

Colles CMI L2

Jad ABOU YASSIN

7 novembre 2025

Algèbre

Table des matières

Questions de cours	2
Exercice 1 - Sous-espaces vectoriels	2
Exercice 2 - Applications linéaires	2
Exercice 3 - Bases, coordonnées et dimension	2
Exercices	2
Exercice 4 - ★★☆☆ Changement de base	2
Exercice 5 - ★★☆☆ Noyau et image d'une matrice	3
Exercice 6 - ★★☆☆ Rotations dans $\mathbb{R}^3$	4
Exercice 7 - ★★☆☆ Évaluation et interpolation	4

Questions de cours

Exercice 1 - Sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E . Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}, \quad F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}, \quad F_3 = \{(a + b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2 - Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner la définition du noyau de f , noté $\ker(f)$, et de l'image de f , notée $\text{im}(f)$. Donner une condition sur $\ker(f)$ et/ou $\text{im}(f)$ pour que f soit injective, surjective ou bijective.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice. Donner la définition du noyau de A , noté $\ker(A)$, et de l'image de A , noté $\text{im}(A)$. Quel est le lien entre matrice et application linéaire ?

Exercice 3 - Bases, coordonnées et dimension

Soit E un espace vectoriel. Donner la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice et d'une base de E . Définir la notion de dimension de E . Soit $\mathcal{B}$ une base de E , et $u \in E$ un vecteur. Définir les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Donner les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercices

★★☆ Exercice 4 - Changement de base (solution 📖)

1. Soit la famille de vecteurs suivante

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathcal{B}_c$ vers la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}}$.

2. Vérifier que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique vers la base, notée $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c}$, est la matrice suivante :

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire définie par :

$$f(e_1) = 5e_1 - e_2 + 2e_3; \quad f(e_2) = 6e_1 + 4e_3; \quad f(e_3) = -6e_1 + e_2 - 3e_3.$$

Donner la matrice représentative de f dans la base canonique, notée M . Calculer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, notée D .

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Dédurre de ce qui précède une expression de M^k en fonction de k , D et des matrices de passages calculées précédemment. Calculer M^k en fonction uniquement de k .

★★★ Exercice 5 - Noyau et image d'une matrice (solution 📖)

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{R})$ définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -14 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Sans faire de calcul, déterminer 5 vecteurs dans $\text{im}(A)$.
2. Parmi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^5$, lesquels appartiennent à $\ker(A)$?

$$u_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0, 1, 1), \quad u_3 = (0, -1, 0, -2, -2).$$

3. Déterminer la forme échelonnée réduite de A .
4. Déterminer une base de $\ker(A)$, notée $\mathcal{B}_1$ et une base de $\text{im}(A)$, notée $\mathcal{B}_2$.
5. Exprimer les vecteurs de la question 1. qui appartiennent au noyau de A dans la base $\mathcal{B}_1$.
6. Les vecteurs suivants sont-ils dans $\text{im}(A)$? Si oui, les exprimer dans la base $\mathcal{B}_2$.

$$v_1 = (1, 1, 5, 7), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4), \quad v_3 = (0, 1, -2, -3).$$

★★☆ Exercice 6 - Rotations dans $\mathbb{R}^3$ (solution 📖)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On pose $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

1. Soit $u = (x, y, z) \in E$. Donner les coordonnées du point $v \in \mathbb{R}^3$ obtenu à partir du point u après avoir effectué une rotation d'angle θ par rapport à l'axe $\{x = y = 0\}$ (« l'axe des z »). En déduire l'expression de la matrice de rotation d'angle θ par rapport à l'axe des z , notée $R_{\theta,z}$.
2. Sans faire de calcul, donner l'expression des matrices de rotation $R_{\theta,y}$ et $R_{\theta,x}$.
3. Montrer que ces matrices de rotation sont inversibles en calculant leur déterminant (on ne le fera que pour un des trois axes). Trouver la matrice inverse de $R_{\theta,z}$.
4. Calculer $R_{\theta,x}R_{\varphi,z}$.
5. On définit une matrice de rotation dans $\mathbb{R}^3$ comme étant toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tMM = I_3$ et $\det(M) = 1$. Montrer que $R_{\theta,x}R_{\varphi,z}$ est une matrice de rotation.

