sylvestres et les éléments c -triangles :

Théorème 88. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et w son écriture ligne représentée par un mot sur l'alphabet $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors w est le mot canonique de sa classe sylvestre si et seulement si il évite le motif kij avec $i < j < k$.

Autrement dit, les mots canoniques des classes sylvestres sont exactement les éléments c -triangles de \mathfrak{S}_n pour l'élément de COXETER standard $c = s_1 \dots s_{n-1}$. L'algorithme SSA donne alors une manière simple de les obtenir : il s'agit précisément des permutations w telles que

$$\text{post}(P(w)) = w$$

Exemple 89. La permutation $w = 25341$ n'est pas c -triangle car $\text{post}(P(w)) = 23541$

L'algorithme SSA nous a donc donné une bijection entre les arbres binaires de recherche et les éléments c -triangle pour c l'élément de COXETER standard.

Remarque. Question ouverte : A-t-on un algorithme similaire pour d'autres éléments de COXETER que $c = s_1 \dots s_{n-1}$?

4 Essai de généralisation dans le cas \widetilde{A}_{n-1}

Dans cette partie, essayons d'appliquer la méthode précédente pour démontrer un analogue du théorème 65 dans le cas d'un groupe de COXETER affine de type \widetilde{A}_{n-1} . Cette partie est motivée par l'article [RS10] : il est indiqué que les cas d'autres groupes de COXETER pouvant être décrits comme ensemble de permutation (par exemple, les cas B_n ou \widetilde{A}_{n-1}), la même procédure donne de manière « similaire et simple » une description des éléments c -triangles par motifs à éviter. Une partie de mon stage consistait à déterminer une caractérisation par exclusion de motif dans le cas affine \widetilde{A}_{n-1} , et cette partie résume les différents résultats que j'ai obtenus dans l'optique de démontrer ce théorème.

4.1 Permutations affines

Nous avons déjà donné une description des groupes de COXETER de type \widetilde{A}_{n-1} comme ensemble de permutation dans l'exemple 12, dont nous allons garder les mêmes notations.

4.1.1 Écriture fenêtre

De la même manière qu'il existe une écriture ligne pour une permutation usuelle de $\llbracket 1, n \rrbracket$, l'écriture ligne d'une permutation affine est un mot infini donné par, si w est une permutation affine :

$$\dots w(-2)w(-1)w(0)w(1)w(2)\dots$$

En utilisant la propriété de périodicité, on peut se restreindre à l'image de $\llbracket 1, n \rrbracket$, qu'on note entre crochet et qu'on appelle l'écriture *fenêtre* de w :

$$w = [w(1), w(2), \dots, w(n)].$$

Par exemple, les transpositions élémentaires s_i pour $i \neq 0$ sont

$$s_i = [1, 2, \dots, i-1, i+1, i, i+2, \dots, n]$$

et la transposition élémentaire s_0 est

$$s_0 = [0, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n+1].$$

4.1.2 Transpositions affines

La première étape consiste à décrire l'ensemble des réflexions afin de pouvoir en construire le système de racines.

Définition 90. Soient $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $p \in \mathbb{Z}$. On définit une permutation affine $(i, j)_p$ de la manière suivante :

$$(i, j)_p : \begin{cases} i + nr & \mapsto & j + nr + np & \text{pour tout } r \in \mathbb{Z} \\ j + nr & \mapsto & i + nr - np & \text{pour tout } r \in \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & k & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

En particulier, on a en écriture fenêtre :

$$(i, j)_p = \begin{cases} [1, 2, \dots, i-1, j+np, i+1, \dots, j-1, i-np, j+1, \dots, n-1, n] & \text{si } i < j \\ [1, 2, \dots, j-1, i-np, j+1, \dots, i-1, j+np, i+1, \dots, n-1, n] & \text{sinon} \end{cases}$$

et il s'agit bien de permutations affines car

$$\sum_{k=1}^n (i, j)_p(k) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En fait, ce sont exactement toutes les réflexions affines.

Théorème 91. Soit $W = \widehat{\mathfrak{S}}_n$. Alors

$$T = \{(i, j)_p ; 1 \leq i \neq j \leq n, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour démontrer ce résultat, commençons par un petit lemme utile :

(14) On utilise (11) et (13). On a $(j, i)_p = (i, j)_{-p}$ donc

$$(i, k)_q(j, i)_p(i, k)_q = (i, k)_q(i, j)_{-p}(i, k)_q = (k, j)_{-p-q} = (j, k)_{p+q}.$$

(15) On calcule :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i, j)_q(i, j)_p(i, j)_q(i + nr) = (i, j)_q(i, j)_p(j + nr + nq) \\ = (i, j)_q(i + nr + nq - np) \\ = j + nr + nq - np + nq \\ = j + nr + (2q - p)n \\ \\ (i, j)_q(i, j)_p(i, j)_q(j + nr) = (i, j)_q(i, j)_p(i + nr - nq) \\ = (i, j)_q(j + nr - nq + np) \\ = i + nr - nq + np - nq \\ = i + nr - (2q - p)n \\ \\ (i, j)_q(i, j)_p(i, j)_q(k) = k \end{array} \right.$$

Il s'agit exactement de la [définition](#) de $(i, j)_{2q-p}$.

