Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

23 et 25 janvier 2024

Séries numériques

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Convergence des séries de Riemann et applications (solution ☞)

1. Qu'est-ce qu'une série de Riemann ? À quelle condition une série de Riemann converge ?
2. Application : pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ chacune des séries suivantes converge ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1+n+n^2+n^\alpha}; \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^\alpha}$$

Exercice 2 - Règles de Cauchy et de D'Alembert (solution ☞)

1. Énoncer la règle de D'Alembert en faisant attention à préciser toutes les hypothèses.
2. Application : Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série suivante converge ?

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}\alpha^n}{n!}$$

3. Énoncer la règle de Cauchy en faisant attention à préciser toutes les hypothèses.

★⯪☆ **Exercice 3 - Règle d'Abel (solution ☞)**

1. Énoncer la règle d'Abel en faisant attention à préciser toutes les hypothèses.
2. Application (Exercice) : Montrer que la série suivante converge si et seulement si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n}$$

<u>*Indication :*</u> *Utiliser la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique pour borner les sommes partielles. Utiliser la formule* $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ *et majorer* $|\sin|$ *par* 1

Exercices

★☆☆ Exercice 4 - Une série avec des sinus (solution)

Montrez que la série suivante converge et calculer sa somme.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$$

Indication : Utiliser que $|\sin(x)| \leq |x|$ *puis linéariser* $\sin^3$

★★⯪ Exercice 5 - La règle du $n^\alpha u_n$ n'est pas une CNS (solution)

Version difficile

1. Énoncez la règle du $n^\alpha u_n$, puis trouvez une série $\sum u_n$ qui converge mais telle que pour tout $\alpha > 1$, la suite $(n^\alpha u_n)_n$ ne tend pas vers zéro.
   Indication : Chercher des séries alternées
2. Mieux : trouvez une série $\sum u_n$ à termes positifs qui converge mais telle que pour tout $\alpha > 0$, la suite $(n^\alpha u_n)_n$ n'est pas bornée.
   Indication : Chercher des séries lacunaires

Version moins difficile

1. Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant :
$$\exists \alpha > 1,\ n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrer que la série $\sum_n u_n$ converge mais que pour tout $\alpha > 1$ la suite $(n^\alpha u_n)_n$ ne tend pas vers zéro.
   Indication : Borner les sommes partielles par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 6 - Terme général d'une SATP décroissante (solution)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que la suite $(u_n)_n$ soit décroissante. Si la série converge, montrez que $\lim_n nu_n = 0$. Donnez un contre-exemple si la suite n'est pas décroissante.
Indication : Considérer la suite $(S_{2n} - S_n)_n$

Exercice 7 - Partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$ (solution)

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x. Montrer que l'intégrale suivante est bien définie et calculer sa valeur

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx$$

Indication : $H_n =_{+\infty} \ln(n) + \gamma + o(1)$

Exercice 8 - Développement limité de la série harmonique (solution)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que $\dfrac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = H_n - \ln(n).$$
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et positive. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers un réel positif noté γ.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k-1}.$$
Exprimer P_n et I_n en fonction de H_n et H_{2n} puis en déduire que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

★⯪☆ Exercice 9 - Dérivons la série géométrique (solution)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\sum_n x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1[$. Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$?
2. Soit $x \in]-1, 1[$ fixé. On considère la série $\sum_n nx^{n-1}$. Montrer qu'elle converge, puis calculer sa somme.

   Indication : On pourra commencer par calculer les sommes partielles de la série géométrique de la question 1 puis dériver l'égalité obtenue.

★⯪☆ Exercice 10 - Calcul de série type exponentielle (solution)

On souhaite calculer, si possible, la somme des séries suivantes

$$(1) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \qquad (2) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n+1}{n!} \qquad (2) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}.$$

1. Montrer que ces trois séries convergent. Rappeler la valeur de la série (1)
2. En déduire la somme de la série (2).
3. Exprimer n^3 comme une combinaison linéaire de 1, n, $n(n-1)$ et $n(n-1)(n-2)$. En déduire la somme de la série (3).

Remarque : Soit $B(n)$ le n-ième nombre de Bell, alors on a l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} = B(k)e$.

Corrections

Solution 1 - Convergence des séries de Riemann et applications (☞ exercice)

1. Voir le cours
2. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$ et quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{1+n+n^2+n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}.$$

   Par comparaison de séries à terme positifs, et puisque la série de terme général $1/n^2$ converge par le critère de convergence des séries de Riemann, alors la série de l'énoncé converge quelque soit la valeur de α.
3. La suite $\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^\alpha}\right)_n$ est positive et équivalente en $+\infty$ à la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)_n$ qui aussi positive. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de l'énoncé converge si et seulement si la série $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ converge. Par le critère de convergence des séries de Riemann, cette série converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$.

