

Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

16 janvier 2023

Espaces euclidiens

Table des matières

Questions de cours	2
Espaces euclidiens	2
Exercice 1 - Représentation des formes linéaires	2
Exercice 2 - Adjoint d'un morphisme	2
Exercice 3 - Groupe orthogonal	2
Exercices	2
Espaces euclidiens	2
Exercice 4 - ★☆☆ Un produit scalaire ?	2
Exercice 5 - ★☆☆ Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$	3
Exercice 6 - ★☆☆ Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT	3
Exercice 7 - ★☆☆ Méthode QR	3
Exercice 8 - ★☆☆ Matrices de GRAM	3
Exercice 9 - ★☆☆ Matrices orthogonales à coefficients positifs	4

Questions de cours

Espaces euclidiens

Exercice 1 - Représentation des formes linéaires (solution 📖)

Énoncez et démontrez le théorème de représentation des formes linéaires (théorème de représentation de RIESZ) dans un espace euclidien.

Application : Montrez qu'il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus n tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)dt$$

Pouvez-vous déterminer le degré de Q_n ?

Exercice 2 - Adjoint d'un morphisme (solution 📖)

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Définissez l'adjoint de u , noté u^* . Montrez de plus que l'application $u \mapsto u^*$ est linéaire et qu'il s'agit d'une involution.

Exercice 3 - Groupe orthogonal (solution 📖)

Définissez le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il s'agit d'un groupe. Quelles sont les valeurs possibles des déterminants des matrices orthogonales ? Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée directe de E (qu'est-ce que cela signifie ?) et $A \in O_n(\mathbb{R})$, la famille $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ est-elle orthonormée directe ?

Exercices

Espaces euclidiens

☆☆☆ Exercice 4 - Un produit scalaire ? (solution 📖)

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(X, Y) \mapsto B(X, Y) = \text{Tr}(XY)$ soit un produit scalaire sur V ?

Indication : On pourra utiliser le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

★★☆ Exercice 5 - Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (solution 📖)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculez le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ en fonction uniquement de A .

Indications Le produit scalaire considéré est bien entendu le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir $(X, Y) \mapsto \text{Tr}({}^tXY)$

1. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$? Trouvez une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.
2. Calculez $\langle A, E_{i,j} \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En déduire l'écriture de $\text{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$ dans la base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$ trouvée précédemment.
3. Conclure.

★★☆ Exercice 6 - Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (solution 📖)

Montrez que pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_p)$ de E , il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de E telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \begin{cases} \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ \langle x_k, e_k \rangle > 0 \end{cases} \quad (1)$$

★★☆ Exercice 7 - Méthode QR (solution 📖)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrez qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QR$ et les termes diagonaux de R sont strictement positifs. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT. Que ce passe-t-il si A n'est pas supposée inversible ?

★★☆ Exercice 8 - Matrices de GRAM (solution 📖)

Soit E un espace euclidien de dimension n . Si $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille de E , on pose

$$G(x_1, \dots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

la matrice de GRAM de la famille $(x_1, \dots, x_m)$. On note $|G(x_1, \dots, x_m)|$ le déterminant de la matrice de GRAM $G(x_1, \dots, x_m)$.

1. Montrez que $G(x_1, \dots, x_m)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E , et $(x_1, \dots, x_m) \in F^m$. Soit $x \in F^\perp$. Montrez que

$$|G(x, x_1, \dots, x_m)| = \|x\|^2 |G(x_1, \dots, x_m)|$$

3. En déduire que si $(x_1, \dots, x_m)$ est une base de F , et $x \in E$, alors

$$d(x, F)^2 = \frac{|G(x, x_1, \dots, x_m)|}{|G(x_1, \dots, x_m)|}$$

★★☆ Exercice 9 - Matrices orthogonales à coefficients positifs (solution 📖)

Déterminez $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ et $|SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})|$

Corrections

Solution 1 - Représentation des formes linéaires (🔒 exercice)

L'application

$$\begin{aligned}\varphi: E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)\end{aligned}$$

est bien linéaire par linéarité du produit scalaire. De plus, on a $\ker(\varphi) = E^\perp = \{0\}$, donc elle est injective. Or, $\dim(E) = \dim(E^*)$ donc φ est un isomorphisme.

