Interrogation écrite n°2

ALGÈBRE 3 - L2

28 novembre 2023 - Durée : 40 minutes

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non autorisée.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. La qualité de la rédaction et de l'argumentation, de même que le soin apporté à la présentation, entrent dans une part importante de l'appréciation des copies. Veuillez justifier toutes les réponses. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 - Question de cours (4 points)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition de $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$. Énoncez le théorème du rang, en prenant soin de bien préciser toutes les hypothèses nécessaires. Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, en déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective

(ii) f est injective

(iii) f est surjective.

Exercice 2 - Une projection (8 points)

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -1 \\ -6 & -7 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 - 2e_3 \\ u_2 = -3e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ u_3 = e_1 - e_2 - e_3. \end{cases}$$

1. Soit $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E.
2. Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}_1$.
3. À l'aide de la question précédente et en effectuant le moins de calculs possible, justifier que $f^2 = f$. Déterminer $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ et justifier en une phrase que $\ker(f) \oplus \operatorname{im}(f) = E$.
4. L'endomorphisme f est-il un isomorphisme ?

N'oubliez pas les questions au verso !

Exercice 3 - Matrice compagnon (8 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note P le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$C_x = \begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. Rappeler la valeur de $\det(M)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à première ligne puis en procédant par récurrence, ou bien en développant par rapport à la dernière colonne, calculer $\det(C_x)$. Que remarquez-vous ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ la matrice C_x est-elle inversible ?
4. On note $A = -C_0$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Calculer $A^k e_1$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ sans calculer les puissances de A.

La question suivante est facultative et ne compte que pour un **petit** bonus à la note finale.

5. On note $P(A)$ la matrice définie par

$$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Déduire de ce qui précède que $P(A)e_1 = 0$. Montrer que $AP(A) = P(A)A$, puis en déduire que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(A)e_k = 0.$$

En déduire que $P(A)$ est la matrice nulle.

Remarque : On dit que P est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont des racines de P. En fait, P est le polynôme minimal de A, c'est-à-dire le polynôme non nul de plus bas degré qui annule A. Les racines de P sont alors exactement les valeurs propres de A, et A est trigonalisable (respectivement diagonalisable) si et seulement si P est scindé (respectivement scindé à racines simples).