Colles CMI

Jad ABOU YASSIN

24 avril 2025

Algèbre linéaire

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Équations matricielles et pivot de Gauss (solution ☞)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible, expliquer comment calculer A^{-1} en résolvant un système linéaire. Utiliser la méthode du pivot de Gauss pour calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(On admet que la matrice est inversible)

Exercice 2 - Produit de matrices (solution ☞)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, donner la formule du coefficient en ligne i et colonne j de la matrice AB. Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure. Que dire du produit de deux matrices symétriques ?

Exercice 3 - Déterminant (solution ☞)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la formule du déterminant de A. Donner une formule simple pour les cas $n = 2$ et $n = 3$. Expliquer comment déterminer si une matrice est inversible par un calcul de déterminant. Calculer le déterminant de la matrice suivante en utilisant un développement par rapport à une ligne ou à une colonne de votre choix :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercices

Exercice 4 - Équation matricielle (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation matricielle d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$MA = B. \tag{1}$$

1. Montrer comment ramener la résolution de l'équation (1) à un système de n équations vectorielles de la forme $MX_i = B_i$ où $B_1, \dots, B_n$ sont des vecteurs à déterminer et $X_1, \dots, X_n$ sont des indéterminées vectorielles.
2. On pose
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$
Résoudre $MX = Y$ où $Y = {}^t(a, b, c)$ avec la méthode du pivot de Gauss. La matrice M est-elle inversible ?
3. Trouver toutes les solutions de (1) pour
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 - Matrices orthogonales (solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une *matrice orthogonale* si ${}^tAA = I_n$.

1. Montrer qu'une matrice orthogonale est inversible. Plus précisément, montrer que si A est une matrice orthogonale, $\det(A) \in \{-1, 1\}$. En déduire que A est orthogonale si et seulement si $A{}^tA = I_n$.
2. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont orthogonales ?
$$I_n\,; \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
3. Si A et B sont deux matrices orthogonales, montrer que AB est une matrice orthogonale.

4. Montrer la caractérisation suivante : Une matrice A est orthogonale si et seulement si les colonnes de A sont de norme 1 pour la norme euclidienne et sont deux à deux orthogonales pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

★5. En déduire qu'une matrice orthogonale et triangulaire supérieur est nécessairement une matrice diagonale comportant uniquement des 1 et -1 sur la diagonale.

★☆☆ Exercice 6 - Diagonale de a sur un parterre de b (solution)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la matrice A est-elle inversible ?

★½☆ Exercice 7 - Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (solution)

Soit n un entier strictement supérieur à 1. Le but de cet exercice est de calculer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble

$$Z\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ AB = BA\}.$$

1. Justifier pourquoi la question est intéressante : exhiber une matrice qui n'appartient pas à $Z\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\lambda I_n \in Z\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.
3. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On définit la *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ comme étant la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut 1, et tous les autres coefficients valent 0. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
4. En déduire que $Z\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Corrections

Solution 1 - Équations matricielles et pivot de Gauss (☞ exercice)

Pour calculer A^{-1}, on considère $X \in \mathbb{R}^n$ et on pose $Y = AX$. On exprime alors les coefficients de X en fonction de ceux de Y en résolvant le système $AX = Y$. Les coefficients de X sont combinaison linéaire de ceux de Y, ce qui permet d'écrire $Y = BX$ où B est une certaine matrice. En fait, on a $B = A^{-1}$ puisque $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$.

Faisons-le pour la matrice A de l'énoncé. On pose $X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $Y = {}^t(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$
\begin{aligned}
AX = Y \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + 2z = a \\ -2x + 3y + 4z = b \\ -y - z = c \end{cases} \\
(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + 2z = a \\ y = b - 2a \\ -y - z = c \end{cases} \\
(L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + 2z = a \\ y = b - 2a \\ -z = c + b - 2a \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a - b - 2c \\ y = -2a + b \\ z = 2a - b - c \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = BY
\end{aligned}
$$

où $B = A^{-1}$ est la matrice

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Solution 2 - Produit de matrices (☞ exercice)

Soient $1 \leq i, j \leq n$. Le coefficient du produit AB en ligne i et colonne j est

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Une matrice M est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $1 \leq j < i \leq n$, on a $M_{i,j} = 0$. Soient A et B deux telles matrices. Si $1 \leq j < i \leq n$, on a :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{a_{i,k}}_{0} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{0} = 0.$$

Donc AB est une matrice triangulaire supérieure.

