Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

Lundi 3 Mars 2025

Algèbre

Table des matières

Questions de cours

★☆☆ Exercice 1 - Sommes finies et combinatoire

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Rappeler l'expression de $\binom{n}{k}$ en quotient de factorielles. Rappeler la relation de récurrence (appelée relation de Pascal) vérifiée par les coefficients binomiaux.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton.
3. En justifiant, donner la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

★☆☆ Exercice 2 - Polynômes, factorisation

1. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On suppose que P se factorise en $a(X - r_1)(X - r_2)$. Exprimer b et c en fonction de a, r_1 et r_2.
2. Définir la notion de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Donner la multiplicité de 2 des polynômes suivants :

$$(X-2)(X^2+X-6) \, ; \quad X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 16X - 12.$$

★☆☆ Exercice 3 - Fractions rationnelles, réduction en éléments simples

1. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{x(x+1)} \, ; \quad \frac{x}{(x-1)^2} \, ; \quad \frac{x+1}{2x^2+5x+3}$$

2. Expliquer comment utiliser les décompositions en éléments simples pour calculer des primitives de fractions rationnelles en appliquant ces méthodes au calcul de

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx.$$

Exercices

Sommes finies et combinatoire

★⯪☆ Exercice 4 - Nombres de Catalan (solution)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$. On l'appelle le n-ième nombre de Catalan.

1. Calculer C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4.
2. Écrire $\dfrac{n}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ comme un seul coefficient binomial. En déduire que C_n est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer de deux manières différentes le coefficient en x^n de $(1+x)^{2n}$ pour en déduire l'égalité

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

En déduire une autre expression de C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

★★⯪ Exercice 5 - Formule du binôme et série harmonique (solution)

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer l'égalité

$$\frac{1-(1-x)^n}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k.$$

2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Montrer que

$$f'(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k.$$

3. Après avoir calculé la valeur de $f(1)$ en intégrant f' entre 0 et 1, montrer l'égalité $(*)$.

Polynômes, factorisation

★½☆ Exercice 6 - Théorème de Gauss-Lucas pour les polynômes réels (solution)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$ scindé. On écrit $P(X) = a\prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{n_i}$ avec $x_1, \dots, x_r$ les racines distinctes de P et n_i leurs multiplicités.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ qui n'est pas une racine de P,
$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x - x_i}.$$
2. Soit x une racine de P' qui n'est pas une racine de P. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{(x - x_i)^2}\right) x = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{n_i}{(x - x_i)^2} x_i\right).$$
3. En déduire que pour toute racine x de P', il existe des réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que
$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r.$$

Remarque : Le théorème reste vrai pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et la preuve est identique.

Fractions rationnelles, réduction en éléments simples

★½☆ Exercice 7 - Dérivation et fractions rationnelles (solution)

Soit F une fraction rationnelle réelle. On rappelle que le degré de F est défini par $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$ pour tous polynômes réels P et Q tels que $F = \dfrac{P}{Q}$.

1. Montrer que si $\deg(F') < \deg(F) - 1$, alors $\deg(F) = 0$.
2. Montrer que $F' \neq \dfrac{1}{X}$.
Indication : *On pourra raisonner par l'absurde et considérer la multiplicité de la racine 0 de Q si $F = P/Q$.*

Exercice 8 - DES à paramètres et un calcul de somme (solution)

1. Soient $m < n$ deux entiers strictement positifs. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$\frac{X^m}{(X-1)^n}.$$
On pourra noter $X = (X-1)+1$ et utiliser le binôme de Newton pour développer X^m.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}.$$

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_n$ définie par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$

Corrections

Solution 4 - Nombres de Catalan (☞ exercice)

1. On a :
$$C_0 = 1\,,\ C_1 = 1\,,\ C_2 = 2\,,\ C_3 = 5\,,\ C_4 = 14.$$

2. Pour tous $k, n \geq 0$, on a la formule
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
Ainsi, on a
$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{n(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n+1}.$$
Puisque $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, alors
$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$
En particulier, C_n est un entier.

3. La formule du binôme de Newton donne :
$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$
Donc le coefficient en x^n est $\dbinom{2n}{n}$. On peut aussi écrire :
$$(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)^2.$$
Le coefficient en x^n est alors la somme de tous les termes de la forme $\dbinom{n}{i}\dbinom{n}{j}$ avec $i+j=n$, c'est-à-dire $j = n-i$. Donc le coefficient en x^n est :
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$
Par identification, on trouve l'égalité
$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

On en déduit une nouvelle expression de C_n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

Solution 5 - Formule du binôme et série harmonique (☞ exercice)

1. Le membre de droite est une somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $1-x \neq 1$, donc on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^n}{x}.$$

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1}.$$

Si $x \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{k-1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = \frac{1}{x}\left((1-x)^n - 1\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k.$$

Si $x = 0$, alors $f'(0) = -n$ et $-\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = -n$, donc on a bien l'égalité voulue pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On remarque que $-f(1)$ est le membre de gauche dans l'égalité $(*)$. On a :

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k dx = -\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^k dx.$$

Or, si $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 (1-x)^k dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

Donc

$$f(1) - f(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, $f(0) = 0$, ce qui donne la valeur de $-f(1)$:

$$-f(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Mais d'après la question précédente, on a

$$-f(1) = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

D'où l'égalité $(*)$.

