

Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

30 janvier 2023

Variables aléatoires discrètes

Table des matières

Questions de cours	2
Variables aléatoires discrètes	2
Exercice 1 - Espérance de variables aléatoires discrètes positives	2
Exercice 2 - Variance de variables aléatoires discrètes	2
Exercice 3 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV	2
Exercices	2
Variables aléatoires discrètes	2
Exercice 4 - ★☆☆ Quotient de variables aléatoires de même loi	2
Exercice 5 - ★☆☆ Inverse d'une loi géométrique	3
Exercice 6 - ★☆☆ Être auto-indépendant	3
Exercice 7 - ★☆☆ Dés pipés	3
Exercice 8 - ★☆☆ Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	3
Exercice 9 - ★☆☆ Sommes aléatoires	3
Exercice 10 - ★★☆☆ Théorème d'approximation de WEIERSTRASS	4
Exercice 11 - ★☆☆ Matrices aléatoires	4

Questions de cours

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 - Espérance de variables aléatoires discrètes positives (solution 📖)

Définissez l'espérance d'une variable aléatoire discrète positive lorsque cela est possible. Montrez la formule

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Donnez l'espérance d'une variable aléatoire de BERNOULLI de paramètre $p \in [0, 1]$, binomiale de paramètres $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ et géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$

Exercice 2 - Variance de variables aléatoires discrètes (solution 📖)

Définissez la notion de variance d'une variable aléatoire discrète. Une variable aléatoire admet-elle toujours une variance ? Donnez des exemples de lois qui admettent une variance, qui admettent une espérance mais pas de variance, et qui n'admettent ni espérance ni variance. Que dire d'une variable aléatoire de variance nulle ? Application : Exercice 6 📖

Exercice 3 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV (solution 📖)

Énoncez et démontrez les inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Application : on lance une pièce 1000 fois (on n'a que ça à faire), et on tombe 600 fois sur « pile ». Peut-on raisonnablement penser que la pièce est truquée ?

Exercices

Variables aléatoires discrètes

☆☆☆ Exercice 4 - Quotient de variables aléatoires de même loi (solution 📖)

Soient X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes et de même loi. Montrez que

$$\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$$

☆☆☆ Exercice 5 - Inverse d'une loi géométrique (solution 📖)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculez $\mathbb{E}(1/X)$.

☆☆☆ Exercice 6 - Être auto-indépendant (solution 📖)

Soit X une variable aléatoire discrète telle que X soit indépendante d'elle-même. Montrez que X est presque-sûrement constante.

☆☆☆ Exercice 7 - Dés pipés (solution 📖)

1. Soient $a < b \in \mathbb{N}$. Calculez G_X si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.
 2. Montrez que le polynôme $1 + t + \dots + t^{n-1}$ est scindé à racines simples, et que ces racines sont les éléments de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
 3. Si n est un nombre pair, est-il possible de piper deux dés à n faces (par exemple, à 6 faces) tels que la variable aléatoire indiquant la somme obtenue suive une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$?
-

☆☆☆ Exercice 8 - Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (solution 📖)

Soit $n \geq 2$. Montrez qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.

Indication : On pourra prendre $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ une famille de RADEMACHER indépendantes et calculer $\mathbb{E}(\det(A)^2)$ où A est la matrice aléatoire $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$.

☆☆☆ Exercice 9 - Sommes aléatoires (solution 📖)

Soient $(X_n)_n$ une suite de VAIID à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une autre VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de tous les X_i . On cherche à comprendre la somme aléatoire

$$S = \sum_{n=1}^N X_n$$

On note S_n la somme partielle d'ordre n et, pour simplifier les notations, on note $X = X_1$ de sorte que pour tout n , $X_i \sim X$.