Ainsi, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et que $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et comme l'évaluation en zéro est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, alors il existe un unique (φ isomorphisme) $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ_n$.

Si Q_n était de degré strictement inférieur à n , alors $XQ_n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$0 = (XQ_n)(0) = \int_0^1 tQ_n(t)Q_n(t)dt = \int_0^1 tQ_n(t)^2dt$$

La fonction $t \mapsto tQ_n(t)^2$ est positive sur $[0, 1]$, continue et d'intégrale nulle, donc c'est la fonction nulle. Ainsi, $Q_n = 0$, ce qui est absurde (car par exemple $1 = 1(0) = \int_0^1 Q_n$ donc $Q_n \neq 0$). Donc Q_n est de degré exactement n .

Solution 2 - Adjoint d'un morphisme (🔒 exercice)

Pour tout $x \in E$, l'application $y \in E \mapsto \langle y, u(x) \rangle$ est une forme linéaire. Par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique vecteur $u^*(x)$ tel que pour tout $y \in E$:

$$\langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle$$

L'unicité de $u^*(x)$ permet de facilement montrer que l'application $u^* : x \in E \mapsto u^*(x) \in E$ est linéaire, puis que l'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u^* \in \mathcal{L}(E)$ est également linéaire. Enfin, on a par unicité que pour tout $x \in E$, $u^{**}(x) = u(x)$.

Solution 3 - Groupe orthogonal (🔒 exercice)

Le groupe orthogonal est défini comme étant l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = I_n$, on le note $O_n(\mathbb{R})$. L'identité appartient au groupe orthogonal, et si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, alors

$${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_nB = I_n$$

donc $AB \in O_n(\mathbb{R})$. Enfin, ${}^t(A^{-1})A^{-1} = (A^tA)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est bien un groupe.

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\det({}^tAA) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$. Donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Non, ce n'est pas vraie. Cette famille reste orthonormale, mais elle peut ne pas être directe. En fait, elle est directe si et seulement si $\det(A) = 1$.

Solution 4 - Un produit scalaire ? (🔗 exercice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$ est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. De plus, une matrice symétrique et anti-symétrique à la fois est nulle (car $a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{j,i}$ pour tout i, j). Ainsi, on a bien la somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors $A = {}^tA$, donc B est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$ (produit scalaire canonique). Si A est anti-symétrique, alors $B(A, A) = \text{Tr}(-{}^tAA) \leq 0$ donc B n'est pas positive sur $A_n(\mathbb{R})$, donc n'est pas un produit scalaire sur $A_n(\mathbb{R})$.

Soit maintenant V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V . Alors $\dim(V) \leq \dim(S_n(\mathbb{R}))$, car sinon $V \cap A_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$. Donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V . En particulier, dès que $n > 1$, alors B n'est pas un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Solution 5 - Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (🔗 exercice)

1. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. En effet, une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est entièrement définie par ses coefficients diagonaux et sur-diagonaux, qui peuvent être quelconques. Plus formellement, on montre que la famille $\tilde{\mathcal{B}} = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Elle est libre par liberté de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et opérations élémentaires sur une famille libre, et elle est génératrice par la remarque précédente. Cependant, $\tilde{\mathcal{B}}$ n'est pas orthonormale. Elle est cependant orthogonale, car : $\langle E_{i,i}, E_{j,j} \rangle = 0$ et $\langle E_{i,i}, E_{k,l} + E_{l,k} \rangle = 0$ si $k < l$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,i}$ sélectionne la i -ème ligne de la matrice multipliée) et enfin $\langle E_{i,j} + E_{j,i}, E_{k,l} + E_{l,k} \rangle = 0$ si $i < j$, $k < l$ et $(i, j) \neq (k, l)$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,j}$ sélectionne la j -ième ligne, la place dans la i -ème, et annule toutes les autres lignes). Cependant, bien qu'on ait $\|E_{i,i}\| = 1$, on a $\|E_{i,j} + E_{j,i}\| = \sqrt{2}$ si $i < j$. On remplace alors $\tilde{\mathcal{B}}$ par $\mathcal{B} = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n} \cup ((E_{i,j} + E_{j,i})/\sqrt{2})_{1 \leq i < j \leq n}$. C'est une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.