Solution 6 - Théorème de Gauss-Lucas pour les polynômes réels (☞ exercice)

1. En appliquant la formule de dérivation d'un produit, on obtient que

$$P'(X) = a \sum_{i=1}^{r} n_i (X - x_i)^{n_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - x_j)^{n_j} = \sum_{i=1}^{r} n_i (X - x_i)^{n_i - 1} \underbrace{a \prod_{j \neq i} (X - x_j)^{n_j}}_{P/(X - x_i)^{n_i}}.$$

Donc si x n'est pas une racine de P, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} n_i \frac{(x - x_i)^{n_i - 1}}{(x - x_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x - x_i}.$$

2. Si x est une racine de P' qui n'est pas une racine de P, alors $P'(x)/P(x) = 0$. Par la question précédente, on a donc :

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2}.$$

On passe les termes en x dans l'autre membre de l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i x_i}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i x}{(x - x_i)^2}.$$

Le résultat s'obtient en factorisant par x dans la somme du membre de droite.

3. Si x est une racine de P' qui n'est pas une racine de P, on pose

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \lambda_i = \frac{\dfrac{n_i}{(x-x_i)^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \frac{n_j}{(x-x_j)^2}}.$$

D'après la question précédente, on a alors

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r.$$

Si x est une racine de P' qui est une racine de P, alors $x = x_i$ pour un certain $i \in [\![1, r]\!]$. On pose alors $\lambda_i = 1$ et $\lambda_j = 0$ pour tout $j \neq i$. On a bien

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_r x_r.$$

Le résultat est donc vrai pour toute racine de P'.

Solution 7 - Dérivation et fractions rationnelles (☞ exercice)

1. On écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec P et Q premiers entre eux. On a alors

$$F' = \frac{P'Q - QP'}{Q^2}.$$

Donc $\deg(F') = \deg(P'Q - QP') - 2\deg(Q) \leq \max(\deg(P'Q), \deg(PQ')) - 2\deg(Q) = \deg(P) + \deg(Q) - 1 - 2\deg(Q) = \deg(P) - \deg(Q) - 1 = \deg(F) - 1$. S'il n'y a pas égalité, cela signifie que les coefficients dominants de $P'Q$ et QP' sont égaux, donc que $\deg(P)a_{\deg(P)}b_{\deg(Q)} = \deg(Q)a_{\deg(P)}b_{\deg(Q)}$ si on note $P = \sum a_k X^k$ et $Q = \sum b_k X^k$. Cela signifie alors que $\deg(P) = \deg(Q)$, c'est-à-dire que $\deg(F) = 0$.

2. On suppose par l'absurde que $F' = 1/X$. On écrit $F = P/Q$ une fraction irréductible. Dans ce cas, on a

$$X(P'Q - QP') = Q^2.$$

Donc 0 est une racine de Q^2, donc de Q. En particulier, ce n'est pas une racine de P car P et Q sont premiers entre eux. On note k la multiplicité de 0 en tant que racine de Q : on a $Q = X^k\widetilde{Q}$ avec $\widetilde{Q}(0) \neq 0$ et $k \geq 1$. On a donc :

$$X(P'X^k\widetilde{Q} - kPX^{k-1}\widetilde{Q} - PX^k\widetilde{Q}') = X^{2k}\widetilde{Q}^2.$$

On simplifie par X^k, on obtient :

$$P'X\widetilde{Q} - kP\widetilde{Q} - PX\widetilde{Q}' = X^k\widetilde{Q}^2.$$

En évaluant en 0, on obtient

$$0 - kP(0)\widetilde{Q}(0) - 0 = 0.$$

C'est absurde puisque $P(0) \neq 0$ et $\widetilde{Q}(0) = 0$.

Solution 8 - DES à paramètres et un calcul de somme (☞ exercice)

1. La formule du binôme de Newton donne

$$X^m = ((X-1)+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (X-1)^k.$$

   Ainsi, on a

$$\frac{X^m}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}(X-1)^k}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{(X-1)^{n-k}}.$$

   Or, tous les indices k de la somme sont strictement inférieurs à n, donc $n-k > 0$. Le membre de droite de l'égalité est donc la décomposition en léménets simples de $X^m/(X-1)^n$.

2. La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle est de la forme

$$\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{X+k}.$$

   Pour déterminer a_k, on multiplie l'égalité précédente par $(X+k)$ et on évalue en $-k$. On obtient donc

$$a_k = \frac{1}{(-k)(-k+1)\dots(-k+k-1)(-k+k+1)\dots(-k+n)} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$$

3. D'après la question précédente, on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} + \frac{-1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2}.$$

   Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k+2}.$$

On effectue des changements d'indice :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1/2}{k}.$$

On sépare les termes extrémaux :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Donc $S_n \to \dfrac{1}{4}$.