

Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

15 Septembre 2022

Séries numériques

Table des matières

Questions de cours	2
Exercice 1 - Convergence de quelques séries	2
Exercice 2 - Exemples de lien entre nature de la série et terme général	2
Exercice 3 - Série harmonique	3
Exercices	4
Exercice 4 - (**) Série des $f(1/n)$	4
Exercice 5 - (**) Séries de BERTRAND	4
Exercice 6 - (**) Une série presque alternée	6
Exercice 7 - (**) Série $\sum a^{H_n}$	6
Exercice 8 - (***) Théorème de réarrangement de RIEMANN	7

Questions de cours

Exercice 1 - Convergence de quelques séries Dire si oui ou non les séries suivantes convergent :

- | | | | |
|-------------------------------------|--|--|---|
| 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^n$ | 3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | 5. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n\sqrt{2}}$ | 7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$ |
| 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n}$ | 4. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ | 6. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)^{2022}}{n^{15.09}}$ | 8. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(e^n)}{e^{\cos(n)}} \frac{\pi^n}{n!}$ |

Remarque : Je ne poserai peut-être pas toutes ces séries à l'oral

Solution :

- | | |
|---|---|
| 1. Non, diverge grossièrement | 5. Oui, série de Riemann ($\sqrt{2} \simeq 1.414 > 1$) |
| 2. Oui, série géométrique de raison $1/e \in]-1, 1[$ | 6. Oui, règle du $n^\alpha u_n$ |
| 3. Non, série de Riemann | 7. Oui, règle de d'Alembert (en utilisant $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$) |
| 4. Oui, critère des séries alternées | 8. Oui, règle du $n^\alpha u_n$, ou bien terme général $O(\pi^n/n!)$ qui converge (vers e^π d'ailleurs). |

Exercice 2 - Exemples de lien entre nature de la série et terme général

Justifier si c'est vrai, donner un contre-exemple si c'est faux :

1. Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, est-ce que $(u_n)_n$ tend vers 0 ?
2. Si $(u_n)_n$ est positive et tend vers 0 en décroissant, est-ce que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge ?
3. Si $(u_n)_n$ est une suite telle que les sommes partielles soient bornées, est-ce que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge ?
4. Si $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs telle que les sommes partielles soient bornées, est-ce que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge ?
5. Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, est-ce que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge ?
6. Si $(u_n)_n$ est de signe quelconque et $(v_n)_n$ positive avec $u_n \sim v_n$. Les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ ont-elle même nature ?
7. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives avec $u_n \sim v_n$ et les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergentes. A-t-on $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$?

Solution :

1. Oui (car la suite des sommes partielles converge, donc la différence de deux termes consécutifs tend vers 0, donc $u_n \rightarrow 0$)
 2. Non. La série harmonique diverge et pourtant $1/n \rightarrow 0$ en décroissant
 3. Non. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n$ a pour suite des sommes partielles la suite $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, qui est bornée, mais la série ne converge pas.
 4. Oui. La série étant à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Si elle est bornée, elle est majorée, donc converge.
 5. Non. Prendre $u_n = -1$ pour tout n et $v_n = 0$ pour tout n .
 6. Oui. C'est l'énoncé du théorème de sommation des relations de comparaison.
 7. Non. On peut changer les premiers termes comme on veut.
-

Exercice 3 - Série harmonique

1. Rappeler ce qu'on appelle par série harmonique
2. Montrer que la série harmonique diverge
3. Démontrer l'équivalent suivant : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ (où H_n est la somme partielle d'ordre n)
4. Démontrer le développement asymptotique suivant : $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ (où γ est une constante, appelée constante d'EULER)

Solution :

1. La série harmonique est la série de terme général $1/n$
2. On peut procéder de plusieurs façons. En voici une : comparaison série-intégrale. La fonction $f : x \mapsto 1/x$ est positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, la série harmonique a même nature que $\int 1/x dx$ en $+\infty$, qui diverge en $+\infty$.
3. Toujours avec la comparaison série-intégrale, on a l'encadrement

$$\int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

En sommant (pour l'inégalité de gauche, on somme à partir de 2 et on ajoute 1 de chaque côté) :

$$1 + \int_1^N \frac{1}{x} dx \geq H_N \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx$$

Donc $\ln(N) + 1 \geq H_N \geq \ln(N+1)$. On a un encadrement de H_N par deux fonctions équivalentes à $\ln(N)$ quand $N \mapsto +\infty$. Donc $H_N \sim \ln(N)$.