   On peut également procéder sans utiliser la notion d'équivalence de suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{n}{n^\alpha} \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^\alpha} \leq \frac{2n}{n^\alpha} = \frac{2}{n^{\alpha-1}}.$$

   Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, si $\alpha > 2$ alors la série converge, et si $\alpha \leq 2$ alors la série diverge.

Solution 2 - Règles de Cauchy et de D'Alembert (☞ exercice)

1. Voir le cours.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\sqrt{n}\alpha^n}{n!}$. La suite $(u_n)_n$ est une suite à termes positifs. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\alpha}{\sqrt{n(n+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

   donc la série $\sum_n u_n$ converge par le critère de D'Alembert.
3. Voir le cours.

Solution 3 - Règle d'ABEL (☞ exercice)

1. Voir le cours.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = e^{in\theta}.$$
Tout d'abord, si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $(v_n)_n$ est la suite constante égale à 1, et la série $\sum u_n v_n$ est la série harmonique qui est divergente. Dans le cas où $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, on calcule :
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} v_n = \sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^n$$
c'est la somme des n premiers termes d'une série géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$, on a donc
$$T_n = \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)}}{1 - e^{i\theta}} = e^{-i\theta/2} \frac{e^{i\theta} - e^{i\theta(n+1)}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = e^{i\theta/2} \frac{1 - e^{in\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = e^{i\theta(n+1)/2} \frac{e^{-in\theta/2} - e^{in\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}}.$$
On utilise la formule $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ pour obtenir
$$T_n = e^{i\theta(n+1)/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|T_n| = \frac{|\sin(n\theta/2)|}{|\sin(\theta/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} < +\infty.$$
Donc la suite $(T_n)_n$ est bornée. On peut alors appliquer le critère d'ABEL ce qui montre que la série $\sum_n u_n v_n$ converge.

Solution 4 - Une série avec des sinus (☞ exercice)

Tout d'abord, la série converge bien car le terme général est équivalent à la série de terme général $\pi^3 3^{-2n-1}$ qui est un multiple d'une série géométrique de raison $1/9 < 1$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right)$$
(À redémontrer si vous ne savez pas faire !) En particulier, on a :
$$\sum_{n=1}^{N} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \left(3^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - 3^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{3^{n-1}}\right)\right)$$

Par téléscopage, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{N} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \frac{3^N}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^N}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$$

Solution 5 - La règle du $n^\alpha u_n$ n'est pas une CNS (☞ exercice)

1. La règle du $n^\alpha u_n$ est :

   Théorème : *Soit $\sum u_n$ une série numérique. S'il existe $\alpha > 1$ telle que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ converge vers 0, alors la série converge.*

   Un contre exemple facile peut s'obtenir via les séries de Bertrand : on sait que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$ converge, mais si $\alpha > 1$, alors $n^\alpha u_n = \frac{n^{\alpha-1}}{\ln(n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   Un autre contre exemple facile peut s'obtenir en utilisant une série alternée : la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge (critère spécial des séries alternées) mais $n^\alpha u_n = (-1)^n n^{\alpha-1}$ est le terme général d'une suite divergente.

2. L'idée est de prendre une série très lacunaire. Prenons par exemple :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin 2^{\mathbb{N}} \\ \dfrac{1}{k^2} & \text{si } n = 2^k \end{cases}$$

   Alors la série $\sum u_n$ est à termes positifs et converge (somme de Riemann), mais si $\alpha > 0$, on a :

$$n^\alpha u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin 2^{\mathbb{N}} \\ \dfrac{2^{\alpha k}}{k^2} & \text{si } n = 2^k \end{cases}$$

   En particulier, la sous-suite $(u_{2^k})_k$ de $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, donc $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

Solution 6 - Terme général d'une SATP décroissante (☞ exercice)

Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, on a :

$$\sum_{n=N+1}^{2N} u_n \geq N u_{2N} \geq 0$$

En multipliant par 2 ces inégalités, et en utilisant le fait que la série $\sum u_n$ converge, on obtient par encadrement que $(2N)u_{2N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ensuite, toujours par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on a :

$$0 \leq (2N+1)u_{2N+1} \leq (2N+1)u_{2N} = (2N)u_{2N} + u_{2N}$$

Par ce qui précède, le membre de droite tend vers zéro en $+\infty$. On a donc par encadrement : $(2N+1)u_{2N+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, en rassemblant les termes paris et impairs, on a que $u_N = o(\frac{1}{N})$.

