Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

16 février 2024

Développements limités et calculs d'intégrales

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Définition d'un DL, formule de Taylor (solution)

1. Donnez la définition d'un développement limité (DL) d'une fonction en un point. Donner la définition de la formule de Taylor-Young d'une fonction en faisant bien attention aux hypothèses nécessaires. À quoi sert cette formule ?
2. Si f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et admettant les développements limités suivants en $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2) \\ g(x) = b_0 + b_1(x-a) + o(x-a) \end{cases}$$
Est-ce que le produit fg admet un développement limité en a ? Jusqu'à quel ordre peut-on aller en sachant uniquement ce qui précède ?

Exercice 2 - Intégration par parties (solution)

Définissez la méthode d'intégration par parties.
Application : Calculer

$$\int_0^1 (x^2+x+1)e^x dx \quad \text{et} \quad \int_1^2 x^2 \ln(x) dx$$

Exercice 3 - Changement de variable (solution)

Énoncer le théorème du changement de variable en faisant attention à préciser toutes les hypothèses. Effectuer le changement de variable $y = \arccos(x)$ dans l'intégrale suivante et en déduire qu'elle est égale à $\int_0^\pi \sin(x)^2 dx$.

$$\int_{-1}^1 \sin(\arccos(x)) dx$$

Exercices

Exercice 4 - Valeur moyenne d'une fonction périodique (solution)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique et soit $T > 0$ une période de f. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\int_a^{T+a} f(t)dt.$$

1. En effectuant un changement de variable affine, montrer que

$$\int_0^a f(t)dt = \int_T^{T+a} f(t)dt.$$

2. Utiliser la relation de CHASLES sur $\int_0^T f(t)dt$ pour conclure.
3. Application : montrer que

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \int_0^\pi \cos^2(x)dx$$

puis en déduire que

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

<u>*Indication :*</u> $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Exercice 5 - Racine carrée d'une fonction (solution)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction à valeurs positives et de classe $\mathcal{C}^2$. Le but de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de $f'(x_0)$ et $f''(x_0)$?
   <u>*Indication :*</u> *x_0 est un minimum global.*
2. Rappeler pourquoi si $x_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $f(x_0) \neq 0$, alors $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0.
3. À partir de maintenant, on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ vérifie $f(x_0) = 0$. Si de plus x_0 vérifie $f''(x_0) = 0$, montrer que $f(x) \underset{x_0}{=} o((x - x_0)^2)$ et en déduire que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0.
   <u>*Indication :*</u> *Utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG.*
4. Réciproquement, si $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0, montrer que $f''(x_0) = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 - Un équivalent de $\ln(n!)$ (solution)

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de la suite $(\ln(n!))_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, monter qu'on a l'encadrement

$$\int_1^n \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(t)dt.$$

On pourra commencer par démontrer l'encadrement

$$\int_{k-1}^k \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)dt$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $x > 1$, calculer $\int_1^x \ln(t)dt$.
<u>Indication :</u> *Faire une astucieuse IPP.*
3. En déduire que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

★★☆ Exercice 7 - Sinus cardinal (solution ☜)

Soit sinc la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}(x)$ existe et calculer sa valeur. En déduire qu'il est possible de prolonger la fonction sinc sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue, qu'on continue à noter sinc.
2. En utilisant le développement limité à l'ordre 2 du sinus, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sinc}(x) - \mathrm{sinc}(0)}{x - 0} = 0.$$

Calculer la dérivée de sinc sur $\mathbb{R}^*$, qu'on note sinc′ et montrer que $\mathrm{sinc}'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Ceci montre que sinc est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Que devrait-on faire pour calculer un développement limité de sinc en zéro à un ordre $n \in \mathbb{N}$ grâce à la formule de Taylor ?
4. En procédant autrement que par le calcul de la formule de Taylor de sinc, calculer le développement limité de sinc en zéro à tout ordre.

★★★ Exercice 8 - Partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$ (solution ☜)

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.[1]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que f est continue sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Calculer

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

2. En utilisant la relation de CHASLES, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\frac{1}{N+1}}^{1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \right)$$

3. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\frac{1}{N+1}}^{1} f(x)dx = \ln(N+1) - H_{N+1} + 1$$

où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est la somme partielle d'ordre n de la série harmonique.