★★☆ Exercice 7 - Évaluation et interpolation (solution 📖)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On pose $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que les coordonnées de α soient deux à deux distinctes. Enfin, on considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{ev}_\alpha : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) \end{array}.$$

1. Montrer que l'application ev_α est linéaire.
2. Montrer que l'application ev_α est injective. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et, sans faire de calcul, montrer que cette application est surjective.
3. Exprimer la matrice représentative de ev_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, notée $\mathcal{P} = (1, X, \dots, X^n)$, et la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on notera $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ (attention au décalage d'indice).
4. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Trouver l'antécédent de e_i par ev_α .

5. On pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le polynôme

$$L_{i,\alpha}(X) = \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = (L_{0,\alpha}, \dots, L_{n,\alpha})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Exprimer la matrice représentative de ev_α dans la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Quel est le lien entre les valeurs $(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))$ et les coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}$?

Corrections

Solution 4 - Changement de base (🔗 exercice)

1. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on calcule le déterminant de la matrice obtenue plaçant en colonne les vecteurs de $\mathcal{B}$. On a par la règle de SARRUS :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 + 2 = 1 \neq 0.$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En particulier, la matrice

$$P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathcal{B}$.

2. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est l'inverse de la matrice $P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}}$. On calcule le produit $P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c}$ pour vérifier qu'il s'agit bien de l'identité (inutile de faire le produit dans l'autre sens, c'est automatique!)

$$P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c}$ est bien la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ vers la base canonique.

3. La matrice représentative de f dans la base canonique s'obtient en plaçant en colonne les coordonnées dans la base canonique de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. On a donc

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, il faut conjuguer M par les matrices de passages. Attention à l'ordre! On veut la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, mais M est exprimée dans la base canonique. Il faut que les indices des matrices de passages soient cohérents avec les bases dans lesquels les matrices sont exprimées :

$$D = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c} M P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}}.$$

Ce qui donne après calcul

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On a donc $M = P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} D P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c}$, et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P_{\mathcal{B}_c \leftarrow \mathcal{B}} D^k P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_c}$. Or, D est une matrice diagonale, donc $D^k = \text{diag}(2^k, (-1)^k, 1)$. On peut alors calculer M^k explicitement :

$$\begin{aligned} M^k &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 2^k & -2^k \\ (-1)^k & 2(-1)^k & 2(-1)^{k+1} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} + (-1)^{k+1} & 2^{k+1} + 2(-1)^{k+1} & -2^{k+1} + 2(-1)^k \\ -2^k + 1 & -2^k + 2 & 2^k - 1 \\ (-1)^{k+1} + 1 & 2(-1)^{k+1} + 2 & 2(-1)^k - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : On calcule avec cette formule M^0 et M^1 pour vérifier rapidement le résultat obtenu !

Solution 5 - Noyau et image d'une matrice (🔗 exercice)

1. Les cinq colonnes de A sont des vecteurs dans $\text{im}(A)$, chacun étant l'image par A d'un vecteur de la base canonique.
2. On calcule les produits Au_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$Au_1 = (0, 4, 2, 0), \quad Au_2 = (0, 0, 0, 0), \quad Au_3 = (0, 0, 0, 0).$$

Donc $u_2, u_3 \in \ker(A)$ et $u_1 \notin \ker(A)$.

3. On applique l'algorithme du pivot de GAUSS à la matrice A . On ne détaille que les opérations

élémentaires dans cette correction.

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 & -1 \\ 7 & -14 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_1 \end{array}} & [\dots] \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2} & [\dots] \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{22}L_4 \end{array}} & [\dots] \\
 \text{(Forme échelonnée non réduite)} & \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{(Forme échelonnée réduite)} & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

4. On note B la forme échelonnée réduite de A obtenue à la question précédente. On a $\ker(A) = \ker(B)$. Calculons $\ker(B)$. Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$. On a

$$B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + e = 0 \\ c = 0 \\ d - e = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - e \\ c = 0 \\ d = e. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 \ker(A) = \ker(B) &= \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid a = 2b - e \text{ et } c = 0 \text{ et } d = e\} \\
 &= \{(2b - e, b, 0, e, e) \mid b, e \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}((2, 1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 1, 1)).
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $(2, 1, 0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0, 1, 1)$ étant non colinéaires, il s'agit bien d'une famille libre donc d'une base de $\ker(A)$.