4. On pose $u_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$. Par l'encadrement précédent, $u_n \geq 0$. De plus, $u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge (vers un réel γ). Or, $\sum_{n=0}^N u_n = H_N - \ln(N+1)$. Donc $H_N \underset{+\infty}{=} \ln(N+1) + \gamma + o(1) = \ln(N) + \gamma + o(1)$ car $\ln(N+1) - \ln(N) = \ln(1 + 1/N) \rightarrow 0$.

Exercices

Exercice 4 - () Série des $f(1/n)$** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. En fonction de la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$, donnez la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(1/n)$.

Indication : On peut écrire un développement de TAYLOR de f en zéro

Solution : Tout d'abord, si $f(0) \neq 0$, alors la suite $(f(1/n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(1/n)$ diverge grossièrement. Supposons maintenant que $f(0) = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, on a par la formule de TAYLOR-YOUNG : $f(x) \underset{0}{=} x f'(0) + O(x^2)$. Autrement dit, on a $f(1/n) \underset{+\infty}{=} f'(0)/n + O(1/n^2)$. Si $f'(0) = 0$, alors $f(1/n) = O(1/n^2)$. Par sommation des relations de comparaisons, comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n^2$ converge (série de RIEMANN), alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(1/n)$ converge. Sinon (si $f'(0) \neq 0$), alors la série de terme général $f(1/n) - f'(0)/n$ converge (pour les mêmes raisons que précédemment), donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(1/n)$ diverge, car dans le cas contraire la série de terme général $f(1/n) - (f(1/n) - f'(0)/n)$, c'est-à-dire de terme général $f'(0)/n$, convergerait. Et ce n'est pas le cas (série harmonique).

Finalement : la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(1/n)$ converge si et seulement si $f(0) = f'(0) = 0$.

Exercice 5 - () Séries de BERTRAND** Soient $\alpha, \beta > 0$. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

appelée série de BERTRAND. On cherche à déterminer pour quelles valeurs de α et β cette série converge.

Remarque : Le terme général de cette série commence à 2, car u_0 et u_1 n'ont pas de sens

1. Si $\alpha > 1$, montrer que la série de BERTRAND converge.

Indication : (Orale) On pourra utiliser la règle du $n^\alpha u_n$

2. Si $\alpha < 1$, montrer que la série de BERTRAND diverge.

Indication : (Orale) On pourra montrer que $1/n = o(u_n)$ dans ce cas

3. On suppose maintenant que $\alpha = 1$. En considérant la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}$, montrer que la série de BERTRAND converge si et seulement si $\beta > 1$.

Remarque : Les séries de BERTRAND se généralisent, on peut ajouter $\ln(\ln(n))^\delta$, $\ln(\ln(\ln(n)))^\gamma$, etc... et on obtient un résultat similaire : la série converge si et seulement si $(\alpha, \beta, \delta, \dots) >_{lex} (1, 1, 1, \dots)$, où on considère l'ordre lexicographique.

Solution :

1. Utilisons la règle du $n^\alpha u_n$. Ici, le α de la règle n'est pas nécessairement le α de l'énoncé ! Mais il va tout de même marcher. En effet, $n^\alpha u_n = \frac{1}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la série de BERTRAND converge

2. Montrons que $1/n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$. Comme $\sum u_n$ est à termes positifs et que la série harmonique diverge, on obtient que la série de BERTRAND diverge. On calcule

$$\frac{1}{nu_n} = \frac{n^\alpha (\ln(n))^\beta}{n} = n^{\alpha-1} (\ln(n))^\beta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $\alpha - 1 < 0$ et par croissance comparée.

3. Commençons d'abord par le cas où $\beta \neq 1$. La fonction f est bien définie sur $[2, +\infty[$, et elle y est de classe C^1 . On a $f(2) > 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f'(x) = -\frac{(\ln(x))^\beta + \beta(\ln(x))^{\beta-1}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} < 0$. Ainsi, f est une fonction positive, décroissante et tendant vers 0 en l'infini, on peut appliquer une comparaison série/intégrale. Autrement dit, la série de BERTRAND a la même nature que $\int f(x)dx$. Soit $A > 2$, étudions la convergence de cette intégrale :

$$\int_2^A \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} dx \underset{\text{Primitive}}{=} \left[\frac{1}{1-\beta} (\ln(x))^{1-\beta} \right]_2^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{Si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{Si } \beta < 1 \end{cases}$$

Donc la série de BERTRAND converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$. Traitons maintenant le cas $\beta = 1$. Dans ce cas, la fonction f est toujours positive, décroissante et tendant vers zéro en l'infini, mais une primitive de f est $\ln(\ln(x))$. Ainsi :

$$\int_2^A \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_2^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc la série de BERTRAND diverge pour $\beta = 1$.

