Université de TOURS - L2S3 - ALGÈBRE - 2024/2025

CONTRÔLE CONTINU 1

Exercice 1

1. Le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$ est-il un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

   $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$,

2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

   $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2z = x + 4y\}$, $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0 \text{ et } x^2 = 0\}$.

3. Le sous-ensemble F de $\mathbb{R}[X]$ est-il un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

   $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \int_{-1}^{1} t\,P(t)\,dt = 0\right\}$.

Exercice 2 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), \quad u_2 = (2, 1, 3, 1), \quad u_3 = (4, 1, 9, -1), \quad v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (0, 0, 1, 0).$$

1. On pose $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
   (a) Quelle est sa dimension ?
   (b) Donner une base de G.
   (c) Proposer un supplémentaire de G dans E.
   (d) Trouver un système d'équations définissant G.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Quelle est sa dimension ?
   (b) Donner une base de F.
   (c) Trouver une équation définissant F.
3. À l'aide des questions précédentes, prouver que $F \bigcap G$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.
4. Donner une base de $F + G$.

Exercice 3 Soit

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice D diagonale et une matrice N dont les coefficients diagonaux sont nuls telles que $M = D + N$.
2. Sans justification, exprimer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Exprimer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en justifiant soigneusement.
4. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 4</u> Soient $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et x des réels, et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_{n-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Dans cette question, $n = 2$. Calculer $\det(xI_n - A_n) = \begin{vmatrix} x & a_1 \\ -1 & a_0 + x \end{vmatrix}$.
2. Dans cette question, $n = 3$. Calculer $\det(xI_n - A_n) = \begin{vmatrix} x & 0 & a_2 \\ -1 & x & a_1 \\ 0 & -1 & a_0 + x \end{vmatrix}$.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer en développant par rapport à la première ligne que $\det(xI_{n+1} - A_{n+1}) = x \det(xI_n - A_n) - a_n$
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$,
$$\det(xI_n - A_n) = x^n + a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

<u>Exercice 5</u> On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

1. Quelle suite correspond à l'élément nul $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$?
2. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels.
Si oui, le démontrer, si non, donner un contre-exemple.
$F_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_2 = 0\}$, $F_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_3 = -1\}$,
$F_3 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\}$, $F_4 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0\}$.
3. (a) On définit
$$F_P = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq 0,\ u_{2n} = 0\}$$
$$F_I = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq 0,\ u_{2n+1} = 0\}.$$
Montrer que F_P est un $\mathbb{R}$-sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On admet que F_I est également un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $F_P \bigoplus F_I = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. On pose $v = (1, 1, ..., 1, ...)$ la suite constante égale à 1 et $G = \mathrm{Vect}\, v$.
   (a) Prouver que F_3 et G sont en somme directe.
   (b) A-t-on $F_3 \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
5. On pose $H = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty\right\} \bigcup \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$.
Ce sous-ensemble est-il un sous-espace vectoriel ?