1. Montrez que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $G_S(t) = G_N(G_X(t))$
2. En déduire que si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $S \sim \mathcal{P}(p\lambda)$
3. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrez que S est également d'espérance finie, puis montrez la formule de WALD

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$$

★★☆ Exercice 10 - Théorème d'approximation de WEIERSTRASS (solution 📖)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On appelle la fonction $B_n(f)$ le n -ième polynôme de BERNSTEIN de f . Démontrez le théorème de BERNSTEIN :

Théorème (BERNSTEIN) *La suite de fonction $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$*

Indications : Après avoir exprimé $B_n(f)(x)$ comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire, on pourra utiliser l'uniforme continuité de f pour majorer indépendamment de x la quantité

$$|B_n(f)(x) - f(x)|$$

★★☆ Exercice 11 - Matrices aléatoires

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. On pose la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & X + Y - 1 \\ 0 & Y - 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que A soit inversible ? Que A soit nulle ?
2. Déterminez la loi du rang de A
3. Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Corrections

Solution 1 - Espérance de variables aléatoires discrètes positives (🔗 exercice)

Si X est une variable aléatoire discrète positive, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

On obtient la seconde formule en écrivant $n = \sum_{k=1}^n 1$ et en permutant les sommes (ce qui est possible car tout est positif). Enfin, on a

- $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = p$
- $X \sim \mathcal{B}(n, p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$
- $X \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 1/p$

Solution 2 - Variance de variables aléatoires discrètes (🔗 exercice)

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet une variance si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, et on définit alors

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Une variable aléatoire finie admet toujours une variance, une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = n) = 1/(n^3 a)$ où $a = \zeta(3)$ admet une espérance (qui vaut $\zeta(2)/\zeta(3)$) mais pas de variance. Une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}(X = n) = 1/(n^2 b)$ où $b = \zeta(2)$ n'admet pas d'espérance, donc pas de variance.

Une variable aléatoire est de variance nulle si et seulement si elle est presque sûrement constante. En effet, par définition de la variance, l'espérance de la variable aléatoire positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est nulle, donc cette variable aléatoire est presque sûrement nulle, donc $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement.

Solution 3 - Inégalités de MARKOV et de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV (🔗 exercice)

Inégalité de MARKOV Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance finie et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Démonstrations On a :

$$a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$$

En passant à l'espérance et par croissance de celle-ci, on obtient l'inégalité de MARKOV. Pour l'inégalité de BT, on applique l'inégalité de MARKOV à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, qui est d'espérance finie égale à la variance de X . On obtient alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Application Si la pièce n'est pas truquée, on peut la modéliser comme une somme de 1000 variables aléatoires de BERNOULLI de paramètre $1/2$. La somme S suit alors une loi binomiale de paramètres $(1000, 1/2)$. Ainsi, $\mathbb{E}(S) = 500$ et $\mathbb{V}(S) = 250$. Par l'inégalité de BT, on a :

$$\mathbb{P}(|S - 500| = 100) \leq \mathbb{P}(|S - 500| \geq 100) \leq \frac{250}{10000} = 2.5\%$$

Ainsi, on peut quand même raisonnablement penser que la pièce est truquée... (surtout que ces inégalités sont très peu fines!)

Solution 4 - Quotient de variables aléatoires de même loi (🔗 exercice)

On utilise le fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Par croissance de l'espérance, on a alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right) \leq \mathbb{E}(2) = 2$$

Comme X et Y sont indépendantes et de même loi, alors X/Y suit la même loi que Y/X . Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$2\mathbb{E}(X/Y) \geq 2$$

D'où le résultat.

Solution 5 - Inverse d'une loi géométrique (🔗 exercice)

Par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p}{1-p} \ln(p)$$

Solution 6 - Être auto-indépendant (🔗 exercice)

Deux solutions sont proposées, selon les programmes de colle :

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x, X = x) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(X = x)$ par indépendance. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) \in \{0, 1\}$. Comme $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Ainsi, il existe un unique $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$, donc X est presque sûrement constante.

- On a $\mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X)$ et, comme X est indépendante d'elle-même, $\mathbb{V}(2X) = 2\mathbb{V}(X)$. Donc $\mathbb{V}(X) = 0$ et donc X est presque sûrement constante.

Solution 7 - Dés pipés (🔗 exercice)

1. On a

$$\mathbb{P}(X = n) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & \text{si } a \leq n \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X = \sum_{n=a}^b \frac{t^n}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1} \sum_{n=a}^b t^n$$

2. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

Ainsi, tous les éléments de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ sont racines de ce polynôme. Comme il est de degré $n-1$ il est scindé à racines simples.