□

Démontrons maintenant le théorème 91.

Démonstration. On le fait par double inclusion. Montrons que toute réflexion s'écrit de la forme $(i, j)_p$ avec $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $p \in \mathbb{Z}$. Soit $t = ws_iw^{-1}$ une réflexion. Les équations (11) à (15) montrent que conjuguer des éléments de la forme $(i, j)_p$ donne une permutation de cette forme, et les équations (9) et (10) montrent que les générateurs sont de la forme $(i, j)_p$. En particulier, pour toute réflexion $t = ws_iw^{-1}$, alors t est de la forme $(i, j)_p$. D'où la première inclusion.

L'inclusion réciproque provient du fait qu'on a les égalités

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i, j)_p = (i + 1, j)_p s_i (i + 1, j)_p & \text{si } i \neq n \text{ et } j \neq i + 1 \\ (i, j)_p = (j + 1, i)_{-p} s_j (j + 1, i)_{-p} & \text{si } j \neq n \text{ et } i \neq j + 1 \\ (n - 1, n)_p = (n, 1)_0 (n, 1)_p s_{n-1} (n, 1)_p (n, 1)_0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

qui montrent que tous les éléments de la forme $(i, j)_p$ sont bien des réflexions.

□

Définition 93 (Transposition affines).

On appelle les réflexions $(i, j)_p$ des *transpositions affines*.

4.2 Système de racines

Maintenant que nous connaissons les réflexions de \widetilde{A}_{n-1} , nous allons pouvoir décrire le système de racines grâce au théorème 23. Avant ceci, remarquons un comportement différent par rapport au cas A_n .

4.2.1 Matrice de CARTAN et l'élément δ

On considère l'espace vectoriel V dont une base est $\{\alpha_{s_i} ; 0 \leq i \leq n-1\}$ sur lequel on définit une forme bilinéaire symétrique

$$\langle \alpha_{s_i}, \alpha_{s_j} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2} & \text{si } i \equiv j \pm 1[n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas A_n , cette forme bilinéaire était non dégénérée (c'est en fait le cas si et seulement si W est fini [Bou07]), mais ici on a un vecteur isotrope. Pour le trouver, on peut chercher à calculer le noyau de la matrice de CARTAN généralisée :

$$\ker \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc l'élément

$$\delta = \alpha_{s_0} + \alpha_{s_1} + \dots + \alpha_{s_{n-1}}$$

est un vecteur isotrope : $\delta \neq 0$ et $\langle \delta, \delta \rangle = 0$.

De plus, si on se restreint à $V' = \text{Vect}\{\alpha_{s_i} ; i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$, on retrouve exactement le système de racines de A_{n-1} .

4.2.2 Système de racines de \widetilde{A}_{n-1}

Le théorème suivant décrit le système de racines de \widetilde{A}_{n-1}

Théorème 94 (Système de racines de \widetilde{A}_{n-1}). *Soit $(i, j)_p$ une transposition affine de $\widehat{\mathfrak{S}}_n$.*

- Si $i < j$ et $p \geq 0$, alors

$$\beta_{(i,j)_p} = \beta_{(i,j)_0} + p\delta = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + p\delta.$$

- Si $i > j$ et $p > 0$, alors

$$\beta_{(i,j)_p} = -\beta_{(i,j)_0} + p\delta = -(\alpha_j + \dots + \alpha_{i-1}) + p\delta.$$

Remarque. Ce théorème couvre bien tous les cas possibles par l'équation 11.

En admettant ce résultat pour l'instant, on obtient alors une description simple du système de racines de type \widetilde{A}_{n-1} .

Théorème 95. *Soit Φ le système de racine de type A_{n-1} obtenu par restriction à $V' = \text{Vect}\{\alpha_{s_i} ; i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$. Alors le système de racines de \widetilde{A}_{n-1} est*

$$\Phi_a = \Phi + \mathbb{Z}\delta.$$

De plus, l'ensemble des racines positives de \widetilde{A}_{n-1} est

$$\begin{aligned}\Phi_a^+ &= \{\alpha + n\delta ; \alpha \in \Phi, n > 0\} \cup \{\alpha + n\delta ; \alpha \in \Phi^+, n \geq 0\} \\ &= \Phi^+ \sqcup (\Phi + \mathbb{N}^*\delta).\end{aligned}$$

4.2.3 Preuve du théorème sur le système de racines

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème 94.