2. Si $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle A, E_{i,j} \rangle = a_{i,j}$ (multiplier à droite par $E_{i,j}$ renvoie la matrice vide sauf la colonne j , qui contient la colonne i de A . Ainsi, en prendre la trace revient à prendre le i -ème coefficient de la j -ème colonne de A). Ainsi :

- Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle A, E_{i,i} \rangle = a_{i,i}$

- Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $\langle A, (E_{i,j} + E_{j,i})/\sqrt{2} \rangle = \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}}$

Ainsi, par l'écriture du projeté orthogonal dans une base orthonormée, on a :

$$\text{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}} \frac{E_{i,j} + E_{j,i}}{\sqrt{2}}$$

3. En simplifiant l'écriture de $\text{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$, en considérant notamment que $E_{i,i} = (E_{i,i} + E_{i,i})/2$, on obtient :

$$\text{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} E_{i,j} = \frac{A + {}^t A}{2}$$

Solution 6 - Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT (🔒 exercice)

On le montre par récurrence sur p . Pour $p = 1$, on obtient que $e_1 = \lambda x_1$ avec $\|e_1\| = 1$ et $\lambda \langle x_1, x_1 \rangle > 0$. La seule possibilité est $\lambda_1 = 1/\|x_1\|$, qui convient bien. D'où l'existence et l'unicité.

Soit maintenant $p \geq 2$ et on suppose vrai le résultat au rang $p - 1$. On procède par analyse-synthèse

- Analyse : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une telle famille orthonormée. Alors par unicité dans l'hypothèse de récurrence, $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est unique. De plus, comme $\text{Vect}(x_1, \dots, x_{p-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$ et que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors on peut écrire

$$e_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i + \lambda_p x_p$$

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant orthonormée, on a en faisant les produits scalaires avec les e_i :

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \quad \langle e_p, e_i \rangle = 0 = \lambda_i + \lambda_p \langle x_p, e_i \rangle$$

Ainsi,

$$e_p = \lambda_p \left(x_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle x_p, e_i \rangle e_i \right)$$

De même que pour l'initialisation, les conditions de norme ($\|e_p\| = 1$) et d'angle ($\langle e_p, x_p \rangle > 0$) donnent que

$$\lambda_p = \left\| x_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle x_p, e_i \rangle e_i \right\|^{-1}$$

- Synthèse : Soit $(e_1, \dots, e_{p-1})$ l'unique famille orthonormée donnée par l'hypothèse de récurrence, et soient λ_p et e_p comme dans l'analyse. Alors les calculs de produits scalaires donnent

bien que la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée, et qu'elle vérifie bien (1).

Solution 7 - Méthode QR (🔒 exercice)

On écrit $A = [a_1 | \dots | a_n]$ en colonnes. Comme A est inversible, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$, et on peut donc appliquer le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT. On construit alors :

- $u_1 = a_1$ et $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
- Si $k < n$: $u_{k+1} = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, e_k \rangle e_k - \dots - \langle a_{k+1}, e_1 \rangle e_1$ et $e_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$

En particulier, on a pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$a_k = \|u_k\| e_k + \langle a_k, e_{k-1} \rangle e_{k-1} + \dots + \langle a_k, e_1 \rangle e_1$$

