

Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

17 Novembre 2022

Familles sommables Probabilités sur un univers fini

Table des matières

Questions de cours	2
Exercice 1 - Lois usuelles	2
Exercice 2 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV	2
Exercice 3 - Sommation par paquets	2
Exercices	2
Familles sommables	2
Exercice 4 - (*) Un contre-exemple au théorème des séries doubles	2
Exercice 5 - (*) Sommabilité des inverses des entiers sans 9	3
Exercice 6 - (**) Une série génératrice	3
Probabilités sur un univers fini	3
Exercice 7 - (*) Atomes d'une variable aléatoire	3
Exercice 8 - (**) Loi jointe et marginales	4
Exercice 9 - (**) Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	4

Questions de cours

Exercice 1 - Lois usuelles (solution 📖)

Définissez et donner l'espérance et la variance d'une loi :

- de BERNOULLI de paramètre p
- binomiale de paramètre (n, p)
- uniforme sur un ensemble fini non vide (on calculera la variance dans le cas où l'ensemble fini non vide est $\llbracket 1, n \rrbracket$)
- géométrique de paramètre p
- de POISSON de paramètre λ

Exercice 2 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV (solution 📖)

Énoncez et démontrez les inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Application : on lance une pièce 1000 fois (on n'a que ça à faire), et on tombe 600 fois sur « pile ». Peut-on raisonnablement penser que la pièce est truquée ?

Exercice 3 - Sommation par paquets (solution 📖)

Énoncez le théorème de sommation par paquets. Énoncez également les cas particulier de sommation par tranches et par piles dans le cas d'un produit cartésien de deux ensembles d'indexation. Énoncez et démontrez la formule du produit de CAUCHY dans le cas d'une somme $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m$.

Exercices

Familles sommables

Exercice 4 - (*) Un contre-exemple au théorème des séries doubles (solution 📖)

On pose pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -\frac{1}{2^{m-n}} & \text{si } m > n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 5 - (*) Sommabilité des inverses des entiers sans 9 (solution 📖)

1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.
2. Soit A l'ensemble des entiers non nuls sans 9 dans leur écriture en base 10. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in A}$ est sommable.

Indication : On pourra partitionner A en ensembles d'entiers à $k+1$ chiffres dans leur écriture en base 10, pour tout k dans $\mathbb{N}$

Exercice 6 - () Une série génératrice (solution 📖)**

On fixe $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En exprimant la somme de cette famille de deux manières différentes, montrer l'identité suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n .

Probabilités sur un univers fini

Exercice 7 - (*) Atomes d'une variable aléatoire (solution 📖)

Soit X une variable aléatoire (quelconque, pas nécessairement discrète) à valeurs dans un ensemble E . Un élément $x \in E$ est appelé un atome de X si $\mathbb{P}(X = x) > 0$.

1. Montrez que l'ensemble des atomes de X est au plus dénombrable.
 2. Montrez que si X est une variable aléatoire discrète, alors $\sum_{x \in A(X)} \mathbb{P}(X = x) = 1$, où $A(X)$ est l'ensemble des atomes de X
-

Exercice 8 - (**) Loi jointe et marginales (solution 📌)

1. Soient Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Définissez les marginales de Z . Représentez cette notion à l'aide d'un tableau.
2. Donnez un exemple où X, Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles et Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que, si U, V sont les marginales de Z , alors $X \sim U$, $Y \sim V$ mais $(X, Y) \not\sim Z$.
3. Montrez que si X, Y sont indépendantes, alors la loi de $Z = (X, Y)$ est entièrement déterminée par les lois de X et Y . Montrez aussi que les lignes (respectivement les colonnes) du tableau représentant la loi jointe (X, Y) sont proportionnels.
4. Application : est-il possible de piper de manière identique deux dés à 6 faces tels que la variable aléatoire indiquant la somme obtenue suive une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$?

Exercice 9 - (**) Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (solution 📌)

Soit $n \geq 2$. Montrez qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.

Indication : On pourra prendre $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ une famille de RADEMACHER indépendantes et calculer $\mathbb{E}(\det(A)^2)$ où A est la matrice aléatoire $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$

Solutions des exercices

Solution 1 - Loix usuelles (🔒 exercice)

- Soit $p \in [0, 1]$. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$. On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.
- Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini non vide. Alors $X \sim \mathcal{U}(E)$ si et seulement si $\forall x \in E$, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ et, si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$
- Soit $p \in]0, 1[$. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Soit $\lambda > 0$. Alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On a alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Solution 2 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV (🔒 exercice)

