Université de TOURS - L2S3 - ALGÈBRE - 2024/2025

CONTRÔLE CONTINU 2

Tous documents, tous appareils électroniques et toutes intelligences artificielles interdits. L'énoncé comporte <u>deux</u> pages.

<u>Exercice 1</u> Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Donner la définition du noyau de f noté $\operatorname{Ker} f$ et de l'image de f notée $\operatorname{Im} f$.
2. Énoncer le théorème du rang en prenant soin de préciser toutes les hypothèses.
3. Montrer que si E est de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) g est injective,
   (b) g est surjective,
   (c) g est bijective.

<u>Exercice 2</u> Dans $\mathbb{R}^2$, soit $u = (1, 2)$, $v = (1, 1)$, $F = \operatorname{Vect}(u)$ et $G = \operatorname{Vect}(v)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$
3. Soit p (resp. q) la projection sur F parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à F).
   Déterminer $p(x)$ et $q(x)$ pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
   Déterminer $s(x)$ pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer les applications $s \circ s$, $s \circ p$ et $s \circ q$.

<u>Exercice 3</u> On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est A.
   (a) Calculer $f(1, 2, -1)$.
   (b) Déterminer si A est trigonalisable.
   (c) Déterminer si de plus elle est diagonalisable.
   (d) Déterminer une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
   (e) Donner les matrices de passage $P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$, $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$ ainsi qu'une matrice diagonale D telle que $A = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} D P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$.
   (f) Prouver soigneusement par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ où $P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$.

2. Soit la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
On note $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est B.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.
   (b) Déterminer si B est trigonalisable.
   (c) Déterminer si de plus elle est diagonalisable.
   (d) Soient les matrices
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -7 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
      i. Calculer PQ.
      ii. Calculer $T = QBP$.
      iii. Que peut-on en conclure sur g ?
   (e) En remarquant qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice N nilpotente telle que $T = D + N$, déterminer l'expression de T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : La matrice P de la question 1 est différente de la matrice P de la question 2.

Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'' - y' = 2y$.
2. Trouver toutes les suites vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

Exercice 5 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

1. Justifier pourquoi l'ensemble $E \setminus \mathrm{Ker}(u^{n-1})$ est non vide.

   Dans la suite de l'exercice, on fixe $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{n-1})$.
2. Montrer que les vecteurs $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ sont tous non nuls.
3. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_E$.
   En appliquant l'endomorphisme u^{n-1} à l'égalité précédente, montrer que $\lambda_0 = 0$.
4. Montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.
5. En déduire que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
6. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Barème indicatif (pouvant être modifié) :

1. Exercices 1 à 3 : 16 points
2. Exercice 4 et 5 : 4 points