Lorsque $p = 0$, les transpositions $(i, j)_0$ sont simplement des transpositions « classiques » et on a alors (on suppose que $i < j$ quitte à les échanger)

$$\beta_{(i,j)_0} = \alpha_{s_i} + \cdots + \alpha_{s_{j-1}}.$$

Faisons maintenant le cas $\beta_{(n-1,n)_1}$. On a

$$(n-1, n)_1 = (n, 1)_0 s_0 s_{n-1} s_0 (n, 1)_0$$

(ceci a été fait dans la démonstration du théorème 91) donc

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \pm (n, 1)_0 s_0 (\alpha_{s_{n-1}}) = \pm s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_2 s_1 s_2 \cdots s_{n-2} s_{n-1} s_0 (\alpha_{s_{n-1}}).$$

On a

$$s_0 (\alpha_{s_{n-1}}) = \alpha_{s_0} + \alpha_{s_{n-1}}$$

(en se plaçant dans $W_{\{s_0, s_{n-1}\}}$ qui est de type A_2 , c'est clair). Ainsi,

$$s_{n-1} s_0 (\alpha_{s_{n-1}}) = s_{n-1} (\alpha_{s_0}) + s_{n-1} (\alpha_{s_{n-1}}) = \alpha_{s_0} + \alpha_{s_{n-1}} - \alpha_{s_{n-1}} = \alpha_{s_0}.$$

On a donc

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \pm s_{n-1} \cdots s_2 s_1 s_2 \cdots s_{n-2} (\alpha_{s_0}).$$

Comme les s_i pour $2 \leq i \leq n-2$ commutent avec s_0 , alors

$$s_2 \cdots s_{n-2} (\alpha_{s_0}) = \alpha_{s_0}$$

et ainsi

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \pm s_{n-1} \cdots s_2 s_1 (\alpha_{s_0}).$$

On continue :

$$s_1 (\alpha_{s_0}) = \alpha_{s_0} + \alpha_{s_1}$$

donc

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \pm (s_{n-1} \underbrace{s_{n-2} \cdots s_2 (\alpha_{s_0})}_{\alpha_{s_0}} + s_{n-1} \cdots s_2 (\alpha_{s_1})).$$

Le terme de droite se calcule alors facilement par récurrence et donne

$$\alpha_{s_1} + \cdots + \alpha_{s_{n-1}}$$

et le terme de gauche donne

$$\alpha_{s_0} + \alpha_{s_1}$$

En les sommant, on obtient finalement que

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \pm(\alpha_{s_0} + \cdots + \alpha_{s_{n-1}} + \alpha_{s_{n-1}}) = \pm(\delta + \alpha_{s_{n-1}})$$

Comme $\beta_{(n-1,n)_1}$ est une racine positive, ses coordonnées dans la base $\{\alpha_{s_i} ; 0 \leq i \leq n-1\}$ sont positives, donc

$$\beta_{(n-1,n)_1} = \delta + \alpha_{s_{n-1}}.$$

D'où le cas $(n-1, n)_1$.

Traisons maintenant le cas $\beta_{(n-1,n)_p}$ avec $p \in \mathbb{N}$. On montre d'abord le résultat suivant

Lemme 96. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors*

$$(n-1, n)_p = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^p s_{n-1} ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{-p}$$

Démonstration. On sait déjà que

$$(n-1, n)_p = (n, 1)_0(n, 1)_p s_{n-1} (n, 1)_p(n, 1)_0$$

donc il suffit de montrer que

$$(n, 1)_0(n, 1)_p = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^p$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. On le fait par récurrence. Pour $p = 0$, c'est clair car toutes les réflexions sont d'ordre 2. On suppose maintenant vrai le résultat aux rangs $0, 1, \dots, p$ et on le montre pour $p+1$. On distingue deux cas :

- Soit $p+1$ est pair, égal à $2q$. Alors par l'équation 15 on a que

$$(n, 1)_0(n, 1)_{p+1} = (n, 1)_0(n, 1)_q(n, 1)_0(n, 1)_q = ((n, 1)_0(n, 1)_q)^2$$

ce qui par hypothèse de récurrence donne que

$$(n, 1)_0(n, 1)_{p+1} = (((n, 1)_0(n, 1)_1)^q)^2 = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{2q} = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{p+1}$$