Pour calculer l'image de A , on n'a pas l'égalité $\text{im}(A) = \text{im}(B)$. En revanche, on sait par le cours que $\text{im}(A)$ est engendré par les colonnes de A à la même position qu'une colonne de B qui contient un pivot, et que cette famille génératrice est libre (donc c'est une base). Les

colonnes pivot de B sont les colonnes numéros 1, 3 et 4, donc la famille

$$((1, -3, 3, 7), (0, 4, 2, 0), (3, -1, 4, -1))$$

est une base de $\text{im}(A)$.

5. On a $u_2 = (2, 1, 0, 0, 0) + (-1, 0, 0, 1, 1)$, donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$ sont $(1, 1)$. De même, on a $u_3 = -(2, 1, 0, 0, 0) - 2(-1, 0, 0, 1, 1)$ (on peut le trouver en résolvant un système si on ne le remarque pas tout de suite), donc ses coordonnées dans cette base sont $(-1, -2)$.
6. On a $v_1 = (1, -3, 3, 7) + (0, 4, 2, 0)$ donc $v_1 \in \text{im}(A)$ et ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ sont $(1, 1, 0)$. On cherche à savoir si v_2 s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$. On résout le système donné par l'égalité

$$a(1, -3, 3, 7) + b(0, 4, 2, 0) + c(3, -1, 4, -1) = (1, 2, 3, 4).$$

Après application des premières étapes de la méthode du pivot de GAUSS, on trouve le système

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 2c = \frac{5}{4} \\ c = \frac{5}{18} \\ c = \frac{3}{22}. \end{cases}$$

Or, $\frac{5}{18} \neq \frac{3}{22}$, donc ce système n'a pas de solution. Ainsi, v_2 n'appartient pas à l'image de A . Puisque $v_3 = v_2 - v_1$ et que v_1 appartient à l'image de A mais pas v_2 , alors v_3 n'appartient pas à l'image de A (sinon, $v_2 = v_1 + v_3$ appartiendrait à l'image de A).

Solution 6 - Rotations dans $\mathbb{R}^3$ (🔑 exercice)

1. La rotation étant effectuée autour de l'axe z , la coordonnée selon z de v est la même que celle de u , et la projection sur le plan $z = 0$ de u (c'est-à-dire le vecteur $(x, y, 0)$) subit une rotation dans ce plan d'angle θ , donc la projection de v sur ce plan est $(x \cos(\theta), y \sin(\theta), 0)$. Finalement, on a $v = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z)$ (Faire un dessin pour le voir !!) On en déduit l'expression de $R_{\theta,z}$ suivante :

$$R_{\theta,z} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient que

$$R_{\theta,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

3. On calcule le déterminant de $R_{\theta,z}$ par un développement selon la dernière ligne (ou colonne) :

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 1(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 1.$$

Donc $R_{\theta,z}$ est inversible puisque son déterminant est non nul. Il en est de même pour $R_{\theta,x}$ et $R_{\theta,y}$.

On intuite sur l'inverse d'une rotation d'angle θ autour de l'axe des z est une rotation d'angle $-\theta$ autour du même axe. On fait le calcul pour vérifier que $R_{-\theta,z}$ est bien l'inverse de $R_{\theta,z}$.

$$\begin{aligned} R_{\theta,z}R_{-\theta,z} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $R_{-\theta,z}$ est bien la matrice inverse de $R_{\theta,z}$.

4. On effectue un calcul de produit de matrices

$$\begin{aligned} R_{\theta,x}R_{\varphi,z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. On note $M = R_{\theta,x}R_{\varphi,z}$ la matrice calculée précédemment. On calcule alors tMM . Pour raccourcir les notations, on notera c pour $\cos$ et s pour $\sin$.

$$\begin{aligned} {}^tMM &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^2(\varphi) + s^2(\varphi) & c(\theta)c(\varphi)s(\varphi) - c(\theta)c(\varphi)s(\varphi) & c(\varphi)s(\theta)s(\varphi) - c(\varphi)s(\theta)s(\varphi) \\ c(\theta)c(\varphi)s(\varphi) & c^2(\theta)s^2(\varphi) + c^2(\theta)c^2(\varphi) + s^2(\theta) & c(\theta)s(\theta)s^2(\varphi) + c(\theta)s(\theta)c^2(\varphi) - s(\theta)c(\theta) \\ c(\varphi)s(\theta)s(\varphi) & c(\theta)s(\theta)s^2(\varphi) + c(\theta)c^2(\varphi)s(\theta) - c(\theta)s(\varphi) & s^2(\theta)s^2(\varphi) + c^2(\varphi)s^2(\theta) + c^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient d'un usage intensif des relations $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Enfin, il reste à calculer le déterminant de la matrice M . On applique la règle de SARRUS :

$$\begin{aligned} \det(M) &= c^2(\theta)c^2(\varphi) + s^2(\theta)s^2(\varphi) + c^2(\theta)s^2(\varphi) + c^2(\varphi)s^2(\theta) \\ &= c^2(\theta)(c^2(\varphi) + s^2(\varphi)) + s^2(\theta)(c^2(\varphi) + s^2(\varphi)) \\ &= c^2(\theta) + s^2(\theta) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalement, la matrice $M = R_{\theta,x}R_{\varphi,z}$ est bien une matrice de rotation !

