Interrogation écrite n°1

ALGÈBRE 3 - L2

10 octobre 2023 - Durée : 40 minutes

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non autorisée.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies. Veuillez justifier toutes les réponses. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 - Question de cours (6 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau de f est-il un sous-espace de E ? L'image de f est-elle un sous-espace de F ? Justifier.

Solution 1

Voir le poly de cours (Chapitre 2, sections 8.1 et 8.2).

Exercice 2 - Sommes et intersections de sous-espaces vectoriels (6 points)

Soient U, V et W des sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Si $U + V = U + W$, a-t-on nécessairement $V = W$?
2. Comparer $U + (V \cap W)$ et $(U + V) \cap (U + W)$.
3. Comparer $(U \cap V) + (U \cap W)$ et $U \cap (V + W)$.

Solution 2

Voir l'exercice 4 de la feuille de TD n°2.

Exercice 3 - Sous-espaces de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ (8 points)

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On admet que $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Parmi les sous-ensembles de E suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

$$
\begin{aligned}
A &= \{f \in E \ ; \ f \text{ est paire}\} \\
B &= \{f \in E \ ; \ \exists \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], \ f(x) = \cos(\omega x)\} \\
C &= \{f \in E \ ; \ \exists x_0 \in [0, 1], \ f(x_0) = 0\} \\
D &= \{f \in E \ ; \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], \ f(x) = \lambda \lfloor x \rfloor\}.
\end{aligned}
$$

N'oubliez pas les questions au verso !

Solution 3

1. Une fonction continue de $[0,1]$ à valeurs réelles est en particulier une fonction (quelconque) de $[0,1]$ à valeurs réelles, donc on a l'inclusion

$$E \subset \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}).$$

En particulier, E est un sous-ensemble de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$. Pour montrer que E est un espace vectoriel réel, il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$. Prenons $f, g \in E$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{R}$, et montrons que $\lambda f + g \in E$, c'est-à-dire que $\lambda f + g$ est une fonction continue. Ceci est vrai, car la somme de deux fonctions continues est encore continue, et la multiplication d'une fonction continue par un scalaire est encore une fonction continue [1]. Ceci prouve que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, donc c'est lui-même un espace vectoriel réel.

2. $\boxed{A}$: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, on dit que f est paire lorsque :

$$\forall x \in [a,b], (-x \in [a,b] \Rightarrow f(x) = f(-x)).$$

Autrement dit, f est paire lorsque pour tout $x \in [a,b]$, si $-x \in [a,b]$ alors les valeurs de f en x et $-x$ sont égales. Dans le cas de l'ensemble A, le seul élément $x \in [0,1]$ tel que $-x \in [0,1]$ est 0. Donc la condition de parité devient

$$f \text{ est paire } \Leftrightarrow f(0) = f(-0)$$

ce qui est tout le temps vrai. Ainsi, $A = E$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : On peut aussi accepter une autre définition de la parité d'une fonction qui exige que l'ensemble de départ soit symétrique par rapport à 0. Dans ce cas, la condition « f est paire » dans la définition de l'ensemble A n'est jamais vérifiée car l'intervalle $[0,1]$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, donc $A = \emptyset$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

$\boxed{B}$: Montrons que B n'est pas un sous-espace vectoriel de E en montrant que 0_E, la fonction nulle, n'appartient pas à B. Soit $f \in B$, alors il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \cos(\omega x).$$

En particulier, on a $f(0) = \cos(0) = 1$. Donc f n'est pas la fonction nulle.

