Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

2 avril 2024

Fonctions de plusieurs variables

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Dérivées partielles (solution ☜)

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Définir les dérivées partielles de f. Combien y en a-t-il ? (n ? m ? $n+m$? nm ?)
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2 + e^{yz} + xy \end{pmatrix}.$$

   On admet que f admet des dérivées à tout ordre. Calculer toutes les dérivées partielles de f.
3. Qu'est-ce qu'une dérivée partielle d'ordre supérieur ? Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$. Sans aucun calcul, donner la valeur de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$. Comment avez-vous fait ?
4. Calculer le gradient et la matrice hessienne au point (x,y) de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = x^2 e^{xy}.$$

Exercice 2 - Extrema et points critiques (solution ☜)

1. Définir la notion d'extremum d'une fonction à deux variables. Quelle est la différence entre un extremum local et un extremum global ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles et soit (x_0, y_0) un extremum de f. Que peut-on dire sur les dérivées partielles de f au point (x_0, y_0) ? Est-ce une condition suffisante pour qu'un point soit un extremum ? Si non, donner un contre-exemple avec une fonction à une variable. Si oui, démontrer le résultat.
3. Comment peut-on affiner la recherche d'extrema en utilisant les dérivées partielles d'ordre 2 ?
4. Trouver les extrema locaux de la fonction f définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2.$$

   Indication : *Pour vérifier que $(0,0)$ est un extremum local, on pourra montrer que $0 \leq f(x,y) \leq 1$ si $x^2 + y^2 \leq 1$.*

Exercice 3 - Domaines simples et intégrales doubles (solution ☜)

1. Qu'est-ce qu'un domaine simple ? Donner un exemple de domaine simple différent d'un rectangle et le représenter sur un dessin.

2. Comment calculer l'aire d'un domaine simple ? Calculer l'aire d'un domaine simple de votre choix différent d'un rectangle.
3. Soit f une fonction à une variable à valeurs positives. Montrer que le calcul de $\int_a^b f$ est en fait un calcul d'aire d'un certain domaine simple que vous expliciterez.
4. Expliciter la formule du changement de variable polaire et calculer l'aire d'un disque de rayon R en utilisant un changement de variable polaire.

Exercices

★★☆ Exercice 4 - Intégrale de Gauss (solution)

On cherche à calculer la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

1. Effectuer une IPP ou un changement de variable. Est-ce que ça marche ?
2. Exprimer I^2 comme une intégrale double puis effectuer un changement de variable polaire.
3. En déduire la valeur de I^2, puis celle de I.

★☆☆ Exercice 5 - Une recherche de maximum (solution)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \leq 0.$$

On veut montrer que f atteint son maximum en $(0,0)$.

0. Comment aborderiez-vous cette question ? Essayez et présentez quelques pistes.
1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $g(t) = f(xt, yt)$. Calculez g' puis en déduire que g atteint son maximum en 0 à l'aide d'un tableau de variation.
2. Conclure.

★½☆ Exercice 6 - Une EDP d'ordre 2 facile (solution)

Trouver toutes les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \tag{$\star$}$$

★☆☆ Exercice 7 - Cauchy-Riemann et harmonicité (solution ☞)

Soient $R, I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions admettant des dérivées partielles à tout ordre. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$ les égalités suivantes sont vérifiées, appelées égalités de Cauchy-Riemann

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial I}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{\partial I}{\partial x}(x,y) \end{array}\right.$$

1. Montrer que R et I sont harmoniques, c'est-à-dire que

$$\Delta R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 0.$$

2. Sans calculer de dérivées partielles d'ordre 2, montrer que les fonctions $R(x,y) = e^x \cos(y)$ et $I(x,y) = e^x \sin(y)$ sont harmoniques.
3. Montrer que les fonctions $R(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $I(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ sont harmoniques (on admettra que les questions précédentes restent vraies sur $\mathbb{R}^*$).

Remarque : En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, cet exercice montre que la partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques. La fonction de la question 2. est l'exponentielle complexe et la fonction de la question 3. est l'inverse complexe.

