Colles CMI L2

Jad ABOU YASSIN

31 Mars 2025

Séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier

Table des matières

Questions de cours **2**

Exercice 1 - ★⯪☆ Séries de fonctions et régularité 2

Exercice 2 - Rayon de convergence d'une série entière 2

Exercice 3 - Séries de Fourier 2

Exercices **2**

Série de fonctions 2

Exercice 4 - ★⯪☆ Une série alternée 2

Exercice 5 - ★★⯪ Continue mais non-dérivable sur un ensemble dense 3

Séries entières 3

Exercice 6 - ★☆☆ Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non DSE 3

Exercice 7 - ★⯪☆ Théorème d'Abel radial 4

Séries de Fourier 4

Exercice 8 - ★⯪☆ Un calcul de somme de série 4

Exercice 9 - ★⯪☆ Contraindre la dérivée seconde 5

Questions de cours

★⯪☆ Exercice 1 - Séries de fonctions et régularité (solution ☞)

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Quelles hypothèse doit-on faire sur cette série pour qu'elle converge vers une limite de classe $\mathcal{C}^k$? Comment peut-on calculer les dérivées premières, ..., k-ièmes de la somme ?

Contre-exemple : Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers la fonction valeur absolue. En déduire une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la somme n'est pas dérivable.

Exercice 2 - Rayon de convergence d'une série entière (solution ☞)

Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum e^{in} z^n$.

Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum n a_n z^n$? En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{e^{in}}{n} z^n$.

Exercice 3 - Séries de Fourier (solution ☞)

Soit $T > 0$ et f une fonction T-périodique. Définir les coefficients de Fourier réels de f notés $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, ainsi que les coefficients de Fourier complexes de f notés $(c_n)_n$.

Donner la définition d'une série de Fourier réelle et complexe. Quelle condition suffisante pouvez-vous donner pour que f admette un développement en série de Fourier ?

Exercices

Série de fonctions

★⯪☆ Exercice 4 - Une série alternée (solution ☞)

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que cette série converge sur $]0, +\infty[$ vers une fonction notée S. Montrer que la convergence est uniforme. En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Exprimer S' comme une série de fonctions.

Exercice 5 - Continue mais non-dérivable sur un ensemble dense (solution)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n}$$

1. Montrez que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de dérivation terme à terme ? Montrez que si la série dérivée converge simplement, alors la limite n'est pas continue en zéro.
3. Montrez que f n'est pas dérivable en 0. Plus généralement, montrez que f n'est pas dérivable pour tout $x \in 2\mathbb{Z}$
4. Montrez que f n'est pas dérivable pour tout x dyadique.

Remarque : La fonction f est un avatar de fonction « continue partout mais nulle part dérivable », dont l'existence a été un véritable choc pour beaucoup de mathématiciens. On peut montrer, mais c'est très difficile, que f n'est nulle part dérivable. Il s'agit d'une fonction de Weierstrass*, qui sont des fonctions de la forme $\sum a^k \cos(b^k x)$ où $ab \geq 1$ et $0 < a < b$. Ces fonctions sont continues partout mais nulle part dérivables.*

Séries entières

Exercice 6 - Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non DSE (solution)

On définit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrez que f définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a un rayon de convergence infini, mais que quelque soit $R > 0$, la somme sur $]-R, R[$ ne coïncide pas avec f.

★⯪☆ Exercice 7 - Théorème d'Abel radial (solution ☞)

1. Énoncez le théorème d'Abel radial.

   Remarque : si c'est du cours, sinon, l'énoncer à l'étudiant et le laisser commenter.

2. Montrez qu'on peut se ramener au cas où $R = 1$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrez que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n$$

4. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, en notant $S = \lim S_n$, que

$$f(x) - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n$$

5. Conclure (il s'agit de montrer que $f(x) \to S$)

Séries de Fourier

★⯪☆ Exercice 8 - Un calcul de somme de série (solution ☞)

Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x + 2k\pi) = e^x.$$

1. Rappeler comment déduire les coefficients de Fourier réels depuis les coefficients de Fourier complexes d'une fonction 2π-périodique.

2. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f, en déduire les coefficients de Fourier réels de f.

3. Justifier pourquoi la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $]-\pi, \pi[$ et vers $\cosh(\pi)$ en π.

4. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

★⯪☆ Exercice 9 - Contraindre la dérivée seconde (solution)

Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$ qui vérifient $|f''| \leq |f|$ et $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. On pourra construire une fonction 2π-périodique et exprimer les coefficients de Fourier de sa dérivée seconde en fonction de ses coefficients de Fourier.

