Université de TOURS - L2S3 - ALGÈBRE - 2024/2025

Interrogation - Sujet 1

Exercice 1

1. On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^n pour $n \geq 2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide du Binôme de Newton, calculer A^n (on remarquera que $A = I_2 + N$).

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n le déterminant de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2n+1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2n+1 & 0 & 2n & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 2n & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui appartient à $\mathcal{M}_{2n+2}(\mathbb{R})$.

Par exemple $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer Δ_0 et Δ_1.
2. Dans le cas général d'un entier n quelconque, exprimer Δ_{n+1} en fonction de Δ_n à l'aide d'un développement par colonne suivi d'un développement par ligne.
3. En déduire l'expression générale de Δ_n.

Exercice 3

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E. Justifier vos réponses. Dans le cas où il s'agit bien d'un sous-espace-vectoriel, indiquer une famille génératrice.

1. $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leq 3 \text{ et } P(1) = P(2)\}$ pour $E = \mathbb{R}[X]$,
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 3x + y + 2z - t^2 = 0\}$ pour $E = \mathbb{R}^4$.

Exercice 4

1. Déterminer l'équation décrivant $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ pour $u_1 = (-1, 1, 1)$ et $u_2 = (3, 1, -1)$.
2. Déterminer une famille génératrice du sous-espace vectoriel $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 2z\}$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.