Une matrice M est symétrique si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a $M_{i,j} = M_{j,i}$. Soient A et B deux telles matrices. Si $1 \leq i, j \leq n$, on a :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{j,k} = (BA)_{j,i}.$$

On en déduit que le produit de deux matrices symétriques A et B et la transposée du produit de B et A. En particulier, si A et B commutent, alors la matrice AB est symétrique. Mais ce n'est pas vrai en général, par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice symétrique, pourtant A et B le sont.

Solution 3 - Déterminant (☞ exercice)

Le déterminant de A est donné par la formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Pour le cas $n=2$, on a la formule simple suivante :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Pour le cas $n=3$, on a la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf.$$

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Le déterminant de la matrice A de l'énoncé peut se calculer en développant par rapport à la dernière ligne, puis en calculant deux déterminants de matrices 3×3 par la règle de Sarrus.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{4+2}4\begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}1\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 4\big(0+12+(-16)-0-(-16)-0\big) + \big(-4+(-12)+0-(-4)-0+6\big) \\
&= 4\times 12 - 6 \\
&= 42.
\end{aligned}$$

On a $\det(A) = 42$, donc la matrice A est inversible.

Solution 4 - Équation matricielle (☞ exercice)

1. Puisque la i-ème colonne du produit MA est la i-ème colonne de B, on se ramène à un système de n équations vectorielles sur chaque colonne de X et B.

2. On a :

$$
\begin{aligned}
MX = Y &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 4z \quad = a \\ -2x + 3y - z = b \\ 3x - 5y - 2z \ = c \end{cases} \\
\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 4z = a \\ y + 7z \qquad = 2a + b \\ -2y - 14z = -3a + c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 4z = a \\ y + 7z \qquad = 2a + b \\ y + 7z \qquad = \frac{3}{2}a - \dfrac{1}{2}c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad = a + 2a + b - 7z - 4z \\ y \qquad = 2a + b - 7z \\ 2a + b = \frac{3}{2}a - \dfrac{1}{2}c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad\quad = a + 2a + b - 7z - 4z \\ y \qquad\quad = 2a + b - 7z \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

La matrice M n'est pas inversible puisque si $a + 2b + c$ est non nul, il n'y a pas de solution. Une autre manière de le voir est que s'il y a une solution, il y en a une infinité paramétrées par z.

3. Pour le premier B, la deuxième colonne de B ne vérifie pas $a + 2b + c = 0$, donc la deuxième équation $MX_2 = B_2$ n'a pas de solutions, donc (1) n'a pas de solution. Pour le second B, on a bien $a + 2b + c = 0$ pour chaque colonne donc il existe une infinité de solutions, qui sont

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 - 11z_1 & -11z_2 & 11 - 11z_3 \\ -7z_1 & 1 - 7z_2 & 7 - 7z_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \middle| (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.
$$

On remarque qu'on a bien la matrice identité dedans en prenant $(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 1)$, ce qui est attendu puisque I_3 est bien solution triviale de l'équation !

Solution 5 - Matrices orthogonales (☞ exercice)

1. Par définition, une matrice orthogonale vérifie $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ BA = I_n$, donc A est inversible. En fait, on a $1 = \det(I_n) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$, donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Puisque A est inversible, on a la chaîne d'équivalence suivante :
$$ {}^tAA = I_n \Leftrightarrow A^{-1}\left({}^tA\right)^{-1} = I_n^{-1} = I_n \Leftrightarrow I_n = A{}^tA. $$

2. La matrice I_n vérifie ${}^tI_nI_n = I_n$ donc elle est orthogonale. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$ \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$
Donc la matrice est orthogonale.

   La troisième matrice a pour déterminant $1 \times 4 \times 6 = 24$ donc elle n'est pas orthogonale.

3. On a ${}^t(AB)(AB) = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. Donc la matrice AB est orthogonale.

4. Le coefficient en position (i, j) du produit ${}^tAA$ est égal au produit scalaire entre la i-ème ligne de ${}^tA$ qui est par définition la i-ème colonne de A et la j-ème colonne de A. Donc si on note C_i la i-ème colonne de A pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$ \begin{cases} \forall i \neq j \in [\![1, n]\!], & \langle C_i, C_j \rangle = 0 \\ \forall i \in [\![1, n]\!], & \langle C_i, C_i \rangle = 1. \end{cases} $$
Ceci équivaut à dire que les colonnes de A sont deux à deux orthogonales, et que chacune est de norme 1.