Corrections

Solution 1 - Séries de fonctions et régularité (☛ exercice)

Il s'agit du théorème de dérivation terme à terme : On suppose que les séries $\sum_n f_n$, ..., $\sum_n f_n^{(k-1)}$ convergent simplement vers des limites notées g_0, ..., g_{k-1}, et que la série $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction notée g_k. Alors les séries $\sum_n f_n, \ldots, \sum_n f_n^{(k-1)}$ convergent uniformément vers g_0, ..., g_{k-1}, g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a pour tout $i \in [\![0, k]\!]$

$$\frac{d^i}{dt^i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) = g_i = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la valeur absolue. En effet, on a

$$|f_n(t) - |t|| = \sqrt{t^2 - \frac{1}{n}} - \sqrt{t^2} = \frac{t^2 + \frac{1}{n} - t^2}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{n}} + \sqrt{t^2}} \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Mais la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en zéro. Pourtant, les f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$. Pour transformer ce contre-exemple de suites de fonctions en un contre-exemple de séries de fonctions, on peut considérer la série télescopique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n+1} - f_n$$

en posant $f_0 = 0$ la fonction nulle. Les sommes partielles de cette série sont les f_n, et donc cette série converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1, 1]$ qui n'est pas dérivable en zéro.

Solution 2 - Rayon de convergence d'une série entière (☛ exercice)

Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est défini comme étant

$$R = \sup\{r > 0 \mid \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ et bornée.}\}.$$

Si $r > 0$, on a $|e^{in} r^n| = r^n$. La suite $(a_n r^n)_n$ est bornée si et seulement si $r \leq 1$. Donc le rayon de convergence est $R = 1$.

Une série et sa série dérivée ont même rayon de convergence. Donc le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$ est le même que celui de $\sum a_n z^n$. En multipliant la première série entière par z, ce qui ne change pas le rayon de convergence, on obtient bien que $\sum n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$. Ainsi, la série entière $\sum e^{in} z^n = \sum n \frac{e^{in}}{n} z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum e^{in} z^n$, c'est-à-dire 1.

Solution 3 - Séries de FOURIER (☞ exercice)

Les coefficients de FOURIER de f sont :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right)dt, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\left(\dfrac{2n\pi}{T}t\right)dt, \\ \forall n \in \mathbb{Z}, & c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\exp\left(-i\dfrac{2n\pi}{T}t\right)dt. \end{cases}$$

Une série de FOURIER réelle est une série de fonction de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right)$$

où $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites réelles. Une série de FOURIER complexe est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

où $(c_n)_n$ est une suite complexe.

Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème de DIRICHLET la série de FOURIER de f (réelle ou complexe) converge simplement vers f. Donc f est développable en série de FOURIER.

Solution 4 - Une série alternée (☞ exercice)

On note $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$ de sorte à étudier la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

1. Soit $x > 0$. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ est une série alternée car la suite $\left(\dfrac{1}{1+nx}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère des séries alternées, elle converge. Donc la série $\sum f_n$ converge (simplement) sur $]0, +\infty[$. On note S la limite.

   Pour montrer que la convergence est uniforme, on montre que les restes convergent uniformément vers 0. On peut utiliser encore une fois le critère des séries alternées : soit $N \in \mathbb{N}$, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |R_N(x)| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}\right| \leq \frac{1}{1+Nx}.$$

Soit $a > 0$. Sur l'intervalle $]a, +\infty[$, on a donc la majoration uniforme

$$||R_N||_\infty \leq \frac{1}{1+Na} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Donc la suite de fonctions $(R_N)_N$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$, et donc la fonction S est continue sur $]a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, alors S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (car elle y converge uniformément), il suffit de montrer que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence par calculer les dérivées des fonctions f_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n'(x) = \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}.$$

La série $\sum f_n'$ est donc une série alternée. Comme en question 1, elle converge alors simplement vers une fonction notée T sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a la majoration du reste :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ |T_N(x)| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{(1+nx)^2}\right| \leq \frac{N}{(1+Nx)^2}.$$

Comme précédemment, on va se restreindre à des intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ pour établir la convergence uniforme du reste vers 0. Soit $a > 0$, si $x \geq a$, on a la majoration

$$\frac{N}{(1+Nx)^2} \leq \frac{N}{(1+Na)^2}$$

donc une majoration uniforme du reste :

$$||T_n||_\infty \leq \frac{N}{(1+Na)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Sur l'intervalle $[a, +\infty[$, la série $\sum f_n$ converge simplement vers S et la série $\sum f_n'$ converge uniformément vers T. Donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $S' = T$.
Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $S' = T = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Solution 5 - Continue mais non-dérivable sur un ensemble dense (exercice)

1. La série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$, où $f_n = \dfrac{\cos(2^n \pi x)}{2^n}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, et il s'agit d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc f est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$

2. Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation terme à terme, il faut que la série des dérivées converge uniformément. Or, on montre que la limite (si elle existe), n'est pas continue. Ainsi, la série ne peut converger uniformément. Pour le faire, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 2^{-k}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n'(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ -\pi & \text{si } k = n+1 \\ -\pi \sin(\pi 2^{n-k}) < 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, en notant g la somme, on a $g(x_k) < -\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En considérant cette fois-ci la suite $y_k = -2^{-k}$, on obtient

$$f_n'(y_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ \pi & \text{si } k = n+1 \\ \pi \sin(\pi 2^{n-k}) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $g(y_k) > \pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci montre que g n'est pas continue en zéro, donc la convergence de la série (s'il y en a une) ne peut pas être uniforme.

3. On a $f(0) = 2$ (somme d'une série géométrique de raison 1/2). Montrons que $(f(x) - 2)/x$ diverge quand $x \to 0$. Il suffit de le montrer pour une suite $(x_k)_k$ qui tend vers zéro, on pose alors $x_k = 2^{-k}$ comme précédemment. On a :

$$\frac{f(x_k) - 2}{x_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^{n-k}\pi) - 1}{2^{n-k}} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2^{n-k}\pi) - 1}{2^{n-k}}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(2^{n-k}\pi) - 1 < 0$ et $\cos(\pi/2) - 1 = -1$. On a donc l'inégalité

$$\frac{f(x_k) - 2}{x_k} < -\frac{1}{2}$$

De même en considérant la suite $y_k = -2^{-k}$, on a

$$\frac{f(y_k) - 2}{y_k} > -\frac{1}{2}$$

Comme les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ tendent vers zéro, alors f n'est pas dérivable en zéro. De plus, comme f est 2-périodique, alors f n'est pas dérivable en tout $x \in 2\mathbb{Z}$.

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} = F_k(x) + \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

où F_k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, si f n'est pas dérivable en $y \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, f n'est pas dérivable en $2^{-k}y$. Comme f n'est pas dérivable sur $2\mathbb{Z}$, elle ne l'est pas non plus sur $\mathbb{Z}$ ($k = 1$), et donc elle ne l'est pas non plus sur les nombres dyadiques.

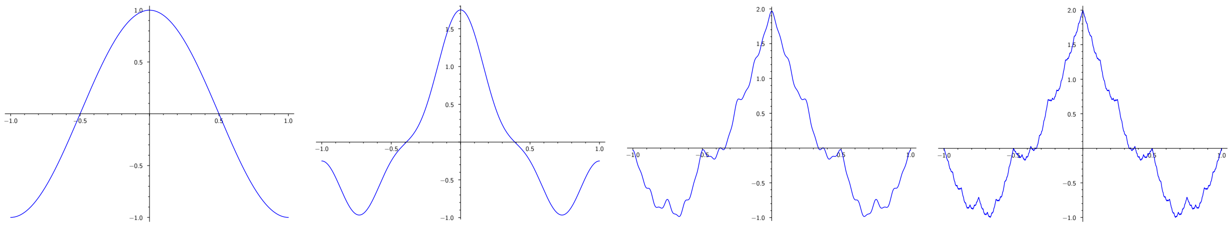

Figure 1 – Sommes partielles d'ordre 0, 2, 5 et 10

Solution 6 - Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non DSE (☞ exercice)

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P, Q deux polynômes tels que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x}$$

Par croissance comparée, on a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a bien un rayon de convergence infini (c'est la série entière nulle !), mais f n'est pas identiquement nulle au voisinage de zéro.

Solution 7 - Théorème d'Abel radial (☞ exercice)

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ et de somme f sur son disque de convergence. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$f(x) \xrightarrow[x \in [0,R[\longrightarrow R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

2. On pose $b_n = a_n R^n$. Alors par le théorème de Cauchy-Hadamard, le rayon de convergence

de la série entière $\sum b_n x^n$ est

$$\frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|R^n}} = \frac{1}{R\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{R\dfrac{1}{R}} = 1.$$

On pourrait aussi procéder directement par définition du rayon de convergence :

$$(b_n r^n)_n \text{ est bornée } \Leftrightarrow (a_n(rR)^n)_n \text{ est bornée } \Leftrightarrow rR \leq R \Leftrightarrow r \leq 1.$$

Et en notant $\overline{f}$ la somme sur le disque unité, on a $\overline{f} = f(\cdot/R)$, donc $\overline{f}$ est continue en 1 (sur $[0,1[$) de somme $\sum b_n$ si et seulement si f est continue en R (sur $[0,R[$) de somme $\sum a_n$. On peut donc se ramener au cas $R = 1$.

