Colles CMI L1

Jad ABOU YASSIN

30 septembre 2025

Analyse 1

Table des matières

Questions de cours **2**

Exercice 1 - Raisonnement : implication 2

Exercice 2 - Raisonnement : contre-exemple 2

Exercice 3 - Fonctions 2

Exercices **2**

Exercice 4 - ★★☆ Petit Gauss 2

Exercice 5 - ★☆☆ Valeurs absolues imbriquées 2

Exercice 6 - ★★☆ Inégalités triangulaires 3

Exercice 7 - ★★☆ Entre deux courbes 3

Exercice 8 - ★★⯪ Une équation 3

Exercice 9 - ★⯪☆ Valeur absolue et trinôme 3

Questions de cours

Exercice 1 - Raisonnement : implication (solution)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Démontrer le résultat suivant : si n et m sont impairs, alors $n + m$ est pair.

Exercice 2 - Raisonnement : contre-exemple (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'assertion suivante est fausse : Si n est un multiple de 3, alors $2^n - 1$ est un nombre premier.

Exercice 3 - Fonctions (solution)

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x) \ ; \qquad g(x) = \frac{1}{x} \ ; \qquad h(x) = x^2.$$

Parmi celles-ci, lesquelles sont paires ? Impaires ? Dresser le tableau de variation de ces fonctions.

Exercices

★★☆ **Exercice 4 - Petit Gauss (solution)**

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On cherche maintenant à démontrer cette égalité sans effectuer de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = \sum_{k=0}^{n} k$. Démontrer que $S = \sum_{k=0}^{n} n - k$. Calculer $S + S$ et retrouver le résultat voulu.

★☆☆ **Exercice 5 - Valeurs absolues imbriquées (solution)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ||x| - 1|$.

1. Représenter graphiquement f.
2. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation $f(x) > 1/2$.
3. Résoudre $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ et $f(x) = 2$.

★★☆ Exercice 6 - Inégalités triangulaires (solution)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $|x+y| \leq |x|+|y|$. Quand est-ce qu'il y a égalité ?
2. En déduire que $|x| \leq |x-y|+|y|$.
3. Montrer que $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
4. Sans faire de calcul, comparer les positions des graphes des fonctions $|x+2|$ et $||x|-2|$.

★★☆ Exercice 7 - Entre deux courbes (solution)

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ les fonctions

$$f(x) = \frac{3}{2}|x| - 2; \qquad g(x) = -\left||x|-1\right| + 2.$$

Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

★★⯪ Exercice 8 - Une équation (solution)

Résoudre l'équation suivante pour $a=2$, $a=4$ et $a=1$.

$$(E_a) : \left|\frac{2|x|-3}{|x|+1}\right| = a.$$

★⯪☆ Exercice 9 - Valeur absolue et trinôme (solution)

Résoudre l'équation $(E) : 2x^2 - |5x-2| - 5 = 0$.

Corrections

Solution 1 - Raisonnement : implication (☞ exercice)

On suppose que n et m sont impairs. Il existe donc $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2k+1$ et $m = 2l+1$. On a donc $n+m = 2k+1+2l+1 = 2(k+l+1)$. Donc $n+m$ est un multiple de 2, donc $n+m$ est pair.

Solution 2 - Raisonnement : contre-exemple (☞ exercice)

Soit $n = 6$. Alors n est un multiple de 3. De plus, $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 3 donc ce n'est pas un nombre premier. Ainsi, $n = 6$ est un contre-exemple, donc l'assertion est fausse.

Solution 3 - Fonctions (☞ exercice)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. Parmi celles-ci, seule h est paire puisque $h(x) = h(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et seule g est impaire puisque $g(x) = -g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Enfin, on a les tableaux de variation suivants :

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	0	$\searrow$	$-\infty \; \Vert \; +\infty$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Solution 4 - Petit Gauss (☞ exercice)

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n : « $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

- Initialisation : n = 1. On a $\sum_{k=0}^{1} k = 0 + 1 = \frac{1\times 2}{2}$. Donc P_1 est vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie et on démontre P_{n+1}. On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k.$$

  Par hypothèse de récurrence, on obtient que

$$(n+1) + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Donc P_{n+1} est vraie.