- Soit $p+1$ est impair, égal à $2q-1$, alors toujours par l'équation 15 on a :

$$(n, 1)_0(n, 1)_{p+1} = (n, 1)_0(n, 1)_q(n, 1)_1(n, 1)_q.$$

Par hypothèse de récurrence appliquée aux deux premier termes :

$$(n, 1)_0(n, 1)_{p+1} = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^q (n, 1)_1(n, 1)_q = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{q-1} (n, 1)_0(n, 1)_q$$

et enfin, par hypothèse de récurrence appliquée aux deux derniers termes, on conclut la récurrence

$$(n, 1)_0(n, 1)_{p+1} = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{q-1} ((n, 1)_0(n, 1)_1)^q = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{2q-1} = ((n, 1)_0(n, 1)_1)^{p+1}$$

□

Corollaire 97. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta_{(n-1,1)_{p+1}} = (n, 1)_0(n, 1)_1 (\beta_{(n-1,n)_p}).$$

Corollaire 98. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta_{(n-1,1)_p} = \alpha_{s_{n-1}} + p\delta.$$

Démonstration du corollaire 98. On procède par récurrence sur p . Le cas $p = 0$ est trivial. On suppose maintenant le résultat vrai au rang p et on le démontre au rang $p + 1$. On a par le corollaire précédent et par hypothèse de récurrence :

$$\beta_{(n-1,1)_{p+1}} = (n, 1)_0(n, 1)_1 (\beta_{(n-1,n)_p}) = (n, 1)_0(n, 1)_1 (\alpha_{s_{n-1}} + p\delta).$$

Or, δ est fixé par tous les éléments de W . En effet, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$s_i(\delta) = \sum_{k=0}^{n-1} s_i(\alpha_{s_k}) = \left(\sum_{k \notin \{i-1, i, i+1\}} \alpha_{s_k} \right) + \underbrace{s_i(\alpha_{s_{i-1}})}_{\alpha_{s_{i-1}} + \alpha_{s_i}} + \underbrace{s_i(\alpha_{s_i})}_{-\alpha_{s_i}} + \underbrace{s_i(\alpha_{s_{i+1}})}_{\alpha_{s_i} + \alpha_{s_{i+1}}} = \delta$$

et de plus, le calcul du cas $\beta_{(n-1,n)_p}$ fait précédemment donne que

$$(n, 1)_0(n, 1)_1 (\alpha_{s_{n-1}}) = \beta_{(n-1,n)_1} = \alpha_{s_{n-1}} + \delta.$$

Finalement :

$$\beta_{(n-1,1)_{p+1}} = (n, 1)_0(n, 1)_1 (\alpha_{s_{n-1}} + p\delta) = \alpha_{s_{n-1}} + \delta + p\delta = \alpha_{s_{n-1}} + (p+1)\delta$$

d'où l'itération et le résultat voulu, ce qui conclut le cas $\beta_{(n-1,n)_p}$. □

À présent, on calcule $\beta_{(i,n)_p}$ pour $p \geq 0$ et $i < n-1$.

Lemme 99. Pour tout $i < n-1$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta_{(i,n)_p} = \alpha_{s_i} + \cdots + \alpha_{s_{n-1}} + p\delta.$$

Démonstration. Tout d'abord, l'équation 13 appliquée $n-1-i$ fois donne que

$$(i, n)_p = s_i(i+1, n)_p s_i = \cdots = s_i \cdots s_{n-2} (n-1, n)_p s_{n-2} \cdots s_i.$$

Or a déjà calculé $\beta_{(n-1,1)_p}$ (corollaire 98), donc

$$\beta_{(i,n)_p} = \pm s_i \cdots s_{n-2} (\beta_{(n-1,n)_p}) = \pm s_i \cdots s_{n-2} (\alpha_{s_{n-1}} + p\delta).$$

On a déjà vu que δ est fixé par tous les éléments de W , puis le calcul de $s_i \cdots s_{n-2}(\alpha_{s_{n-1}})$ se fait par récurrence comme déjà fait dans le cas précédent. Finalement, on obtient que

$$\beta_{(i,n)_p} = \pm(\alpha_{s_i} + \cdots + \alpha_{s_{n-1}} + p\delta).$$

Une racine positive ayant toutes ses coordonnées positives, on obtient le résultat voulu :

$$\beta_{(i,n)_p} = \alpha_{s_i} + \cdots + \alpha_{s_{n-1}} + p\delta.$$

□

On arrive enfin au cas général du premier cas du théorème 94 : $(i, j)_p$ avec $i < j$ et $p \geq 0$. On suppose que $j \neq n$ car le cas $(i, n)_p$ a été fait précédemment (lemme 99). On a alors par l'équation 13

$$(i, j)_p = s_j(i, j+1)_p s_j = s_j \dots s_{n-1}(i, n)_p s_{n-1} \dots s_j$$

donc

$$\beta_{(i,j)_p} = \pm s_j \dots s_{n-1} (\beta_{(i,n)_p}) = \pm s_j \dots s_{n-1} (\alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_{j-1}} + \alpha_{s_j} + \dots + \alpha_{s_{n-1}} + p\delta).$$

