Contrôle Continu 2, le 18/12/2025
(durée 2h)

Exercice 1[Question cours]

1. Donner la définition de l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $\varphi(4)$, $\varphi(5)$, $\varphi(20)$, $\varphi(64)$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, n est un nombre premier si et seulement si $\varphi(n) = n - 1$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ solutions de l'équation

$$2^m - 3^n = 1 \tag{1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
   (i) $3^n \equiv 1 \mod 8$ si n est pair,
   (ii) $3^n \equiv 3 \mod 8$ si n est impair.
2. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ solution de (1). Montrer que $m \leqslant 2$.
3. En déduire tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ solutions de (1).

Exercice 3

1. Calculer $\operatorname{pgcd}(512, 98)$ et $\operatorname{ppcm}(512, 98)$.
2. Soient
$$a = \sum_{k=0}^{8} 10^k = 111111111 \quad \text{et} \quad b = 375.$$
   Montrer que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 3$.

Exercice 4 Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 4 \mod 9 \\ x \equiv 1 \mod 11. \end{cases}$$

Exercice 5 On considère l'équation d'inconnues (x, y) avec paramètre $a \in \mathbb{Z}$

$$20x + 50y = a \tag{2}$$

1. Déterminer l'ensemble A des entiers a tels que l'équation (2) admet des solutions entières $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Pour tout $a \in A$, décrire l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de (2).
2. Soit B l'ensemble $\{10 \cdot k,\ k \in \mathbb{N},\ k \neq 1,\ k \neq 3\} \subset \mathbb{N}$. Supposons que l'équation (2) admet une solution entière $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $a \in B$.
3. Montrer que si $a \in B$ alors l'équation (2) admet des solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.
4. Un distributeur de billets ne contient que des billets de 20 euros et de 50 euros. Un client souhaite retirer 150 euros. Déterminer toutes les combinaisons de billets possibles que la machine peut lui donner.

Exercice 6

1. Montrer que
$$x^2 \equiv 1 \mod 4$$
pour tout $x \in \mathbb{Z}$ impair, et
$$x^{20} \equiv 1 \mod 25$$
pour tout $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{pgcd}(x, 5) = 1$.
2. Nous souhaitons résoudre l'équation
$$x^7 \equiv 27 \mod 100 \tag{3}$$
dans $\mathbb{Z}$. Supposons que x est une solution entière de (3).
   (a) En utilisant la question 1), montrer que
   $$x \equiv 3 \mod 4$$
   et
   $$x \equiv 8 \mod 25$$
   (b) En déduire l'ensemble des solutions entières de (3).

Exercice 7 Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ si et seulement si $n = 2^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.