Université de Tours
Licence de Mathématiques

Contrôle continu 2 — Décembre 2024

EP 2 : Arithmétique — Semestre 3

L'épreuve dure 2h. Les exercices sont indépendants mais les questions dans chaque exercices sont interdépendantes. La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée.

Exercice 1 .
Vrai ou Faux (justifier en invoquant éventuellement un théorème du cours ou donner un contre-exemple).
1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha a + \beta b = 37$ alors $(a, b) = 37$.
2 Soient $a, b \in \mathbb{N}$ $pgcd(5a + 2b, 2a + 2b) = pgcd(a, b)$.
3 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^5 - n$ est divisible par 30
4 3 divise $2^{33} + 1$
5 $3^{21} \equiv 1$ modulo 14
6 La période de la fonction $\cos(\frac{\pi x}{4}) + \cos(\frac{\pi x}{9}) + \cos(\frac{\pi x}{6})$ est égale à 216.
7 Soit ϕ l'indicatrice d'Euler. $\phi(1000000) = 400000$.

Exercice 2 .
1 Résoudre l'équation diophantienne

$$1 = 28x + 15y \quad (*)$$

2 Résoudre le système

$$\begin{cases} x & \equiv 3 \; mod \; 28 \\ x & \equiv 12 \; mod \; 15 \end{cases} \tag{1}$$

(on peut utiliser (*)).
3 Résoudre $15x \equiv 2$ modulo 28 (on peut utiliser (*)).

Exercice 3 .
Le but de cet exercice est de calculer le nombre de solutions modulo n de $x^2 - 1 \equiv 0 \quad$ mod. n.
Soit $\rho(n)$ le nombre de racines distinctes modulo n de l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo n .
1 Résoudre $x^2 = 1$ modulo 2, $x^2 = 1$ modulo 3 et $x^2 = 1$ modulo 5, puis en déduire que $\rho(2) = 1$, $\rho(3) = 2$ et $\rho(5) = 2$.
2 A l'aide du théorème chinois, trouver les racines modulo 15 de $x^2 \equiv 1$ modulo 15 et vérifier que $\rho(15) = 4$.
3 Montrer que si p est premier, $ab \equiv 0 \, mod \, p \Leftrightarrow a \equiv 0 \, mod \, p$ ou $b \equiv 0 \, mod \, p$. En déduire que si p est un premier impair alors $\rho(p) = 2$.
4 Plus généralement montrer que si $(n_1, n_2) = 1$ alors $\rho(n_1 \cdot n_2) = \rho(n_1) \cdot \rho(n_2)$. (on peut utiliser le théorème chinois).
5 Calculer le nombre de racines de $x^2 - 1 \equiv 0$ modulo 1122 (on pourra remarquer que 11 divise 1122).

Exercice 4 .
On considère indépendamment les deux systèmes suivants

$$(S_1) : \begin{cases} x & \equiv & 5 \; mod \; 6 \\ x & \equiv & 3 \; mod \; 10 \\ x & \equiv & 8 \; mod \; 15 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) : \begin{cases} x & \equiv & 1 \; mod \; 6 \\ x & \equiv & 6 \; mod \; 10 \\ x & \equiv & 5 \; mod \; 15 \end{cases} .$$

1 Que peut nous dire, a priori, le théorème des restes chinois sur les solutions de (S_1) et (S_2) ?
2 Réécrire chacun des systèmes (S_1) et (S_2) comme des systèmes de 6 congruences modulo des nombres premiers. En déduire que (S_2) n'a pas de solutions et simplifier (S_1) en un système de trois congruences.
3 Trouver toutes les solutions $x \in \mathbb{Z}$ de (S_1). Combien y en a-t-il modulo $6 \times 10 \times 15 = 900$?
4 En déduire toutes les solutions $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$(S_1') : \begin{cases} x^3 & \equiv & 5 \; mod \; 6 \\ x^3 & \equiv & 3 \; mod \; 10 \\ x^3 & \equiv & 8 \; mod \; 15 \end{cases} .$$