
Contrôle Continu 1, le 03/11/25 (durée 2h)

Exercice 1 [Question cours]

1. Donner la définition d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
 - a. $\mathbb{N}$.
 - b. L'ensemble des multiples de 3.
 - c. L'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \equiv 1 \pmod{3}$.Justifier vos réponses.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(n-1)n(n+1)$ est divisible par 3. En déduire que $n^3 \equiv n \pmod{3}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n k(k-1) = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Exercice 3

1. Calculer $\text{pgcd}(33, 45)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide en précisant chaque étape.
2. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$33x + 45y = 3.$$

3. À quelle condition sur l'entier c , l'équation d'inconnue (x, y)

$$33x + 45y = c \tag{1}$$

admet-elle une solution entière? Dans ce cas, cette solution est-elle unique?

4. On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto 33x + 45y. \end{aligned}$$

L'application f est-elle injective? surjective? Justifier vos réponses.

Exercice 4

1. Vérifier que $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$ et $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$.
2. Montrer que $3^{2025} \equiv 3 \pmod{10}$.
3. Quel est le dernier chiffre de l'expression de 3^{2025} en base 10.

Exercice 5

1. Donner les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les équations suivantes
 - (a) $\bar{x} \cdot \bar{2} = \bar{1}$.
 - (b) $\bar{x} \cdot \bar{3} = \bar{2}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'entier x tel que $x^2 \equiv 3 \pmod{5}$.
4. On considère l'équation d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ suivante

$$x^2 + 4xy - y^2 = 5008.$$

Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de cette équation, alors $(x + 2y)^2 \equiv 3 \pmod{5}$.
Que peut-on conclure ?

Exercice 6

1. Déterminer l'ensemble des classes de congruence $\bar{a} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ telles que l'équation

$$\bar{x}^2 = \bar{a}$$

admet des solutions dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de triplet d'entiers $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}.$$

3. Existe-t-il des entiers x, y, z tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 2023$?