On a montré que quelque soit la fonction f prise dans B, f n'est pas la fonction nulle. Donc la fonction nulle n'appartient pas à B, et par conséquent B n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{C}$: Il faut comprendre quels sont les éléments de C. Il s'agit de l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $[0,1]$ qui s'annulent au moins une fois, mais toutes les fonctions

1. Remarque culturelle : en fait, la multiplication de deux fonctions continues est encore continue, comme un scalaire est une fonction constante (donc continue), la multiplication d'une fonction continue par un scalaire est encore continue. Formellement, on dit que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre, c'est-à-dire un espace vectoriel dans lequel on peut aussi faire des multiplications entre les éléments de l'espace (loi de multiplication interne). D'autres exemples d'algèbres sont les espaces de matrices ou les espaces de polynômes, mais pas $\mathbb{R}^n$ (sauf $\mathbb{R}^1$).

de C ne s'annulent pas nécessairement au même endroit. C'est cette remarque qui donnera un contre-exemple à la stabilité par somme des éléments de C. Prenons

$$f : x \mapsto x \quad \text{ et } \quad g : x \mapsto 1 - x.$$

Alors f est une fonction continue telle que $f(0) = 0$, donc f s'annule en un point de $[0, 1]$ donc $f \in C$. De même, g est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $g(1) = 0$ donc $g \in C$. Mais $f + g$ est la fonction constante égale à 1, qui ne s'annule jamais. Donc $f + g \notin C$. Puisque C n'est pas stable par somme, C n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

$\boxed{D}$: La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est la fonction « partie entière ». La partie entière d'un réel x est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \,;\, n \leq x\}.$$

Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\frac{5}{2} \rfloor = -3$. En particulier, la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ vaut 0 sur $[0, 1[$ et vaut 1 sur $\{1\}$. Cette fonction n'est pas continue sur $[0, 1]$, ainsi que tous ses multiples non nuls. En particulier, $D = \{0_E\}$ est bien un sous-espace de E.

Exercice 4 - Matrices symétriques et anti-symétriques (10 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2 et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $n \times n$. On admet que E est un espace vectoriel.

1. Expliciter une base de E. En déduire la dimension de E.
2. Soit $S = S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $A = A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de E, c'est-à-dire

$$S = \{M \in E \,;\, {}^tM = M\}$$
$$A = \{M \in E \,;\, {}^tM = -M\}.$$

   Montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de E.

   Rappel : La notation ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M, c'est-à-dire la matrice obtenue à partir de M telle que son coefficient en (i, j) soit le coefficient en (j, i) de M pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, si $n = 3$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

   alors la transposée de M est

$${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M \in E$. Montrer que $M + {}^tM \in S$ et que $M - {}^tM \in A$.
4. Soit $f : E \to E$ l'application définie par

$$\forall M \in E,\ f(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

   Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis déterminer l'image et le noyau de f.
5. Montrer que $S \oplus A = E$. En déduire que f est la projection sur S parallèlement à A.

Solution 4

1. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On note $E_{i,j}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de coordonnées (i, j) qui vaut 1. Alors la famille

$$(E_{1,1}, \ldots, E_{1,n}, E_{2,1}, \ldots, E_{2,n}, \ldots, E_{n,1}, \ldots, E_{n,n})$$

est une base de E, qu'on appelle base canonique de E. Dans cette famille, il y a n^2 éléments, donc $\dim(E) = n^2$.

Remarque : Ici, on ne demande pas de prouver que c'est une base, seulement d'en expliciter une. Pour une démonstration du fait que la base canonique est bien une base, on montre facilement qu'elle est libre et génératrice. En effet, si $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice de E, alors

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j}$$

est bien combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique, donc cette famille est génératrice. De plus,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j} = 0_E \Leftrightarrow (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = 0_E \Leftrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = 0$$

donc la base canonique est libre : c'est bien une base !

Le nom « base canonique » signifie que chaque vecteur de la base contribue à une et une seule coordonnée (que ce soit dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathbb{R}_n[X]$), il est donc clair qu'elles soient libres et génératrices.

2. On utilise dans cette question la linéarité de l'application de transposition (partie 7.2 du chapitre 2 du poly de cours) et on vérifie avec les méthodes habituelles que S et A sont des sous-espaces vectoriels de E. Soient $M, N \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lambda M + N \in S$, c'est-à-dire que