4. Rappeler le développement asymptotique de la série harmonique à l'échelle $o(1)$.

5. On admet que

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\frac{1}{N+1}}^{1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Montrer que

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\} dx = 1 - \gamma.$$

1. Ici, la fonction f n'est pas continue, ni même continue par morceaux. Il s'agit de ce qu'on appelle une fonction *réglée*, c'est-à-dire qui possède en tout point de son domaine de définition des limites à droite et à gauche. On admet dans l'exercice que l'intégrale de RIEMANN est bien définie pour les fonctions réglées et que les théorèmes usuels sont toujours valides.

Corrections

Solution 1 - Définition d'un DL, formule de Taylor (☞ exercice)

1. Voir le cours.
2. Le produit fg admet un développement limité au moins jusqu'à l'ordre 1 qui est le minimum des ordres des DL de f et g. Le DL de fg en a à l'ordre 1 est alors

$$fg(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)(x-a) + o(x-a).$$

Solution 2 - Intégration par parties (☞ exercice)

Définition : voir le cours.

- Première intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+x+1)e^x dx &= \left[(x^2+x+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+1)e^x dx\\ &= 3e-1-\left(\left[(2x+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx\right)\\ &= 3e-1-3e+1+2\left[e^x\right]_0^1\\ &= 2(e-1)\end{aligned}$$

- Deuxième intégrale

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\ln(x)dx &= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}dx\\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2\\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}\end{aligned}$$

Solution 3 - Changement de variable (☞ exercice)

Voir le cours pour le théorème. Pour l'application, on a

$$\int_{-1}^1 \sin(\arccos(x))dx = \int_\pi^0 \sin(y)(-\sin(y))dy = \int_0^\pi \sin^2(y)dy.$$

Solution 4 - Valeur moyenne d'une fonction périodique (☞ exercice)

1. On effectue le changement de variable $u = t+T$. On a

$$\int_0^a f(t)dt = \int_T^{T+a} f(u-T)du = \int_T^{T+a} f(u)du$$

car f est T-périodique.

2. On utilise la relation de CHASLES

$$\begin{aligned}\int_a^{T+a} f(t)dt &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{T+a} f(t)dt \\ &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \\ &= \int_0^T f(t)dt.\end{aligned}$$

3. On utilise l'indication :
$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(x+\frac{\pi}{2})$$
puis on effectue le changement de variable affine $y = x + \frac{\pi}{2}$:
$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \int_0^\pi \sin^2(x+\frac{\pi}{2}) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \sin^2(y)dy.$$
Enfin, on utilise le résultat de l'exercice. La fonction $y \mapsto \sin^2(y)$ est périodique et π est une période de $\sin^2$. Donc on a l'égalité
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \sin^2(y)dy = \int_0^\pi \sin^2(y)dy.$$
D'où l'égalité entre ces deux intégrales. Puisque $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on en déduit que
$$\pi = \int_0^\pi 1dx = \int_0^\pi \cos^2(x) + \sin^2(x)dx = 2\int_0^\pi \sin^2(x)dx.$$
En divisant par 2 cette égalité, on a le résultat voulu.

Solution 5 - Racine carrée d'une fonction (☞ exercice)

1. Puisque f est une fonction positive, alors x_0 est un minimum global de f. Et puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.
2. Si $f(x_0) \neq 0$, alors par continuité de f il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x_0 sur lequel f est strictement positive. Puisque la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la composée $\sqrt{f}$ est dérivable sur $]a, b[$, donc en x_0.
3. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on écrit sa formule de TAYLOR-YOUNG en x_0 :
$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2).$$

Or, par la première question, on sait que $f'(x_0) = 0$ et par hypothèse, on a $f(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$. Donc finalement la formule de TAYLOR-YOUNG devient :

$$f(x) \underset{x_0}{=} o((x - x_0)^2).$$

Ceci signifie que

$$\frac{f(x)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

En passant à la racine carrée et en ajoutant le terme $\sqrt{f(x_0)}$ qui est nul, on retrouve le taux d'accroissement de $\sqrt{f}$ en x_0 :

$$\left| \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x - x_0} \right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Donc $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0.

