Interrogation écrite

Université de Tours - L2S3 - Arithmétique - 14/10/2024
Durée : 15 minutes

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (5 points) Dans cet exercice, $a, b, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1) Si a et b sont négatifs, alors $\mathsf{pgcd}(a, b)$ est négatif.
2) a divise 0.
3) Si $a|b$, alors $\mathsf{pgcd}(a, b) = a$.
4) $a_1, \dots, a_n$ sont premiers entre eux si et seulement si ils sont premiers entre eux deux-à-deux.
5) Si $d \in \mathbb{Z}$ vérifie $d|ab$ et $\mathsf{pgcd}(d, a) = 1$, alors $d|b$.

Exercice 2 (5 points) Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

$$12x + 36y = 5 \ ; \quad 42x + 24y = 60.$$

Solution 1

1) Faux. Le pgcd de deux nombres est toujours positif.
2) Vrai. On a $0 = a \times 0$ a divise 0.
3) Faux. On a $\text{PGCD}(a, b) = |a|$ qui est différent de a si a est négatif.
4) Faux. Les entiers $2, 3, 4$ sont premiers entre eux car $\mathsf{pgcd}(2, 3, 4) = 1$ mais pas premiers entre eux deux-à-deux cas $\mathsf{pgcd}(2, 4) = 2$.
5) Vrai. C'est le lemme de Gauss.

Solution 2

— Cherchons tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $12x + 36y = 5$. Cette équation diophantienne admet des solutions si et seulement si $\mathsf{pgcd}(12, 36)|5$. Or, $36 = 3 \times 12$ donc $\mathsf{pgcd}(12, 36) = 12$ ne divise pas 5.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $12x + 36y = 5$ est l'ensemble vide.

— Cherchons tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $42x + 24y = 60$. Cette équation diophantienne admet des solutions si et seulement si $\mathsf{pgcd}(42, 24)|60$. On applique l'algorithme d'Euclide étendu pour à la fois obtenir le PGCD de 42 et 24, et un couple de Bézout nous permettant d'obtenir une solution particulière à cette équation diophantienne s'il y en a.

42	1	0	
24	0	1	
18	1	-1	$42 = 1 \times 24 + 18$
6	-1	2	$24 = 1 \times 18 + 6$
0			$18 = 3 \times 6 + 0$

Ainsi, on a $\mathsf{pgcd}(42, 24) = 6$ et 6 divise 60 donc l'équation admet des solutions. On a de plus, par l'algorithme d'Euclide étendu, $-1 \times 42 + 2 \times 24 = 6$ donc en multipliant cette égalité par 10, on obtient une solution particulière $(x_0, y_0) = (-10, 20)$.
L'ensemble des solutions est alors :

$$\left\{ \left(x_0 - k\frac{b}{\mathsf{pgcd}(a,b)},\ y_0 + k\frac{a}{\mathsf{pgcd}(a,b)} \right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \{(-10 - 4k,\ 20 + 7k) \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$