Inégalité de MARKOV Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance finie et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Démonstrations On a :

$$a \mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$$

En passant à l'espérance et par croissance de celle-ci, on obtient l'inégalité de MARKOV. Pour l'inégalité de BT, on applique l'inégalité de MARKOV à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, qui est d'espérance finie égale à la variance de X . On obtient alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Application Si la pièce n'est pas truquée, on peut la modéliser comme une somme de 1000 variables aléatoires de BERNOULLI de paramètre $1/2$. La somme S suit alors une loi binomiale de paramètres $(1000, 1/2)$. Ainsi, $\mathbb{E}(S) = 500$ et $\mathbb{V}(S) = 250$. Par l'inégalité de BT, on a :

$$\mathbb{P}(|S - 500| = 100) \leq \mathbb{P}(|S - 500| \geq 100) \leq \frac{250}{10000} = 2.5\%$$

Ainsi, on peut quand même raisonnablement penser que la pièce est truquée... (surtout que ces inégalités sont très peu fines!)

Solution 3 - Sommation par paquets (🔗 exercice)

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable. Alors si $(I_j)_{j \in J}$ est une partition de I , on a l'égalité :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} x_i$$

Dans le cas d'un produit cartésien $I = A \times B$, on obtient le théorème de sommation par tranches en considérant la partition $(\{a\} \times B)_{a \in A}$, et par piles en considérant la partition $(A \times \{b\})_{b \in B}$. On a alors :

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} x_{(a,b)} = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} x_{(a,b)} = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A} x_{(a,b)}$$

Si on a une famille sommable produit $(a_n b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$, on a l'égalité suivante

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

où $c_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l}$. En effet, il s'agit d'une sommation par paquets où :

$$\mathbb{N}^2 = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 ; n + m = k\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{(l, k - l) ; 0 \leq l \leq k\}$$

Solution 4 - (*) Un contre-exemple au théorème des séries doubles (🔗 exercice)

Fixons $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n} = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n-m} = 1 - 2^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} 2^n = 1 - 2^{-m} (2^m - 1) = 2^{-m}$$

Ainsi, la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n})$ converge, et sa somme vaut 2. De même, fixons $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n} = 1 - \sum_{m=n+1}^{+\infty} 2^{n-m} = 1 - 2^n \sum_{m=n+1}^{+\infty} 2^{-m} = 1 - 2^n 2^{-n} = 0$$

Ainsi, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n})$ converge, et sa somme vaut 0.

Les deux sommes sont différentes, donc la famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

Solution 5 - (*) Sommabilité des inverses des entiers sans 9 (🔒 exercice)

- Il y a plusieurs façons de le montrer, soit on effectue une comparaison série/intégrale et on obtient que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ (cf cours sur les séries numériques), soit on fait une sommation par paquets :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} = +\infty$$

Remarquez qu'on peut faire tout ceci car la famille en question est positive (on peut donc tout faire, réarranger les termes, faire des paquets, etc. sans se soucier de la sommabilité).

- On écrit

$$A = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{n \in A ; 10^k \leq n < 10^{k+1}\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \{n \in A ; \text{« } n \text{ a } k+1 \text{ chiffres en base } 10 \text{ »}\}$$

. Comme chaque A_k est fini pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in A_k}$ est sommable pour tout

k . En fait, on a même que $\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} \leq \frac{|A_k|}{10^k}$. Calculons alors le cardinal de A_k . Il s'agit des entiers ayant exactement $k+1$ chiffres dans leur écriture en base 10, et n'ayant pas de 9. En particulier, le premier chiffre peut-être n'importe quel élément de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$, tandis que les k suivants peuvent être n'importe quel élément de $\llbracket 0, 8 \rrbracket$. Ainsi, $|A_k| = 8 \times 9^k$. Plus formellement, l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} \llbracket 1, 8 \rrbracket \times \llbracket 0, 8 \rrbracket &\longrightarrow A_k \\ (a_0, a_1, \dots, a_k) &\longmapsto \overline{a_0 a_1 \dots a_k}^{10} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que : $\sum_{n \in A_k} \frac{1}{n} \leq 8 \left(\frac{9}{10}\right)^k$. Or, la famille $\left(8 \left(\frac{9}{10}\right)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable (série géométrique multipliée par 8). Comme la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in A}$ est à termes positifs, on peut

appliquer le théorème de sommation par paquets, et elle est donc sommable. D'ailleurs, on a même un majorant de la somme, il s'agit de 80.