Pour rappel, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} s_i \dots s_j(\alpha_{s_{j+1}}) = \alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_{j+1}} \\ s_i \dots s_j(\alpha_{s_j}) = -(\alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_j}) \\ s_i \dots s_j(\alpha_{s_k}) = \alpha_{s_{k+1}} & \text{si } i \leq k < j \\ s_i \dots s_j(\alpha_{s_{i-1}}) = \alpha_{s_{i-1}} + \alpha_{s_i} \\ s_i \dots s_j(\alpha_{s_k}) = \alpha_{s_k} & \text{si } k < i-1 \text{ ou } k > j+1 \\ w(\delta) = \delta & \text{si } w \in W. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \beta_{(i,j)_p} &= \pm(\alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_{j-1}} + \alpha_{s_j} + \dots + \alpha_{s_{n-1}} - (\alpha_{s_j} + \dots + \alpha_{s_{n-1}}) + p\delta) \\ &= \pm(\alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_{j-1}} + p\delta). \end{aligned}$$

Et comme toutes les coordonnées d'une racine positive sont positif, alors on a le résultat voulu :

$$\forall i < j, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \beta_{(i,j)_p} = \alpha_{s_i} + \dots + \alpha_{s_{j-1}} + p\delta.$$

Terminons la preuve du théorème 94 avec le cas où $i > j$ et $p > 0$. On utilise alors l'équation 15 pour voir que

$$(i, j)_p = (i, j)_0(i, j)_{-p}(i, j)_0 = (j, i)_0(j, i)_p(j, i)_0$$

ce qui nous permet d'appliquer le cas précédent (en échangeant les rôles de i et j). On a

$$\begin{aligned} \beta_{(i,j)_p} &= \pm(j, i)_0 (\beta_{(j,i)_p}) \\ &= \pm(j, i)_0 (\beta_{(j,i)_0} + p\delta) \\ &= \pm(-\beta_{(j,i)_0} + p\delta) \\ &= \pm(-(\alpha_{s_j} + \dots + \alpha_{s_{i-1}}) + p\delta). \end{aligned}$$

Puisque $p > 0$ et que $\delta = \alpha_{s_0} + \dots + \alpha_{s_{n-1}}$, alors la racine positive est celle de signe +. D'où finalement

$$\forall i > j, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_{(i,j)_p} = -(\alpha_{s_j} + \dots + \alpha_{s_{i-1}}) + p\delta.$$

Ceci conclut alors la preuve du théorème 94. □

4.3 Une tentative

Pour rappel, l'objectif de cette partie est de trouver des motifs à exclure dans l'écriture fenêtre afin de détecter les éléments c -triangles d'un groupe de type \widetilde{A}_{n-1} , via une approche similaire à celle qu'on a faite pour des groupes de type A_n dans la partie 3 et motivée par le fait que le cas affine est une « généralisation triviale » du cas A_n dans l'article de READING [RS10].

Pour y arriver, on va dire qu'un élément $w \in W$ n'est pas c -aligné (c'est-à-dire pas c -triable, voir le théorème 76) lorsque pour un sous-groupe parabolique généralisé de rang 2 W' , on a $\text{inv}_L(w) \cap W' = \{u_2, u_3\}$ où $(u_n)_{1 \leq n \leq 3}$ est la suite définie par les générateurs canoniques de W' comme dans la partie 3.

Pour ceci, il faudrait comprendre ces générateurs canoniques, mais également comprendre ce que signifie avoir une certaine transposition affine $(i, j)_p$ comme inversion à gauche pour un élément $w \in W$. La compréhension de ces générateurs canonique sera utile pour le calcul de la forme ω_c .

4.3.1 À propos des inversions

Étudions les inversions d'une permutation affine w .

Lemme 100. *Soit w une permutation affine et $(i, j)_p$ une transposition affine. Alors $(i, j)_p$ est une inversion à droite de w si et seulement si $i < j + np$ et $w(i) > w(j + np)$ ou $i > j + np$ et $w(i) < w(j + np)$.*

En particulier, les inversions à gauche de w sont les transpositions affines $(i, j)_p$ telles que $i < j + np$ et $j + np$ apparaît avant i dans l'écriture ligne complète de w , ou $i > j + np$ et i apparaît avant $j + np$ dans l'écriture ligne complète de w :

$$\dots w(-2)w(-1)w(0)w(1)w(2)\dots$$

Il faut alors traduire ceci en terme d'écriture fenêtre :