Corrections

Solution 1 - Dérivées partielles (☞ exercice)

1. Voir le cours pour la définition. Il y en a n.
2. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ 2x+y \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ ze^{yz}+x \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ ye^{yz} \end{pmatrix}.$$

3. Voir le cours pour les dérivées partielles d'ordre supérieur. Puisque f admet des dérivées à l'ordre 1 et 2, alors le théorème de SCHWARTZ s'applique et on a donc

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z).$$

   Il reste à calculer la valeur :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} xz \\ ze^{yz}+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Le gradient s'obtient en exprimant les dérivées partielles en colonne :

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x+x^2y)e^{xy} \\ x^3e^{xy} \end{pmatrix}.$$

   Et la matrice hessienne s'obtient en mettant en colonne dans une matrice les dérivées partielles du gradient :

$$\mathrm{Hess}(g)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \nabla g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \nabla g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+4xy+x^2y^2)e^{xy} & (3x^2+x^3y)e^{xy} \\ (3x^2+x^3y)e^{xy} & x^4e^{xy} \end{pmatrix}.$$

Solution 2 - Extrema et points critiques (☞ exercice)

1. Voir le cours pour la définition.
2. Les dérivées partielles s'annulent. Cette condition n'est pas suffisante : pour une fonction à une variable, un contre-exemple est la fonction $f : x \mapsto x^3$. On a $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.
3. On calcule le déterminant de la matrice hessienne et selon le signe on peut affiner la détection d'extrema (voir le cours pour plus de détails).

4. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x(x^2+y^2-1); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2-1).$$

Celles-ci s'annulent simultanément si et seulement si

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{ou} \quad x^2+y^2 = 1.$$

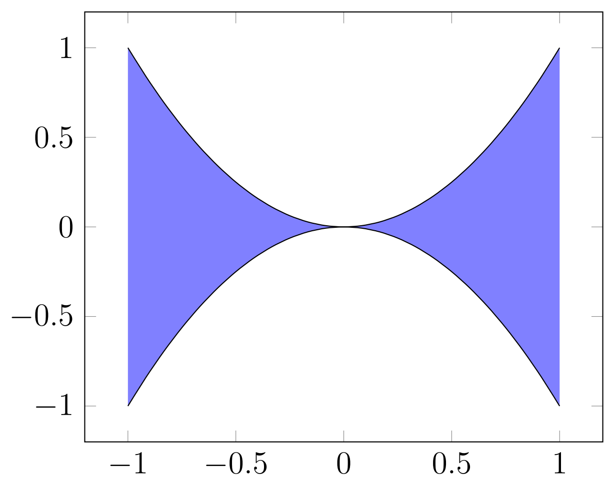
Or, f est une fonction positive (carré d'un réel) et $f(x,y) = 0$ si (et seulement si) $x^2+y^2 = 1$. Donc les points (x,y) tels que $x^2+y^2 = 1$ sont des minima globaux de f.

De plus, $f(0,0) = 1$ et si $x^2+y^2 \leq 1$, alors $f(x,y) \leq 1$. Donc $(0,0)$ est un maximum local de f.

Solution 3 - Domaines simples et intégrales doubles (☛ exercice)

1. Voir le cours pour la définition. Un exemple de domaine simple est

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -x^2 \leq y \leq x^2\}.$$



2. L'aire d'un domaine simple $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \; ; \; a \leq x \leq b \text{ et } u^-(x) \leq y \leq u^+(x)\}$ se calcule par une intégrale double où l'intégrande est 1 et les bornes sont données par la définition du domaine simple :

$$\mathcal{A}_D = \iint_D 1dxdy = \int_a^b \int_{u^-(x)}^{u^+(x)} 1dydx.$$

Par exemple, l'aire du domaine simple de l'exemple précédent est

$$\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} 1dydx = \int_{-1}^1 2x^2dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

3. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Alors D est un domaine simple et

$$\iint_D 1 dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} 1 dy dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Donc le calcul de $\int_a^b f$ est en fait un calcul d'aire d'un domaine simple.