C'est l'écriture de a_k dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, on a le changement de base :

$$[a_1 | \dots | a_n] = [e_1 | \dots | e_n] \begin{pmatrix} \|u_1\| & \langle a_2, e_1 \rangle & \dots & \langle a_n, e_1 \rangle \\ 0 & \|u_2\| & \dots & \langle a_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \|u_n\| \end{pmatrix}$$

On pose Q la matrice de gauche, R la matrice de droite. On a bien Q orthogonale car $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, et R est clairement triangulaire supérieure de termes diagonaux strictement positifs. Montrons maintenant l'unicité. Soit $A = QR = Q'R'$ deux décompositions QR de A . On a alors :

$$B = Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

B est une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. En particulier, $B_{1,1} = 1$ car la première colonne de B est de norme 1. Mais alors la première ligne de B est $(1, 0, \dots, 0)$. La matrice extraite $(B_{i,j})_{i,j \geq 2}$ est encore une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, on conclut par récurrence que $B = I_n$. Ainsi, $Q = Q'$ et $R = R'$, d'où l'unicité de la décomposition QR .

Si maintenant on suppose que A n'est pas inversible, alors on ne peut pas appliquer le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT, mais on peut appliquer le procédé d'orthogonalisation (sans normaliser). On obtient alors $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale, mais pas nécessairement libre (certains u_i sont nuls). On pose alors $\tilde{Q} = [u_1 | \dots | u_n]$ et $\tilde{R}$ comme avant. On a bien $A = \tilde{Q}\tilde{R}$, mais $\tilde{Q}$ n'est pas orthogonale. Les u_i non nuls forment une famille libre (car orthogonale et de vecteurs non nuls), qu'on peut compléter en une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Les lignes de R

correspondant à des u_i nuls étant nulles, le produit $\tilde{Q}\tilde{R}$ ne change pas si on remplace les colonnes nulles de Q par autre chose. Ainsi, on considère la famille orthogonale $(u'_i)_i$ obtenue à partir de la famille $(u_i)_i$ en remplaçant tous les termes nuls par des vecteurs orthogonaux aux autres. On pose finalement : $Q = \left[\frac{u_1}{\|u_1\|} \mid \dots \mid \frac{u_n}{\|u_n\|} \right]$ et $R = {}^t[\|u_1\|L_1 \mid \dots \mid \|u_n\|L_n]$ où $R = [L_1 \mid \dots \mid L_n]$ est l'écriture en ligne de $\tilde{R}$. Alors Q est bien orthogonale et R bien triangulaire supérieure, à termes diagonaux positifs. Mais on n'a pas unicité de la décomposition, en particulier à cause du choix de complétion de la famille $(u_i)_i$.

Solution 8 - Matrices de GRAM (🔑 exercice)

1. Si la famille (x_i) est liée, alors on a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tous nuls tel que $\sum \lambda_i x_i = 0$. Mais alors, si C_j est la j -ème colonne de $G(x_1, \dots, x_m)$, on a par linéarité du produit scalaire à droite $\sum \lambda_j C_j = {}^t(\langle x_i, \sum \lambda_j x_j \rangle)_j = 0$ (vecteur nul). Donc $G(x_1, \dots, x_m)$ n'est pas inversible. Réciproquement, si la famille (x_i) est libre : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que :

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j C_j = \begin{pmatrix} \langle x_1, \sum_{i=1}^m \lambda_j x_j \rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, \sum_{i=1}^m \lambda_j x_j \rangle \end{pmatrix} = 0$$

Donc l'élément $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ appartient à l'orthogonal de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, mais c'est également un élément de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$. Donc $x = 0$. Par liberté de la famille $(x_1, \dots, x_m)$, tous les λ_i sont nuls, donc la famille des colonnes de $G(x_1, \dots, x_m)$ est libre. Donc G est inversible.