Lemme 101. *Soit $(i, j)_p$ une transposition affine et w une permutation affine. On note $i + nr$ le représentant de la classe de i modulo n apparaissant dans l'écriture fenêtre de w , et $j + ns$ celui de la classe de j modulo n (avec $r, s \in \mathbb{Z}$). Alors $(i, j)_p$ est une inversion à gauche de w si et seulement si $i < j + np$ et*

- ou bien $i + nr$ est avant $j + ns$ dans l'écriture fenêtre de w et $p < s - r$
- ou bien $i + nr$ est après $j + ns$ dans l'écriture fenêtre de w et $p \leq s - r$

ou bien $i > j + np$ et

- ou bien $i + nr$ est avant $j + ns$ dans l'écriture fenêtre de w et $p \leq s - r$
- ou bien $i + nr$ est après $j + ns$ dans l'écriture fenêtre de w et $p < s - r$

Exemple 102. Considérons la permutation affine de $\widehat{\mathfrak{S}}_5$ donnée par son écriture fenêtre

$$w = [5, -2, 4, -3, 11]$$

et la transposition $(2, 4)_2$. Est-ce une inversion à gauche de w ? On a bien $2 \leq 4 + 2 * 5$. De plus :

$$w = [5 + 0 * 5, 3 - 1 * 5, 4 + 0 * 5, 2 - 1 * 5, 1 + 2 * 5]$$

donc le représentant de la classe de 2 apparaît après celui de la classe de 4. C'est donc une inversion à gauche de w si et seulement si $2 \leq 0 - (-1)$. Ce n'est pas le cas, donc $(2, 4)_2$ n'est pas une inversion à gauche de w . En revanche, $(2, 4)_1$ est une inversion à gauche de w , de même pour $(2, 4)_0$.

4.3.2 Calcul de la forme d'EULER

On cherche maintenant à calculer la forme d'EULER dans le cas affine. On reprend la construction faite dans la partie 3 où on a étudié le cas des groupes de type A_n . La matrice de CARTAN de \widetilde{A}_{n-1} étant très similaire à celle de type A_n , les calculs le seront aussi. On a en fait, si $c = s_{\sigma(0)} \dots s_{\sigma(n-1)}$ est un élément de COXETER

$$\omega_c(\alpha_{s_i}, \alpha_{s_j}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i - j| \not\equiv 1[n], \text{ sinon} \\ -1 & \text{si } s_i \text{ apparaît avant } s_j \text{ dans } c \\ 1 & \text{si } s_i \text{ apparaît après } s_j \text{ dans } c. \end{cases}$$

Ainsi, si $i < j < k$ et $p, q \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \omega_c(\beta_{(i,j)_p}, \beta_{(j,k)_q}) &= \omega_c(\beta_{(i,j)_0} + p\delta, \beta_{(j,k)_0} + q\delta) \\ &= \omega_c(\beta_{(i,j)_0}, \beta_{(j,k)_0}) + p\omega_c(\delta, \beta_{(j,k)_0}) + q\omega_c(\beta_{(i,j)_0}, \delta) + (p+q)\omega_c(\delta, \delta) \\ &= \omega_c(\beta_{(i,j)_0}, \beta_{(j,k)_0}) - p\omega_c(\beta_{(i,j)_0}, \delta) + q\omega_c(\beta_{(j,k)_0}, \delta) \end{aligned} \quad (16)$$

où le premier terme a été calculé dans le cas fini (valant ± 1 selon la position de s_{j-1} par rapport à s_j dans c), et les autres termes valent :

$$\begin{aligned} \omega_c(\beta_{(i,j)_0}, \delta) &= \sum_{k=i}^{j-1} (\omega_c(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_{k-1}}) + \omega_c(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_{k+1}})) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \omega_c(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_{k+1}}) - \sum_{k=i}^{j-1} \omega_c(\alpha_{s_{k-1}}, \alpha_{s_k}) \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} \omega_c(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_{k+1}}) - \sum_{k=i-1}^{j-2} \omega_c(\alpha_{s_k}, \alpha_{s_{k+1}}) \\ &= \omega_c(\alpha_{s_{j-1}}, \alpha_{s_j}) - \omega_c(\alpha_{s_{i-1}}, \alpha_{s_i}) \\ &= \begin{cases} -2 & \text{si } s_{j-1} \text{ est avant } s_j \text{ et } s_{i-1} \text{ est après } s_i \text{ dans } c \\ 2 & \text{si } s_{j-1} \text{ est après } s_j \text{ et } s_{i-1} \text{ est avant } s_i \text{ dans } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci permet alors de calculer la valeur de $\omega_c(\beta_{(i,j)_p}, \beta_{(j,k)_q})$ grâce à l'équation (16), cependant, les indices p et q qui apparaissent posent problème. En effet, nous aimerions avoir une caractérisation des éléments c -triangles de \widetilde{A}_{n-1} par exclusion de motif en se donnant simplement l'élément de COXETER c ainsi que la permutation affine w à tester. Ces indices p et q qui apparaissent proviennent des générateurs canoniques des sous-groupes paraboliques généralisés de rang 2 utilisés dans la démonstration du résultat, mais ne devraient pas apparaître dans le critère d'exclusion de motif car ils ne sont (*a priori*?) pas obtenables à partir de c et w .