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda M + N.$$

Or, par linéarité de l'application de transposition, on a

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda {}^tM + {}^tN.$$

Puis comme $M, N \in S$, ces matrices sont égales à leurs transposées. Finalement, on a

$${}^t(\lambda M + N) = \lambda M + N$$

donc $\lambda M + N \in S$, montrant que S est bien un sous-espace vectoriel de E. On fait un raisonnement identique pour montrer que A est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Voici une deuxième méthode pour montrer que S et A sont des sous-espaces vectoriels de E. On sait que

$$S = \{M \in E\ ;\ {}^tM = M\} = \{M \in E\ ;\ {}^tM - M = 0_E\}.$$

Ainsi, si l est l'application définie sur E par $l(M) = {}^tM - M$, on a $S = \ker(l)$. Il suffit donc de montrer que l est linéaire et de conclure par la question de cours ! On a $l = {}^t\cdot - \mathrm{id}_E$ qui est la somme de deux applications linéaires (l'application de transposition et $-\mathrm{id}_E$), donc l est linéaire. Pour A, on fait pareil avec $l' = {}^t\cdot + \mathrm{id}_E$.

3. Par définition de la transposée d'une matrice, on a
$$^t\big(^tM\big) = M.$$
En effet, le coefficient en (i,j) de $^t(^tM)$ est le coefficient en (j,i) de ^tM, qui lui est le coefficient en (i,j) de M. On conclut donc par linéarité de l'application de transposition : Soit $M \in E$, alors
$$\begin{cases} ^t\big(M + {}^tM\big) = {}^tM + {}^t\big(^tM\big) = {}^tM + M = M + {}^tM \\ ^t\big(M - {}^tM\big) = {}^tM - {}^t\big(^tM\big) = {}^tM - M = -(M - {}^tM). \end{cases}$$
Donc $^tM + M \in S$ et $^tM - M \in A$.
4. L'application f est linéaire car elle est multiple de la somme de l'application de transposition et de l'identité, toutes les deux linéaires. De plus, on a
$$\ker(f) = \{M \in E \ ; \ f(M) = 0_E\} = \left\{M \in E \ ; \ \frac{M + {}^tM}{2} = 0_E\right\} = \big\{M \in E \ ; \ {}^tM = -M\big\} = A.$$
L'image de f, par la question précédente, est incluse dans S. Montrons qu'il y a en fait égalité. On remarque que si $M \in S$ est une matrice symétrique, alors $f(M) = M$. En effet
$$f(M) = \frac{M + {}^tM}{2} = \frac{M + M}{2} = \frac{2M}{2} = M.$$
Donc tout élément de S admet un antécédent par f (lui-même !), ce qui donne l'inclusion réciproque $S \subset \operatorname{im}(f)$. Finalement, l'image de f est S.
5. Vérifions les deux points de la définition d'une somme directe.
   — Montrons que $S + A = E$. Soit $M \in E$, on veut écrire $M = X + Y$ avec $X \in S$ et $Y \in A$. On remarque, grâce à la question 4, que
$$2M = \underbrace{M + {}^tM}_{\in S} + \underbrace{M - {}^tM}_{\in A}.$$
   On pose alors
$$X = \frac{M + {}^tM}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{M - {}^tM}{2} \tag{1}$$
   et on a $M = X + Y$ avec $X \in S$ et $Y \in A$. Donc $S + A = E$.
   — Montrons que $S \cap A = \{0_E\}$. Soit M une matrice symétrique et antisymétrique. On note $a_{i,j}$ le coefficient de M en position (i,j). On a les égalités suivantes :
$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{j,i} & \text{car } M \in S \\ a_{i,j} = -a_{j,i} & \text{car } M \in A. \end{cases}$$
   Donc $a_{j,i} = -a_{j,i}$, ce qui signifie que $a_{j,i} = 0$. Ceci étant vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, tous les coefficients de M sont nuls. Donc $M = 0_E$ et l'intersection $S \cap A = \{0_E\}$.

   Finalement, S et A sont en somme directe : $S \oplus A = E$. De plus, la projection sur S parallèlement à A d'une matrice $M \in E$ est (par définition !) le vecteur de S apparaissant dans la décomposition de $M = X + Y$ avec $X \in S$ et $Y \in A$. Le calcul (1) donne que la projection sur S parallèlement à A de M est
$$X = \frac{M + {}^tM}{2} = f(M).$$
   En particulier, f est l'application de projection sur S parallèlement à A.