Remarque : Il est très difficile de trouver l'axe de rotation et l'angle de rotation de cette matrice !

Solution 7 - Évaluation et interpolation (🔗 exercice)

1. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $(\lambda P + Q)(a) = \lambda P(a) + Q(a)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \text{ev}_\alpha(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(\alpha_0), \dots, (\lambda P + Q)(\alpha_n)) \\ &= (\lambda P(\alpha_0) + Q(\alpha_0), \dots, \lambda P(\alpha_n) + Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) + (Q(\alpha_0), \dots, Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda \text{ev}_\alpha(P) + \text{ev}_\alpha(Q). \end{aligned}$$

Donc l'application ev_α est linéaire.

2. Pour montrer l'injectivité de l'application ev_α , on montre que son noyau est réduit au polynôme nul. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\alpha_0) = \dots = P(\alpha_n) = 0$. Alors P est un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines distinctes. Donc $P = 0$. Ainsi, ev_α est injective.

Puisque la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n + 1$, qui est aussi la dimension de $\mathbb{R}^{n+1}$, alors ev_α est aussi surjective (donc bijective).

3. On calcule $\text{ev}_\alpha(X^i)$ pour $0 \leq i \leq n$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. On a par définition

$$\text{ev}_\alpha(X^i) = (\alpha_0^i, \dots, \alpha_n^i).$$

Donc la matrice représentative de ev_α dans le couple de bases $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{P}, \mathcal{B}}(\text{ev}_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^{n-1} & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_{n-1}^n \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

4. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on cherche le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, qu'on note $P_{i,\alpha}$, tel que $\text{ev}_\alpha(P_{i,\alpha}) = e_i$. Cela signifie que $P_{i,\alpha}(\alpha_j) = 0$ si $i \neq j$ et $P_{i,\alpha}(\alpha_i) = 1$. En particulier, puisque les α_j pour $j \neq i$ sont tous racine de $P_{i,\alpha}$, on peut factoriser $P_{i,\alpha}$ par le produit $(X - \alpha_0) \dots (X - \alpha_{i-1})(X - \alpha_{i+1}) \dots (X - \alpha_n)$. Or, ce facteur est de degré n , donc il s'agit de $P_{i,\alpha}$ à un multiple scalaire près noté C . Trouvons ce scalaire : on a

$$P_{i,\alpha} = C \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} (X - \alpha_j).$$

On sait que $P_{i,\alpha}(\alpha_i) = 1$, donc

$$1 = P_{i,\alpha}(\alpha_i) = C \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Ainsi, $C = \left(\prod_{0 \leq j \neq i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j) \right)^{-1}$ (qui est bien défini puisque les α_i sont deux à deux distincts). Finalement, on a

$$P_{i,\alpha} = \prod_{0 \leq j \neq i \leq n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$

5. Le polynôme $L_{i,\alpha}$ est le polynôme $P_{i,\alpha}$ qu'on a trouvé à la question précédente. Il s'agit donc de l'antécédent de e_i par l'application ev_α . On montre que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 L_{0,\alpha} + \dots + \lambda_n L_{n,\alpha} = 0$. On applique l'application ev_α , et on obtient par linéarité : $\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Or, la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc elle est libre, et les scalaires λ_i sont tous nuls. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ est aussi libre.

Puisque la famille $\mathcal{F}$ est de cardinal $n + 1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n + 1$, alors c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Pour exprimer la matrice représentative de ev_α dans les bases $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, on écrit en colonne dans une matrice les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images par ev_α des vecteurs de la base $\mathcal{F}$. Or, on a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{ev}_\alpha(L_{i,\alpha}) = e_i$ par les questions précédentes. Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(\text{ev}_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Il s'agit simplement de la matrice identité ! En particulier, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$ sont les valeurs $(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))$.