4.3.3 Problèmes rencontrés

Malgré la compréhension des inversions à gauche d'une permutation affine w (partie 4.3.1), cela reste difficile d'en déduire un motif sur l'écriture fenêtre de w en connaissant $inv_L(w) \cap W'$ avec W' un sous-groupe parabolique généralisé de rang 2 non commutatif. Par exemple, si $r_1 = (i, j)_p$ et $r_2 = (j, k)_q$ où $i < j < k$ sont les générateurs canoniques de W' , on considère la suite finie $(u_k)_k$ définie dans la partie 3.2.3

$$u_1 = (i, j)_p; \quad u_2 = (i, k)_{p+q}; \quad u_3 = (j, k)_q$$

Dire que

$$\text{inv}_L(w) \cap W' = \{u_2, u_3\} = \{(i, k)_{p+q}, (j, k)_q\}$$

en utilisant le lemme 101 donne un nombre de cas à traiter extrêmement élevé qui n'ont pas l'air de donner de résultats intéressants sur d'éventuels motifs à éviter dans l'écriture fenêtre de w .

Afin de résoudre ce problème, j'ai essayé de modifier la manière d'écrire une permutation affine : on écrit séparément la donnée de la permutation sur l'ensemble des classes modulo n et des « décalages ».

Plus précisément, si w est une permutation affine, on définit σ une permutation (standard) par

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sigma(i) \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } [\sigma(i)]_n = [w(i)]_n$$

ou de manière équivalente, $\sigma(i)$ est l'unique entier compris entre 1 et n tel qu'il existe un entier relatif k tel que $w(i) = \sigma(i) + nk$. (En fait, on a $\widehat{\mathfrak{S}}_n = \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}$, et l'application $w \mapsto \sigma$ est simplement la projection sur \mathfrak{S}_n). En faisant ceci, on perd beaucoup d'information (par exemple, toutes les transpositions $(i, j)_p$ deviennent la transposition (i, j) quelque soit p) et donc il faut garder en mémoire les décalages que w effectue entre $\sigma(i)$ et $w(i)$. On note alors :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad r_i = \frac{w(i) - \sigma(i)}{n} \in \mathbb{Z} = \text{« l'unique entier relatif tel que } \sigma(i) + nr_i = w(i) \text{ »}$$

et on note alors

$$w = (\sigma | r_1, \dots, r_n)$$

que j'appelle *écriture par permutation et décalage* de w .

Proposition 103. *L'application $w \mapsto (\sigma, r_1, \dots, r_n)$ est bien définie et bijective entre $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ et $\mathfrak{S}_n \times D$ où $D = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z} ; \sum r_i = 0\}$*

Ce résultat est clair car on peut reconstruire l'image de l'intervalle $\llbracket 1, n \rrbracket$ par w , et donc w en entier.

Exemple 104.

- Les transpositions s_i s'écrivent

$$s_i = (s_i | 0, \dots, 0)$$

et de manière générale, toute permutation classique σ des entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$ vue comme permutation affine s'écrit

$$\sigma = (\sigma | 0, \dots, 0)$$

- Les transpositions généralisées $(i, j)_p$ avec $i < j$ et $p \in \mathbb{Z}$ s'écrivent

$$(i, j)_p = ((i, j)_0 | 0, \dots, 0, p, 0, \dots, 0, -p, 0, \dots, 0)$$

où p et $-p$ sont en position i et j (autrement dit, $r_i = p$, $r_j = -p$ et les autres sont nuls)

Avec cette notation, les opérations sur les permutations affines sont données par

Proposition 105. *Soient $w = (\sigma | r_1, \dots, r_n)$ et $w' = (\sigma' | r'_1, \dots, r'_n)$ deux permutations affines écrites par permutation et décalage, alors*

- Le produit ww' s'écrit

$$ww' = (\sigma\sigma' | r_{\sigma'(1)} + r'_1, \dots, r_{\sigma'(n)} + r'_n)$$

- L'inverse de w s'écrit

$$w^{-1} = (\sigma^{-1} | -r_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, -r_{\sigma^{-1}(n)})$$