Finalement, on a obtenu que la série de Bertrand converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

Exercice 6 - ()** Une série presque alternée Soit $\alpha > 0$

1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge ?

Indication : (Orale) Cette série est très proche de la précédente, essayer de faire un développement limité

Solution :

1. La suite $(1/n^\alpha)$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère des séries alternées, la série $\sum_n u_n$ converge pour tout $\alpha > 0$.
2. Écrivons un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \frac{1}{1 + (-1)^n n^{-\alpha}} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

où $v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ et $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$.

Par la question précédente, la série de terme général v_n converge pour toute valeur de α . Comme $u_n = v_n + w_n$, alors les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ ont la même nature. Il suffit donc de voir pour quelles valeurs de α la série $\sum_n w_n$ converge. w_n est équivalente au terme général d'une série de Riemann $\sum_n n^{-2\alpha}$, qui est à terme positif, et qui converge si et seulement si $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1/2$. Par équivalence de séries, la série de terme général w_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$, et donc la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$

Exercice 7 - ()** Série $\sum a^{H_n}$ Soit a un réel strictement positif. Pour quelles valeurs de a la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^{1+1/2+1/3+\dots+1/n}$ converge ?

Indication : (Orale) On pourra utiliser un développement asymptotique de H_n

Solution : Notons $u_n = a^{H_n}$ le terme général de cette série. Tout d'abord, si $a \geq 1$, alors $u_n \geq 1 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Supposons maintenant que $0 < a < 1$. D'après le cours (à savoir refaire!), on a le développement

asymptotique de H_n suivant : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où $\gamma \in \mathbb{R}_+$ est la constante d'EULER. Ainsi :

$$\begin{aligned} a^{H_n} &= \exp(H_n \ln(a)) \\ &= \exp(\ln(n) \ln(a) + \gamma \ln(a) + o(1)) \\ &= \exp(\ln(n) \ln(a)) \exp(\gamma \ln(a)) \exp(o(1)) \\ &= n^{\ln(a)} a^\gamma (1 + o(1)) \\ &\sim n^{\ln(a)} a^\gamma \end{aligned}$$

Remarque : On aurait directement pu utiliser le résultat suivant : si $f = g + o(1)$, alors $\exp(f) \sim \exp(g)$. J'ai préféré refaire le calcul à la main car le passage à l'exponentielle requiert un $o(1)$, en particulier, si $f \sim g$, alors $\exp(f) \not\sim \exp(g)$, prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x + \ln(x)$. Il vaut mieux faire attention lorsqu'on a des exponentielles dans nos équivalents. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous ne pouvons pas nous contenter de l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$

a^γ étant une constante, la nature de la série de terme général $n^{\ln(a)} a^\gamma$ est la même que celle de la série de terme général $n^{\ln(a)}$, qui est une série de RIEMANN. Elle converge donc si et seulement si $\ln(a) < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $a < e^{-1}$. Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^{H_n}$ converge si et seulement si $a < e^{-1}$

Exercice 8 - (***) Théorème de réarrangement de RIEMANN

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente telle que $u_n \rightarrow 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite de signes $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

Indication : (Orale) Faire un dessin !

2. (Théorème de réarrangement de Riemann) Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = a$.

Indication : On pourra partitionner $\mathbb{N}$ en trois ensembles, celui des indices où u_n est strictement négatif, nul, strictement positif respectivement. L'idée de la preuve est très similaire à celle de la question précédente.