Ainsi, la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrons ce résultat sans utiliser de récurrence. On a

$$S = 0+1+2+\cdots+(n-1)+n = (n-n)+(n-(n-1))+(n-(n-2))+\cdots+(n-1)+(n-0) = \sum_{k=0}^{n} n-k.$$

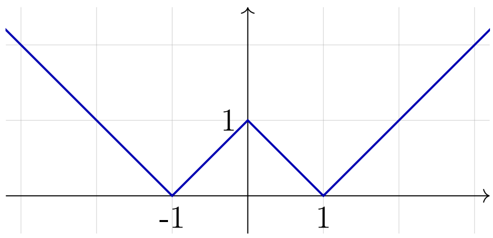
Ainsi, en sommant les deux expressions de S, on obtient que

$$S + S = \sum_{k=0}^{n} k + (n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1).$$

D'où le résultat en divisant cette égalité par 2.

Solution 5 - Valeurs absolues imbriquées (☞ exercice)

1.



2. On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned}
f(x) > 1/2 &\Leftrightarrow ||x|-1| > 1/2 \\
&\Leftrightarrow |x|-1 > 1/2 \text{ ou } |x|-1 < -1/2 \\
&\Leftrightarrow |x| > 3/2 \text{ ou } |x| < 1/2 \\
&\Leftrightarrow (x > 3/2 \text{ ou } x < -3/2) \text{ ou } (x < 1/2 \text{ et } x > -1/2) \\
&\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\tfrac{3}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[\cup \left]\tfrac{3}{2}, +\infty\right[.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow ||x|-1| = 0 \\
&\Leftrightarrow |x|-1 = 0 \\
&\Leftrightarrow |x| = 1 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1
\end{aligned}$$

   On a

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\Leftrightarrow ||x|-1| = 1 \\
&\Leftrightarrow |x|-1 = 1 \text{ ou } |x|-1 = -1 \\
&\Leftrightarrow |x| = 2 \text{ ou } |x| = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 0
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} f(x)=2 &\Leftrightarrow ||x|-1|=2 \\ &\Leftrightarrow |x|-1=2 \text{ ou } |x|-1=-2 \\ &\Leftrightarrow |x|=3 \text{ ou } |x|=-1 \\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=-3 \end{aligned}$$

(le cas $|x|=-1$ est impossible).

Solution 6 - Inégalités triangulaires (☛ exercice)

1. On a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$, donc en sommant ces inégalités, on obtient que $-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$. Ainsi, on a bien $|x+y| \leq |x|+|y|$.

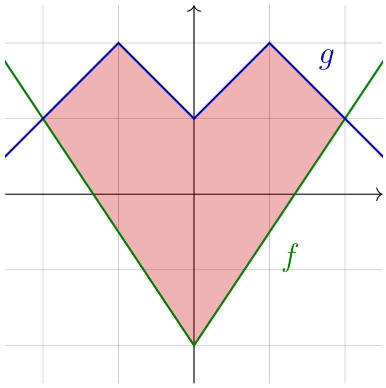
   Si x et y ont même signe, alors ($x=|x|$ et $y=|y|$) ou ($x=-|x|$ et $y=-|y|$), et dans ce cas il y a bien égalité puisque $|x+y|=||x|+|y||=|x|+|y|$ ou $|x+y|=|-|x|-|y||=||x|+|y||=|x|+|y|$. Dans le cas où x et y ont un signe opposé, on n'a pas égalité en général. Par exemple, pour $x=1$ et $y=-1$, on a $|x+y|=0$ qui est différent de $|x|+|y|=2$.
2. On écrit $x=(x-y)+y$ et on applique l'inégalité précédente. On obtient $|x| \leq |x-y|+|y|$.
3. On fait de même avec y pour obtenir $|y| \leq |y-x|+|x|$. On a alors à la fois $|x|-|y| \leq |x-y|$ et $|y|-|x| \leq |y-x|=|x-y|$. En multipliant cette seconde inégalité par -1 (ce qui change le sens de l'inégalité), on obtient que $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$, et donc $||x|-|y|| \leq |x-y|$.
4. On pose $y=-2$ et on applique la formule précédente : $||x|-|-2|| \leq |x-(-2)|$, donc $||x|-2| \leq |x+2|$. Le graphe de la fonction $||x|-2|$ est donc en dessous du graphe de la fonction $|x+2|$.