2. Comme $x \in F^\perp$, alors tous les $\langle x, x_i \rangle$ sont nuls. Ainsi, on a :

$$G(x, x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \|x\|^2 & 0 \\ \hline 0 & G(x_1, \dots, x_m) \end{array} \right)$$

D'où le résultat en prenant le déterminant.

3. Soit $p_F : E \rightarrow F$ la projection orthogonale sur F . On a alors $x = x - p_F(x) + p_F(x)$, et $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ (c'est une propriété du projeté orthogonal vue dans le cours). De plus, $p_F(x) \in F$, donc est combinaison linéaire des x_i . Par linéarité à droite du produit scalaire, la matrice de GRAM $G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_m)$ s'obtient par opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice de GRAM $G(x, x_1, \dots, x_m)$. En particulier, elles ont le même

déterminant. Par la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} d(x, F)^2 |G(x_1, \dots, x_m)| &= \|x - p_F(x)\|^2 |G(x_1, \dots, x_m)| = |G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_m)| \\ &= |G(x, x_1, \dots, x_m)| \end{aligned}$$

Comme la famille x_i est libre, le déterminant de GRAM est non nul et on peut diviser l'inégalité par ce déterminant, on obtient ce qu'on veut.

Solution 9 - Matrices orthogonales à coefficients positifs (🔑 exercice)

Solution 9 - Matrices orthogonales à coefficients positifs (🔑 exercice)

Si $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$, montrons d'abord que chaque ligne de M contient au plus un élément non nul. En effet, si c'était faux, alors on aurait un indice i tel que $a_{i,j}$ et $a_{i,j'}$ soient non nuls, pour des certains $j \neq j'$. Mais alors, comme les colonnes de M forment une base orthonormale (en particulier orthogonale), on a :

$$\sum_{k=1}^n a_{k,j} a_{k,j'} = 0 = \underbrace{a_{i,j} a_{i,j'}}_{>0} + \sum_{1 \leq k \neq i \leq n} \underbrace{a_{k,j} a_{k,j'}}_{\geq 0} > 0$$

C'est absurde, donc chaque ligne contient au plus un élément non nul, qui est donc 1 car les lignes sont de norme 1 et les coefficients positifs. Ainsi, une matrice de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est une matrice de permutation. Réciproquement, une matrice de permutation a ses colonnes de norme 1 et qui forment une famille orthogonale, c'est donc une matrice orthogonale. Donc $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des matrices de permutations.

Pour $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on montre que de même il ne peut y avoir qu'un seul coefficient par ligne, en utilisant le fait qu'elles soient de norme 1 (donc $\sum_j a_{i,j}^2 = 1$ est une somme d'éléments de $\mathbb{N}$ valant 1, donc exactement un seul terme est non nul, et il vaut 1). Ce terme est donc ± 1 , et ainsi $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des permutations signées, et $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des permutations signées de déterminant 1. Pour calculer son cardinal, on regarde nos choix :

- Pour le coefficient non nul de la première colonne, il y a $2n$ choix (sa position (n choix) et sa valeur (2 choix))
- Pour le coefficient non nul de la deuxième colonne, il y a $2(n-1)$ choix (sa position ($n-1$ choix car il est situé sur une ligne différente de celle du coefficient de la première colonne) et sa valeur (2 choix))
- ...

- Pour le coefficient non nul de l'avant-dernière colonne, il y a 2×2 choix (sa position (2 choix) et sa valeur (2 choix))
- Pour le dernier coefficient, on n'a pas le choix. Il est sur l'unique ligne vide restante, et sa valeur est celle qui rend le déterminant de la matrice positif.

Au total, on a donc $2^{n-1}n!$ choix. Donc $|SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^{n-1}n!$

Remarque : En particulier, le même raisonnement donne que le cardinal de l'ensemble des matrices orthogonales à coefficient entiers est $2^n n!$, car cette fois on a le choix du signe pour le dernier coefficient