Solution :

1. Comme la série de terme général u_n diverge, alors il existe un entier minimal N_0 tel que $A_0 := \sum_{n=0}^{N_0} u_n > a$ (N_0 peut être nul si $a < 0$). On pose alors $\varepsilon_0 = \dots = \varepsilon_{N_0} = 1$. De même, il existe un entier $N_1 > N_0$ minimal tel que $A_1 := A_0 - \sum_{n=N_0+1}^{N_1} u_n < a$. On pose alors $\varepsilon_{N_0+1} = \dots = \varepsilon_{N_1} = -1$. On continue ainsi, ce qui construit une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrons maintenant que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge vers a . Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $S_n - a \rightarrow 0$,

où $S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k$ est la somme partielle d'ordre n . Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_k \leq n < N_{k+1}$. Pour simplifier les notations, on suppose que k est impair (de sorte à avoir $\varepsilon_i = 1$ si $N_k + 1 \leq i \leq N_{k+1}$), la preuve pour le cas pair se fait de la même manière. En particulier, on a $|S_n - a| \leq \max(|S_{N_k} - a|, |S_{N_{k+1}} - a|) = \max(a - S_{N_k}, S_{N_{k+1}} - a)$. Or, par construction, $S_{N_k} < a < S_{N_{k+1}}$ et $S_{N_{k+1}} > a > S_{N_{k+1}-1}$. Ainsi, $a - S_{N_k} < S_{N_{k+1}} - S_{N_k} = u_{N_k}$ et $S_{N_{k+1}} - a < S_{N_{k+1}} - S_{N_{k+1}-1} = u_{N_{k+1}}$. Finalement, $|S_n - a| \leq \max(u_{N_k}, u_{N_{k+1}}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. (Pour rappel, et pour éviter d'alourdir les notations, k dépend de n et $k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, mais on note tout de même seulement k au lieu de $k(n)$).

Remarque : Pour le lecteur : FAIRE UN DESSIN. La preuve ici semble longue, difficile et abstraite. Un dessin est très clair, tracer une droite horizontale d'ordonnée a , puis montez jusqu'à dépasser a , puis descendez jusqu'à dépasser a , etc...

2. On partitionne $\mathbb{N}$ en trois ensembles P, Z, N :

$$\begin{aligned} P &= \{n \in \mathbb{N} ; u_n > 0\} \\ Z &= \{n \in \mathbb{N} ; u_n = 0\} \\ N &= \{n \in \mathbb{N} ; u_n < 0\} \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que Z est vide pour simplifier les idées. On construit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ de la manière suivante, très similaire à la construction de la première question. On pose $n_P = n_N = 0$.

- Initialement, si a est positif (ou nul), on incrémente n_P et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_P -ème élément (par ordre croissant) de P (dans ce cas, c'est le premier élément de P). Si a est strictement négatif, on incrémente n_N et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_N -ème élément de N (dans ce cas, c'est le premier élément de N)
- Supposons $\sigma(0), \dots, \sigma(m)$ définis pour $m \in \mathbb{N}$. On définit $\sigma(m+1)$ de la manière suivante : Si $\sum_{n=0}^m u_{\sigma(n)} \geq a$, on incrémente n_P et on pose $\sigma(m+1)$ comme étant le n_P -ème élément de P . sinon, on incrémente n_N et on pose $\sigma(m+1)$ comme étant le n_N -ème élément de N .

Pour avoir une permutation de $\mathbb{N}$, il faut s'assurer de la bijectivité. L'injectivité est claire (on associe à chaque m un élément différent de P ou de N , qui sont disjoints), reste à voir la surjectivité. Par construction, si σ n'est pas surjective, c'est qu'elle prend qu'un nombre fini de valeurs dans P ou dans N , disons N (l'argument sera le même si c'est P). Cela signifie que la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n \in P\}} u_n)_n$ converge. Or, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est semi-convergente, donc convergente. Donc la série différence qui est la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n \in N\}} u_n)_n$ aussi. Mais alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est convergente comme somme de deux séries convergentes. Ce qui est absurde. Ainsi, σ atteint tous les éléments de P et de N , donc est surjective car il s'agit d'une partition de $\mathbb{N}$. Il reste enfin à voir que la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$ converge bien, il s'agit

du même argument que dans la question précédente (la série $\sum_n u_n$ étant semi-convergente, elle est convergente, donc le terme général u_n tend vers 0).

Enfin, il reste à traiter le cas où Z n'est pas vide. Ce qu'on fait est qu'on ajoute entre chaque étape un élément de Z , tant qu'il en reste. On introduit dans la construction de σ un troisième compteur n_Z , et si m est pair, on fait comme précédemment, et si m est impair, on incrémente n_Z puis on définit $\sigma(m)$ comme étant le n_Z -ème élément de Z .