Solution 7 - Entre deux courbes (☛ exercice)

On écrit les fonctions f et g comme fonctions affines par morceaux :

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{2}{3}x-2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3}x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ -x+1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

On trace f et g sur un même graphe, et on colorie les points du plan situés en dessous g et au dessus de f.



Solution 8 - Une équation (☞ exercice)

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_a) : \left|\frac{2|x|-3}{|x|+1}\right| = a \Leftrightarrow \frac{|2|x|-3|}{|x|+1} = a \Leftrightarrow |2|x|-3| = a(|x|+1).$$

On effectue une disjonction de cas pour retirer les valeurs absolues de l'expression obtenue

$$(E_a) : \begin{cases} |2x+3| = -ax+a & \text{si } x \leq 0 \\ |2x-3| = ax+a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3 = -ax+a & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ 2x+3 = -ax+a & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ -2x+3 = ax+a & \text{si } 0 \leq x \geq \frac{3}{2} \\ 2x-3 = ax+a & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Après simplifications, on obtient

$$(E_a) : \begin{cases} (-2+a)x = a+3 & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ (2+a)x = a-3 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ -(2+a)x = a-3 & \text{si } 0 \leq x \geq \frac{3}{2} \\ (2-a)x = a+3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

On spécialise maintenant la valeur de a.

- Si $a = 2$, on a

$$(E_2) : \begin{cases} 0 = 5 & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ 4x = -1 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ -4x = -1 & \text{si } 0 \leq x \geq \frac{3}{2} \\ 0 = 5 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

- Si $a = 4$, on a
$$(E_4) : \begin{cases} 2x = 7 & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ 6x = 1 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ -6x = 1 & \text{si } 0 \leq x \geq \frac{3}{2} \\ -2x = 7 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$
Aucun cas n'est possible, les deux premiers donnent que x est strictement positif (alors qu'il est négatif), et les deux dernier donnent que x est strictement négatif (alors qu'il est positif). Donc (E_4) n'admet pas de solutions.

- Si $a = 1$, on a
$$(E_1) : \begin{cases} -x = 4 & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \\ 3x = -2 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \\ -3x = -2 & \text{si } 0 \leq x \geq \frac{3}{2} \\ x = 4 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-4, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 4\right\}$$

Solution 9 - Valeur absolue et trinôme (☞ exercice)

On effectue une disjonction de cas pour réécrire (E) sans valeurs absolues :

- Si $5x+2 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq -2/5$. Alors l'équation (E) devient $2x^2-(-5x+2)-5 = 0$ c'est-à-dire $2x^2 + 5x - 7 = 0$. On résout maintenant cette équation du second degré en calculant le discriminant : $\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2$. Les racines de ce polynôme sont alors
$$\frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-5+9}{4} = 1.$$
Parmi celles-ci, seule $-7/2$ appartient à $]-\infty, -2/5[$. C'est donc la seule solution de (E) dans cet intervalle.

- Sinon, $x \geq -2/5$. L'équation (E) devient alors $2x^2 - 5x + 2 - 5 = 0$, c'est-à-dire $2x^2 - 5x - 3 = 0$ et le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$. Les racines de ce polynôme sont alors
$$\frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{5+7}{4} = 3.$$
Parmi celles-ci, seule 3 est dans l'intervalle $[-2/5, +\infty[$, donc c'est la seule solutions de (E) dans cet intervalle.

Finalement, on a trouvé toutes les solutions de (E), il s'agit de $-7/2$ et -3.