4. Voir le cours pour la formule du changement de variable. Un disque de rayon R est un domaine simple défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; -R \leq x \leq R \text{ et } -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Le changement de variable polaire est $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Le domaine D devient alors

$$D' = \{(\theta, r) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}_+ \; ; \; r \leq R\}$$

(pas de condition sur θ) qui est un domaine simple rectangulaire. On a donc :

$$\iint_D 1 dy dx = \iint_{D'} r d\theta dr = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \pi R^2.$$

Solution 4 - Intégrale de Gauss (☞ exercice)

1. Si on essaye de faire une IPP, on obtient :

$$I = \left[-x\exp(-x^2/2)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2/2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2/2) dx.$$

On n'est pas bien avancés... Si on essaye un changement de variable, par exemple $u = x^2$, on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-u/2)}{\sqrt{u}} du.$$

Pareil...

2. On a

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right).$$

Puisque x est une variable muette, on change le deuxième en y. Mais alors, tout le second terme est une constante qu'on peut rentrer dans la première intégrale, et tout ce qui dépend de x est une constante pour y qu'on pourra rentrer dans l'intégrale aussi. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dydx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dydx. \end{aligned}$$

On effectue maintenant un changement de variable polaire (il faut savoir l'appliquer immédiatement, ce n'est pas nécessaire de le refaire à la main comme dans ce corrigé) : on pose

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$$

et la matrice jacobienne de φ est

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

qui a pour déterminant (ce qu'on appelle le *jacobien* de φ)

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r.$$

De plus, le domaine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \varphi(D)$ où $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\}$. Finalement, la formule du changement de variable donne :

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) rdrd\theta.$$

3. Le théorème de Fubini permet d'intervertir les deux intégrales :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1d\theta = 2\pi.$$

Finalement, puisque I est positive, alors $I = \sqrt{2\pi}$. C'est la valeur de l'intégrale de Gauss.

Solution 5 - Une recherche de maximum (☞ exercice)

1. On utilise la formule de composition :

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(xt, yt) + y\frac{\partial f}{\partial y}(xt, yt).$$

Ainsi, en multipliant l'égalité précédente par t, et en utilisant la relation de l'énoncé, on a :

$$tg'(t) \leq 0.$$

Donc g' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive sur $\mathbb{R}_-^*$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc g atteint son maximum en zéro.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose g comme dans la question précédente. On a alors $g(1) \leq g(0)$ puisque g est une fonction qui atteint son maximum en 0. Donc

$$f(x, y) \leq f(0, 0).$$

Donc f atteint son maximum en $(0, 0)$.

Solution 6 - Une EDP d'ordre 2 facile (☞ exercice)

On procède par analyse-synthèse. Soit f une telle fonction. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est constante (en x). Autrement dit, c'est une fonction qui ne dépend uniquement de y. On la note ψ : pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \psi(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En intégrant, on a, en notant Ψ une primitive de ψ :

$$\Psi(y) - \Psi(0) = f(x, y) - f(x, 0).$$

Ainsi, on a

$$f(x, y) = \Psi(y) + f(x, 0) - \Psi(0).$$

On note g la fonction à une variable définie par $g(x) = f(x, 0)$ et h la fonction à une variable définie par $h(y) = \Psi(y) - \Psi(0)$. Ainsi, f est la somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de x et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de y.

On passe à la synthèse : soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui s'écrit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x) + h(y)$$

où g, h sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0 + h'(y)\right) = 0.$$

Conclusion : Les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient $(\star)$ sont exactement les fonctions qui sont sommes d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de x et d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de y.

Solution 7 - Cauchy-Riemann et harmonicité (☞ exercice)

1. On le fait pour R, le même raisonnement en échangeant R et I donnera le résultat pour I. On a :
$$\Delta R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right).$$
En utilisant les égalités de Cauchy-Riemann, on obtient que
$$\Delta R = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial I}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial I}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x}.$$
En utilisant le théorème de Schwartz, on obtient le résultat : $\Delta R = 0$.
2. Il suffit de calculer les dérivées partielles de R et I puis de montrer qu'elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann. On a :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$
Les égalités de Cauchy-Riemann sont bien vérifiées, donc les fonctions R et I sont harmoniques.
3. On procède de même que dans la question précédente :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial R}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial I}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$
Les égalités de Cauchy-Riemann sont bien vérifiées, donc les fonctions R et I sont harmoniques.