# Interrogation écrite n°1

## ALGÈBRE 3 - L2

10 octobre 2023 - Durée : 40 minutes

**Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non autorisée.**

**Les exercices sont indépendants les uns des autres et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies. Veuillez justifier toutes les réponses. Le barème est donné à titre indicatif.**

**Exercice 1 - Question de cours** (6 points)

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau de $f$ est-il un sous-espace de $E$ ? L'image de $f$ est-elle un sous-espace de $F$ ? Justifier.

**Exercice 2 - Sommes et intersections de sous-espaces vectoriels** (6 points)

Soient $U$, $V$ et $W$ des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

1. Si $U + V = U + W$, a-t-on nécessairement $V = W$ ?
2. Comparer $U + (V \cap W)$ et $(U + V) \cap (U + W)$.
3. Comparer $(U \cap V) + (U \cap W)$ et $U \cap (V + W)$.

**Exercice 3 - Sous-espaces de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$** (8 points)

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ et à valeurs réelles. On admet que $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Démontrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Parmi les sous-ensembles de $E$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E$ ?

$$
\begin{aligned}
&A = \{f \in E \ ; \ f \text{ est paire}\}\\
&B = \{f \in E \ ; \ \exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], \ f(x) = \cos(\omega x)\}\\
&C = \{f \in E \ ; \ \exists x_0 \in [0,1], \ f(x_0) = 0\}\\
&D = \{f \in E \ ; \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], \ f(x) = \lambda \lfloor x \rfloor\}.
\end{aligned}
$$



**N'oubliez pas les questions au verso !**

**Exercice 4 - Matrices symétriques et anti-symétriques** (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. On admet que $E$ est un espace vectoriel.

1. Expliciter une base de $E$. En déduire la dimension de $E$.
2. Soit $S = S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $E$ et $A = A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $E$, c'est-à-dire

$$S = \{M \in E \; ; \; {}^tM = M\}$$
$$A = \{M \in E \; ; \; {}^tM = -M\}.$$

Montrer que $S$ et $A$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

> **Rappel :** La notation ${}^tM$ désigne la matrice transposée de $M$, c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de $M$ telle que son coefficient en $(i, j)$ soit le coefficient en $(j, i)$ de $M$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, si $n = 3$ et
>
> $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
>
> alors la transposée de $M$ est
>
> $${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M \in E$. Montrer que $M + {}^tM \in S$ et que $M - {}^tM \in A$.
4. Soit $f : E \to E$ l'application définie par

$$\forall M \in E, \; f(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis déterminer l'image et le noyau de $f$.

5. Montrer que $S \oplus A = E$. En déduire que $f$ est la projection sur $S$ parallèlement à $A$.