3. On effectue une transformation d'Abel (on convient que $S_{-1} = 0$)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{N}(S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} = S_N x^N + (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n\end{aligned} \tag{1}$$

4. Soit $x \in [0,1[$. Comme la suite $(S_N)_N$ converge (vers S), alors elle est bornée. En particulier, la suite $(S_N x^N)_N$ tend vers zéro. Ainsi, en passant à la limite dans (1), on obtient que

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

Or, $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1$ (somme d'une série géométrique). Ainsi

$$f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S_n \longrightarrow S$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|S_n - S| \leq \varepsilon$. On découpe :

$$f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty}(S_n - S)x^n$$

Donc par inégalité triangulaire

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty}\varepsilon x^n \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n + \varepsilon$$

Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\delta, 1[$, $(1-x)\sum_{n=0}^{N} |S_n - S| x^n \leq \varepsilon$. Un tel δ existe bien car ce terme tend vers zéro quand x tend vers 1. Pour des tels N et δ, on a donc

$$|f(x) - S| \leq 2\varepsilon$$

Donc on a bien $f(x) \to S$, d'où le théorème d'ABEL radial

Solution 8 - Un calcul de somme de série (☛ exercice)

1. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont les coefficients de FOURIER réels de f, et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de FOURIER complexes de f, on a les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t(1-int)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(1-int)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}e^{-in\pi} - e^{-\pi}e^{in\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}(-1)^n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi(1-in)}\sinh(\pi) \\
&= \frac{(-1)^n(1+in)}{\pi(1+n^2)}\sinh(\pi).
\end{aligned}$$

On en déduit les coefficients de FOURIER réels :

$$\begin{cases}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c_n + c_{-n} = \dfrac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\left((1+in) + (1-in)\right) = \dfrac{(-1)^n 2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \\
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right) = \dfrac{(-1)^n i \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}\left((1+in) - (1-in)\right) = \dfrac{(-1)^{n+1} 2n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}
\end{cases}$$

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de DIRICHLET sa

série de Fourier converge simplement vers la fonction

$$\widetilde{f} : x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

De plus, sur $]-\pi, \pi[$, f est continue, donc $\widetilde{f} = f$ sur cet intervalle ouvert et la série de Fourier de f converge donc simplement vers f sur $]-\pi, \pi[$. Enfin, en π, la série de Fourier de f converge vers

$$\widetilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh(\pi).$$

4. Par la question précédente, on sait que

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n0) + b_n \sin(n0)) \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(1 - \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\right) = \frac{\pi - \sinh(\pi)}{2\sinh(\pi)}.$$

De même, on sait que

$$\begin{aligned} \cosh(\pi) = \widetilde{f}(\pi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\pi) + b_n \sin(n\pi)) \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} (-1)^n \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(\cosh(\pi) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\right) = \frac{\pi\cosh(\pi) - \sinh(\pi)}{2\sinh(\pi)}.$$

Solution 9 - Contraindre la dérivée seconde (☞ exercice)

On pose g la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \forall k \in \mathbb{Z},\ g(x + 2k\pi) = f(x).$$

Alors g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. On calcule les coefficients de Fourier complexes de g'' :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g''(t)e^{-int}dt.$$

On effectue des IPP successives :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g'') &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[g'(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} g'(t)e^{-int}dt\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(g'(2\pi) - g'(0) + in\left(\left[g(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(in(g(2\pi) - g(0)) + i^2n^2\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\right)\\
&= -n^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\\
&= -n^2c_n(g).
\end{aligned}$$

On applique l'égalité de Parseval à g et g'', ce qui est possible puisque ce sont des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,dt &= \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |g''(t)|^2\,dt &= \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g'')|^2.
\end{cases}$$

Puisque $|f''| \leq |f|$, alors $|g''| \leq |g|$ donc on a l'inégalité

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g'')|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^4\,|c_n(g)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2$$

Puisque $c_0(g) = \int_0^{2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ par hypothèse, on a alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^4\,|c_n(g)|^2 \geq |c_n(g)|^2$. Ceci implique que $c_n(g) = 0$ si $|n| \geq 2$. En particulier, les seuls coefficients de Fourier non nuls de g sont c_1 et c_{-1}, donc par le théorème de Dirichlet, il existe des réels a et b tels que

$$\forall t \in [0, 2\pi[,\ f(t) = g(t) = ae^{it} + be^{-it}.$$

Par continuité de f, on a donc $\forall t \in [0, 2\pi],\ f(t) = ae^{it} + be^{-it}$.

On vérifie aisément que toutes les fonctions de la forme $ae^{it} + be^{-it}$ sur $[0, 2\pi]$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifient $|f''| \leq |f|$ (il y a en fait égalité) et $\int_0^{2\pi} f = 0$. On a donc trouvé toutes les fonctions f.