4. On suppose maintenant que $\sqrt{f}$ est dérivable en x_0. Alors le taux d'accroissement de $\sqrt{f}$ en x_0 admet une limite finie quand $x \to x_0$, qui vaut $\sqrt{f''(x_0)/2}$ par la formule de TAYLOR-YOUNG et le même calcul fait à la question précédente. Or,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x - x_0} \leq 0$$

donc $\sqrt{f''(x_0)/2} \leq 0$, donc $\sqrt{f''(x_0)/2} = 0$, donc $f''(x_0) = 0$.

Ainsi, on a le critère suivant : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs positives. Alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, on a $f''(x_0) = 0$.

Solution 6 - Un équivalent de $\ln(n!)$ (☞ exercice)

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'encadrement

$$\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leq \ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt.$$

En sommant l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à n, et l'inégalité de droite pour k allant de 1 à $n - 1$ puis en ajoutant $\ln(n)$, on obtient l'encadrement voulu par la relation de CHASLES et la propriété de morphisme du logarithme :

$$\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leq \ln(n!) \leq \ln(n) + \int_{1}^{n} \ln(t)dt.$$

2. On effectue une intégration par parties où $\ln(t) = u'(t)v(t)$ avec $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$:

$$\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1dt = x\ln(x) - x + 1.$$

3. En utilisant l'encadrement de la question 1 et l'expression de $\int_1^n \ln(t)dt$ de la question 2, on a :

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

En divisant cette chaîne d'inégalités par $n\ln(n)$ (pour $n \geq 2$), on obtient

$$1 - \frac{n-1}{n\ln(n)} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(n) - n + 1}{n\ln(n)}.$$

Par croissance comparée, les deux membres à gauche et à droite de cet encadrement tendent vers 1 en $+\infty$. Par encadrement, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1.$$

Ceci veut exactement dire que $\ln(n!) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Solution 7 - Sinus cardinal (☞ exercice)

1. La fonction sinc est la fonction taux d'accroissement de sin en zéro. Puisque la fonction sin est dérivable en zéro et de dérivée $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, alors

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc}(x) = 1.$$

2. Le DL à l'ordre 2 du sinus en 0 est : $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$. Ainsi, on a :

$$\frac{\operatorname{sinc}(x) - \operatorname{sinc}(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x) - x}{x^2} \underset{0}{=} \frac{o(x^2)}{x^2} \underset{0}{=} o(1).$$

Donc la limite en zéro du taux d'accroissement de sinc en zéro est bien nulle. De plus, sur $\mathbb{R}^*$, la fonction sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme quotient de deux fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\operatorname{sinc}'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{x\cos(x) - x + x - \sin(x)}{x^2} = \underbrace{\frac{\cos(x) - 1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\frac{\operatorname{sinc}(x) - 1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Donc la fonction sinc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est continue, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Il faut dans un premier temps montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puis calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les valeurs des dérivées n-ièmes de sinc en zéro. Ensuite, il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young :

$$\operatorname{sinc}(x) \underset{0}{=} \operatorname{sinc}(0) + \operatorname{sinc}'(0)x + \frac{\operatorname{sinc}^{(2)}(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\operatorname{sinc}^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

4. Puisque sinc est définie comme un quotient de deux fonctions dont on connaît le DL, on peut calculer le DL de sinc directement. On a le DL de sin :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

donc le DL du sinus cardinal en 0 est

$$\operatorname{sinc}(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + o(x^{2n}).$$

Ceci donne immédiatement les valeurs de tous les $\operatorname{sinc}^{(n)}(0)$ par unicité du développement limité !

Solution 8 - Partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$ (☞ exercice)

Toutes les questions sont faites en un calcul. Puisque la fonction $x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$ est bornée sur $]0,1]$, elle est intégrable. On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left\{\frac{1}{x}\right\} dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{x} - n\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) - H_{N+1} + 1 \\
&= 1 - \gamma
\end{aligned}$$

où la première égalité est bien définie car tout est positif (l'intégrande et donc le terme général de la série).