Pour trouver un contre exemple, l'idée est de prendre une série lacunaire. Posons $u_n = 0$ si n n'est pas un carré parfait, et $1/n$ si n est un carré parfait. Alors la série $\sum u_n$ converge (série de Riemann). Mais $nu_n = 0$ si n n'est pas un carré parfait et 1 si n est un carré parfait, donc $(nu_n)_n$ ne tend pas vers 0.

Solution 7 - Partie fractionnaire de $\frac{1}{x}$ (☞ exercice)

La fonction $x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\}$ est bornée sur $]0,1]$ donc intégrable. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\} dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left\{\frac{1}{x}\right\} dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{x} - n\right) dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) - H_{N+1} \\
&= \gamma
\end{aligned}$$

où la première égalité est bien définie car tout est positif (l'intégrande et donc le terme général de la série).

Solution 8 - Développement limité de la série harmonique (☞ exercice)

1. La fonction $x \mapsto 1/x$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc l'encadrement suivant pour tout $k \geq 2$
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx. \tag{1}$$
En sommant les inégalités de 2 à n, et en ajoutant 1, on obtient que
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} dx.$$
Donc
$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$
On divise par $\ln(n)$ cette chaîne d'inégalité, on obtient
$$\frac{1-\ln(2)}{\ln(n)} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$
Par encadrement, on a bien
$$\frac{H_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
2. Montrons que $(u_n)_n$ et décroissante. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right)}_{\leq 0} dx \leq 0.$$
Donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante. De plus, en sommant la première inégalité de (1) de 1 à n, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) \leq H_n$$
donc
$$0 \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n) = u_n.$$
Donc la suite $(u_n)_n$ est positive. Puisqu'elle est décroissante, alors elle converge vers un réel positif noté γ.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P_n = \frac{1}{2} H_n \quad \text{et} \quad I_n = H_{2n} - P_n = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

De plus, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{(-1)^k}{k}$, alors on a

$$A_n = P_n - I_n = \frac{1}{2}H_n - H_{2n} + \frac{1}{2}H_n = H_n - H_{2n}.$$

En reprenant la suite $(u_n)_n$ de la question précédente, on a donc

$$A_n = u_n + \ln(n) - u_{2n} - \ln(2n) = u_n - u_{2n} - \ln(2).$$

Et puisque la suite $(u_n)_n$ converge vers γ, on a finalement

$$A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma - \gamma - \ln(2) = -\ln(2).$$

D'où le résultat.

Solution 9 - Dérivons la série géométrique (☞ exercice)

1. Si $x \in \mathbb{R}\backslash]-1,1[$, alors la suite $(x^n)_n$ ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement. Sinon, on a
$$n^2 x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc par la règle du $n^\alpha u_n$, la série converge. Sa somme est alors (c'est du cours)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

2. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-1,1[$. De plus, on a l'égalité suivante puisque $S_n(x)$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique :
$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
On dérive cette égalité, on a alors :
$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2}.$$
Il reste deux choses à faire. Premièrement, il faut montrer que la série $\sum_k kx^{k-1}$ converge, puis que le membre de droite, à x fixé, converge vers une valeur réelle lorsque $n \to +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on aura le résultat.

(a) On applique la règle du $n^\alpha u_n$: on a $k^2(kx^{k-1}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc la série $\sum_k kx^{k-1}$ converge.

(b) Le dénominateur étant une constante (x est fixé), il faut que le numérateur converge pour avoir la convergence du membre de droite. Le terme $1 + x^{n+1}$ converge vers 1 en $+\infty$ car $x \in]-1,1[$ et le terme $(n+1)x^n$ converge vers 0 (croissance comparée). Finalement, on a :

$$\frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En passant à la limite, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Remarque : On a dérivé une fonction en dérivant chaque terme de sa série entière. Ce n'est pas toujours possible !

Solution 10 - Calcul de série type exponentielle (☞ exercice)

1. On applique la règle du $n^\alpha u_n$ avec $\alpha = 2$ pour ces trois séries. On a

$$\frac{n^2}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0; \qquad \frac{n^2(n+1)}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0; \qquad \frac{n^5}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc ces trois séries convergent. De plus, la somme de la série (1) est e (c'est du cours).

2. Puisque les séries de terme général $\frac{1}{n!}$ et $\frac{n}{n!}$ sont à terme positifs, on peut séparer la série en deux :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1+n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n!}$$

et puisque toutes les séries ci-dessus convergent, cette égalité est vraie sur leurs sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e + e = 2e.$$

3. En partant du plus haut degré, on retrouve que

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n!}.$$

Comme à la question précédente, toutes ces séries convergent donc on peut passer aux sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= (1+3+1)e \\
&= 5e.
\end{aligned}$$