Solution 6 - (**) Une série génératrice (🔒 exercice)

1. Il suffit de montrer que la famille à termes positifs $(|x|^{kl})_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est de somme finie. Pour le faire, on va utiliser le théorème des séries doubles : fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On a, comme $|x| < 1$:

$$u_k = \sum_{l=1}^{+\infty} |x|^{kl} = \sum_{l=1}^{+\infty} (|x|^k)^l = \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$$

Or, la famille $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable. En effet, soit on remarque que $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^k$ et la série $\sum |x|^k$ converge (cf cours sur les séries numériques), soit on majore $u_k \leq \frac{|x|^k}{1 - |x|}$, et la série de terme général $\frac{|x|^k}{1 - |x|}$ converge car est multiple d'une série géométrique de raison $|x| < 1$. Dans tous les cas, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} |x|^{kl} < +\infty$$

Par le théorème des séries doubles, la famille $(x^{kl})_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2. Le même calcul que précédemment mais sans les valeurs absolue (qu'on peut faire car la famille est sommable !) donne que :

$$\sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^k}$$

De plus, on peut également sommer par paquets. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2 ; n = kl\}$. On a alors :

$$\sum_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l) \in A_n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| x^n$$

Il reste à voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_n| = d(n)$. Ceci est vrai car l'application :

$$\begin{array}{ccc} A_n & \rightarrow & \{\text{Diviseurs de } n\} \\ (k, l) & \mapsto & k \end{array}$$

est une bijection. D'où le résultat :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

Solution 7 - (*) Atomes d'une variable aléatoire (🔗 exercice)

1. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$ est sommable (de somme ≤ 1). Ainsi, elle est à support au plus dénombrable, donc l'ensemble des atomes de X est au plus dénombrable. En effet, démontrons ce résultat dans le cas général : soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable à termes positifs. Montrons que le support de cette famille est au plus dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{i \in I ; x_i \geq \frac{1}{n}\}$. Alors A_n est fini, car $+\infty \geq \sum_{i \in I} x_i \geq \sum_{i \in A_n} x_i \leq \frac{1}{n}|A_n|$. Or, le support de $(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble de tous les $i \in I$ tels que $x_i > 0$, donc il s'agit de l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

qui est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.

2. Si X est une variable aléatoire discrète, alors la famille $(P(X = x))_{x \in E}$ est une distribution de probabilités, donc une famille sommable de somme égale à 1. Or, le support de cette famille est l'ensemble des atomes de X , donc $\sum_{x \in A(X)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Solution 8 - (**) Loi jointe et marginales (🔗 exercice)

1. Les marginales de Z sont les variables aléatoires discrètes réelles X et Y telles que $Z = (X, Y)$. Elles sont définies par

$$\forall x \in E, \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\forall y \in E, \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

où E est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ telle que Z prenne ses valeurs dans $E \times E$. On a la représentation suivante, en supposant pour simplifier les notations que Z est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2$

	1	2	...	n	Σ
1	$\mathbb{P}(Z = (1, 1))$	$\mathbb{P}(Z = (1, 2))$	...	$\mathbb{P}(Z = (1, n))$	$\mathbb{P}(X = 1)$
2	$\mathbb{P}(Z = (2, 1))$	$\mathbb{P}(Z = (2, 2))$	...	$\mathbb{P}(Z = (2, n))$	$\mathbb{P}(X = 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\mathbb{P}(Z = (n, 1))$	$\mathbb{P}(Z = (n, 2))$	...	$\mathbb{P}(Z = (n, n))$	$\mathbb{P}(X = n)$
Σ	$\mathbb{P}(Y = 1)$	$\mathbb{P}(Y = 2)$	...	$\mathbb{P}(Y = n)$	

2. On considère $Z = (U, V)$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0, 1\}^2$ donnée par le tableau suivant

	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0

Alors $\mathbb{P}(U = 0) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(U = 1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$. De même pour V . En particulier, U et V suivent des lois uniformes sur $\{0, 1\}$. Soient X, Y deux lois uniformes sur $\{0, 1\}$ indépendantes. Alors $X \sim U$ et $Y \sim V$. Mais pourtant, $\mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}((U, V) = (0, 0))$. En particulier, les marginales ne définissent pas la loi conjointe !

3. Si X et Y sont indépendantes, et si $Z = (X, Y)$, alors on a pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\mathbb{P}(Z = (k, l)) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = l)$. Ainsi, les marginales X et Y déterminent entièrement Z . On a de plus le tableau de la loi de Z :

	1	2	...	n
1	$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$	$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$	...	$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = n)$
2	$\mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 1)$	$\mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 2)$	...	$\mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$\mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = 1)$	$\mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = 2)$	...	$\mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n)$

En particulier, si $i \neq j$, alors la colonne i est soit nulle si $\mathbb{P}(Y = i) = 0$, donc proportionnelle à la colonne j , soit $\mathbb{P}(Y = i) \neq 0$ et la colonne j est égale à la colonne i multipliée par $\frac{\mathbb{P}(Y = j)}{\mathbb{P}(Y = i)}$, qui sont donc proportionnels. De même pour les lignes.