5. On démontre le résultat par récurrence sur la taille de la matrice.
   - Initialisation : $n = 1$. Toute matrice orthogonale de taille 1 est la matrice (1) ou (-1). Donc l'initialisation est vérifiée.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que le résultat est vrai au rang n. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale et triangulaire supérieure. Alors A est de la forme
$$ \left(\begin{array}{c|ccc} a & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right) $$

où $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure. On montre dans un premier temps que $a \in \{-1, 1\}$. Puisque la première colonne de A est de norme 1, alors $\sqrt{a^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 1$ donc $|a| = 1$ donc $a \in \{-1, 1\}$. On montre maintenant que les coefficients sur la première ligne, sauf a, sont tous nuls. Puisque A est orthogonale, alors ${}^tA$ l'est aussi. Or, la première colonne de ${}^tA$ est le vecteur $(a, a_2, \ldots, a_{n+1})$ qui est aussi normé. Donc

$$\sqrt{a + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2} = 1 \Rightarrow 1 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = 1 \Rightarrow a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = 0$$

est une somme de termes positifs qui somme à 0, donc chaque terme est nul, donc finalement A est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Il reste donc juste à monter que A' est orthogonale pour appliquer l'hypothèse de récurrence sur A' et conclure. Les colonnes de A sont deux à deux orthogonales et de norme 1, et à partir de la deuxième colonne commencent toutes par un 0. Donc les colonnes de A' sont également de norme 1 et deux à deux orthogonales, donc A' est une matrice orthogonale. Puisqu'elle est aussi triangulaire supérieur, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A' qui est donc diagonale avec uniquement des 1 ou -1 sur la diagonale. Donc A est aussi de cette forme, ce qui conclut l'hérédité.

Par récurrence, nous avons donc montré le résultat.

Solution 6 - Diagonale de a sur un parterre de b (☛ exercice)

On calcule le déterminant de A en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour pouvoir se ramener à une forme plus simple.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
(L_1 \leftarrow L_1 + \dots + L_n) &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \\
(C_i \leftarrow C_i - C_1, i > 1) &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & 0 & \dots & 0 \\ b & a-b & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

La dernière matrice est triangulaire inférieure, donc son déterminant est le produit des coefficients diagonaux. On a donc

$$\det(A) = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

On en déduit que A est inversible si et seulement si $a \neq b$ et $a \neq -(n-1)b$. Dans le premier cas, on obtient une matrice avec toutes les colonnes égales, qui est donc bien non inversible. Dans le second cas, la somme de toutes les colonnes (ou lignes) donne le vecteur nul, donc les colonnes (ou lignes) de A ne forment pas une famille libre, donc la matrice n'est pas inversible.

Solution 7 - Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (☛ exercice)

1. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_n$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc ces deux matrices ne sont pas dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Dans un anneau, l'élément neutre commute avec tout élément. Donc $I_n \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$(\lambda I_n)A = \lambda I_n A = \lambda A I_n = A\lambda I_n = A(\lambda I_n).$$

Donc $\lambda I_n \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

3. On note $E_{i,j} = (e_{x,y})_{1\leq x,y\leq n}$. On a $e_{i,j} = 1$ et les autres coefficients sont nuls. Par définition, le coefficient en position p, q de $AE_{i,j}$ vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{p,k}e_{k,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq j \\ a_{p,i} & \text{si } q = j. \end{cases}$$

En particulier, $AE_{i,j}$ est la matrice nulle dans laquelle on a ajouté la i-ème colonne de A dans la colonne n°j. De même, on a que le coefficient en position p, q de $E_{i,j}A$ est

$$\sum_{k=1}^{n} e_{p,k}a_{k,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq i \\ a_{j,q} & \text{si } p = i. \end{cases}$$

Ce qui signifie que $E_{i,j}A$ est la matrice nulle dans laquelle on a ajouté la j-ème ligne de A dans la ligne n°i.

4. Soit $A \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, alors A commute avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$. Si $i \neq j$, le coefficient en i, j de $AE_{i,j}$ est $a_{i,i}$ et celui de $E_{i,j}A$ est $a_{j,j}$ d'après la question précédente : donc les coefficients diagonaux de A sont tous égaux puisque $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Mais aussi, le coefficient en i, i de $AE_{i,j}$ est nul puisque $i \neq j$, tandis que celui de $E_{i,j}A$ vaut $a_{j,i}$. Donc $a_{j,i} = 0$.

   Ainsi, A est une matrice dont les coefficients non diagonaux sont nuls, et les coefficients diagonaux sont tous égaux à un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $A = \lambda I_n$. D'où le résultat.