- Le conjugué $ww'w^{-1}$ s'écrit :

$$ww'w^{-1} = (\sigma\sigma'\sigma^{-1} | r_{\sigma'\sigma^{-1}(1)} + r'_{\sigma^{-1}(1)} - r_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, r_{\sigma'\sigma^{-1}(n)} + r'_{\sigma^{-1}(n)} - r_{\sigma^{-1}(n)})$$

Démonstration. Il suffit de vérifier le premier point, le deuxième sera automatiquement vrai en vérifiant que $ww^{-1} = (id | 0, \dots, 0)$ et le troisième est conséquence directe des deux premiers. Pour montrer le premier point, on calcule l'image de i par ww' :

$$ww'(i) = w(w'(i)) = w(\sigma'(i) + nr'_i) = w(\sigma'(i)) + nr'_i = \sigma\sigma^{-1}(i) + nr_{\sigma'(i)} + nr'_i$$

□

Remarque. Les σ^{-1} qui apparaissent en indice ne doivent pas faire peur car $\sigma^{-1}(i)$ est simplement la position de i dans l'écriture ligne de σ . En particulier, il n'y a pas besoin de calculer w^{-1} ni σ^{-1} pour calculer $ww'w^{-1}$ (car le conjugué $\sigma\sigma'\sigma^{-1}$ se calcule sans calculer σ^{-1} non plus)

Exemple 106.

- Soient $(i, j)_p$ et $(j, k)_q$ avec $i < j < k$ et calculons $(j, k)_q(i, j)_p(j, k)_q$.

$$\begin{aligned} (j, k)_q(i, j)_p(j, k)_q &= ((j \ k)(i \ j)(j \ k) | \dots r_i = q + p \dots r_j = -q + q \dots r_k = -p - q \dots) \\ &= ((i \ k) | 0, \dots, 0, r_i = p + q, 0, \dots, 0, r_k = -(p + q), 0, \dots, 0) \\ &= (i, k)_{p+q} \end{aligned}$$

Ici, le calcul n'est peut-être pas aussi simple qu'en utilisant les propriétés qu'on a établies sur les transpositions $(i, j)_p$, mais reste tout de même relativement simple et fonctionne sur n'importe quelle paire de permutation affines comme le montre l'exemple suivant.

- Soient $w = [15, 4, -13] = (312 | 4, 1, -5)$ et $w' = [-7, 3, 10] = (231 | -3, 0, 3)$. Alors on a

$$w^2 = (231 | -1, 5, -4) = [-1, 18, -11]$$

et

$$ww'w^{-1} = (231 | -5+0-1, 4+3-(-5), 1+(-3)-4) = (231 | -6, 12, -6) = [-16, 39, -17]$$

Cependant, cette écriture n'a pas l'air de simplifier la détection des inversions à gauche ou à droite, ce qui était l'un des problèmes à résoudre, et l'objectif de la fin du stage qui se poursuit encore après la rédaction de ce mémoire.

Références

- [BB05] Anders Bjorner and Francesco Brenti. *Combinatorics of coxeter groups*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [BB07] Olivier Bernardi and Nicolas Bonichon. Catalan’s intervals and realizers of triangulations, 2007.
- [Bes02] David Bessis. The dual braid monoid, 2002.
- [Bia97] Philippe Biane. Some properties of crossings and partitions. *Discrete Mathematics*, 175(1) :41–53, 1997.
- [Bou07] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie*. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [BW07] Thomas Brady and Colum Watt. Non-crossing partition lattices in finite real reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360 :1983–2005, 2007.
- [Cox35] H. S. M. Coxeter. The complete enumeration of finite groups of the form $ri2=(rirj)kij=1$. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-10(1) :21–25, 1935.
- [Dig05] François Digne. Présentations duales des groupes de tresses de type affine \tilde{a} , 2005.
- [Dig11] François Digne. A garside presentation for artin-tits groups of type \tilde{c}_n , 2011.
- [FZ03] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones mathematicae*, 154(1) :63–121, may 2003.
- [Gob18] Thomas Gobet. Dual garside structures and coxeter sortable elements, 2018.
- [HNT04] F. Hivert, J. C. Novelli, and J. Y. Thibon. The algebra of binary search trees, 2004.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1990.
- [Knu73] Donald Knuth. *The Art Of Computer Programming, vol. 3 : Sorting And Searching*. Addison-Wesley, 1973.
- [Rea05] Nathan Reading. Clusters, coxeter-sortable elements and noncrossing partitions, 2005.
- [Rea09] Nathan Reading. Noncrossing partitions and the shard intersection order, 2009.
- [RS10] Nathan Reading and David E Speyer. Sortable elements in infinite coxeter groups. 2010.
- [Shi97] Jian-yi Shi. The enumeration of coxeter elements. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 6 :161–171, 04 1997.