4. Supposons que nous ayons X, Y deux variables aléatoires sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ indépendantes telles que $X + Y \sim \mathcal{U}(\llbracket 2, 12 \rrbracket)$. Comme X et Y sont indépendantes, elles définissent entièrement la loi conjointe de $Z = (X, Y)$. Dans le tableau définissant la loi de Z , comme $X + Y$ suit une loi uniforme, les anti-diagonales sont toutes de somme $\frac{1}{11}$. De plus, comme X et Y ont même loi, le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Ainsi, on a $\mathbb{P}(X + Y = 2) = \frac{1}{11} = \mathbb{P}(Z = (1, 1)) = \mathbb{P}(X = 1)^2$. Donc $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

De plus, $\mathbb{P}(X + Y = 3) \frac{1}{11} = \mathbb{P}(Z = (1, 2)) + \mathbb{P}(Z = (2, 1)) = 2\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 2)$. Donc $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2\sqrt{11}}$. En particulier, $\mathbb{P}(Z = (2, 2)) = \frac{1}{44}$. On est en train de remplir petit à petit les cases du tableau de la loi de Z . On montre par récurrence que les valeurs de $\mathbb{P}(Z = (k, l))$ sont toutes rationnelles. C'est vrai pour $(k, l) = (1, 1)$. On suppose vrai le résultat pour $(k, l) \leq m - 1$. On a alors le tableau :

	1	...	$m - 1$	m	...
1	$\in \mathbb{Q}$	...	$\in \mathbb{Q}$	α	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
$m - 1$	$\in \mathbb{Q}$	...	$\in \mathbb{Q}$		
m	α				
$\vdots$					

Ainsi, comme la somme de l'anti-diagonale de rang m est égale $\frac{1}{11}$, alors $2\alpha \in \mathbb{Q}$ donc $\alpha \in \mathbb{Q}$. De plus, les rapport de proportionnalité entre les colonnes i et $i + 1$ pour $i \leq m - 2$ sont rationnels. Ainsi, on obtient que :

	1	...	$m - 1$	m	...
1	$\in \mathbb{Q}$	...	$\in \mathbb{Q}$	$\alpha \in \mathbb{Q}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$m - 1$	$\in \mathbb{Q}$	...	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{Q}$	
m	$\alpha \in \mathbb{Q}$	...	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{Q}$	
$\vdots$					

D'où l'itération. Mais alors, comme toutes les cases du tableau sont rationnelles, on a $\mathbb{P}(Z = (k, l)) \in \mathbb{Q}$ pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. Donc $\frac{1}{\sqrt{11}} = \mathbb{P}(X = 1) = \sum_{l=1}^6 \mathbb{P}(Z = (1, l)) \in \mathbb{Q}$. C'est absurde. Donc il est impossible de truquer deux dés de manière identique de sorte que la loi « somme des chiffres » soit uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.

Remarque : Une solution plus simple à ce problème, qui contient également le cas où X et Y ne suivent pas la même loi, peut être obtenue en considérant des fonctions génératrices, mais ce n'est pas au programme de colle

Solution 9 - (**) Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (🔗 exercice)

Soient $\varepsilon_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ des variables aléatoires de RADEMACHER deux à deux indépendantes, c'est-à-dire uniformes sur $\{-1, 1\}$. On pose $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ la matrice aléatoire correspondante. On

calcule :

$$\mathbb{E} [\det(A)^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right]$$

Par linéarité de l'espérance, on est ramené à calculer les

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right]$$

pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Or, par indépendance des $\varepsilon_{i,j}$, si $\sigma \neq \tau$, alors il existe i tel que $(i, \sigma(i)) \neq (i, \tau(i))$. En particulier, $\varepsilon_{i,\sigma(i)}$ est indépendant du produit des autres termes, et on a donc :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right] = \mathbb{E} [\varepsilon_{i,\sigma(i)}] \mathbb{E} \left[\varepsilon_{i,\tau(i)} \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \varepsilon_{j,\sigma(j)} \varepsilon_{j,\tau(j)} \right] = 0$$

Ainsi, les termes restants dans la somme définissant $\mathbb{E}[\det(A)^2]$ sont ceux où $\sigma = \tau$, et on a alors :

$$\mathbb{E} [\det(A)^2] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)}^2 \right] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1 = n!$$

Or, la matrice constituée uniquement de 1 est de déterminant nul (car $n \geq 2$). Donc $\mathbb{P}(\det(A)^2 = 0) > 0$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Alors il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $\det(M)^2 > n!$. En effet, par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}[\det(A)^2] = \sum_{M \in \mathcal{A}} \det(M)^2 \mathbb{P}(A = M) = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{M \in \mathcal{A}} \det(M)^2$$

Si tous les $\det(M)^2$ pour $M \in \mathcal{A}$ étaient inférieurs ou égaux à $n!$, comme pour un M particulier (la matrice composée uniquement de 1) a un déterminant nul, on aurait l'inégalité stricte $\mathbb{E}[\det(M)^2] < n!$, ce qui est absurde.

Donc il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.