3. Soit X la loi du premier dé pipé et Y la loi du second dé pipé. Comme les dés sont indépendants (ce sont deux objets physiques n'ayant aucune influence l'un sur l'autre), alors les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. En particulier, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Comme $G_X(0) = 0 = G_Y(0)$, alors $t|G_X$ et $t|G_Y$, de sorte qu'on ait l'égalité

$$\frac{1}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} t^k = \frac{G_X}{t} \frac{G_Y}{t}$$

Les polynômes G_X et G_Y étant de degré n chacun, alors les polynômes G_X/t et G_Y/t sont de degré $n-1$, qui est impair. Ils admettent donc une racine réelle. Donc le polynôme G_{X+Y} également. C'est absurde car ses racines sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n-1} \setminus \{1\}$ qui est d'intersection vide avec $\mathbb{R}$ (car $2n-1$ est impair). Donc il n'est pas possible de piper ces dés de cette façon.

Solution 8 - Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (🔗 exercice)

Soient $\varepsilon_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ des variables aléatoires de RADEMACHER deux à deux indépendantes, c'est-à-dire uniformes sur $\{-1, 1\}$. On pose $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ la matrice aléatoire correspondante. On calcule :

$$\mathbb{E} [\det(A)^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right]$$

Par linéarité de l'espérance, on est ramené à calculer les

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right]$$

pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Or, par indépendance des $\varepsilon_{i,j}$, si $\sigma \neq \tau$, alors il existe i tel que $(i, \sigma(i)) \neq (i, \tau(i))$. En particulier, $\varepsilon_{i,\sigma(i)}$ est indépendant du produit des autres termes, et on a donc :

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)} \varepsilon_{i,\tau(i)} \right] = \mathbb{E} [\varepsilon_{i,\sigma(i)}] \mathbb{E} \left[\varepsilon_{i,\tau(i)} \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \varepsilon_{j,\sigma(j)} \varepsilon_{j,\tau(j)} \right] = 0$$

Ainsi, les termes restants dans la somme définissant $\mathbb{E}[\det(A)^2]$ sont ceux où $\sigma = \tau$, et on a alors :

$$\mathbb{E} [\det(A)^2] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)^2 \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \varepsilon_{i,\sigma(i)}^2 \right] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1 = n!$$

Or, la matrice constituée uniquement de 1 est de déterminant nul (car $n \geq 2$). Donc $\mathbb{P}(\det(A)^2 = 0) > 0$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Alors il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $\det(M)^2 > n!$. En effet, par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}[\det(A)^2] = \sum_{M \in \mathcal{A}} \det(M)^2 \mathbb{P}(A = M) = \frac{1}{|\mathcal{A}|} \sum_{M \in \mathcal{A}} \det(M)^2$$

Si tous les $\det(M)^2$ pour $M \in \mathcal{A}$ étaient inférieurs ou égaux à $n!$, comme pour un M particulier (la matrice composée uniquement de 1) a un déterminant nul, on aurait l'inégalité stricte $\mathbb{E}[\det(M)^2] < n!$, ce qui est absurde.

Donc il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.

Solution 9 - Sommes aléatoires (🔑 exercice)

1. On a par définition

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \mathbb{E}(t^S) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(S = n)$$

Calculons alors les $\mathbb{P}(S = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par indépendance de N et des X_n , on a :

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k, S_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(S_k = n)$$

On a donc

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(S_k = n) \right) t^n$$

Cette famille (à t fixé, indexée par (n, k)) est sommable, donc par permutation des sommes, on obtient

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = n) t^n \right) \mathbb{P}(N = k) \right]$$

On reconnaît $G_{S_k}(t)$ dans la parenthèse, qui, comme les X_n sont deux à deux indépendants et de même loi suivant X , est en fait égal à $(G_X(t))^k$. Ainsi, on a

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_X(t))^k \mathbb{P}(N = k) = G_N(G_X(t))$$

2. Par le cours (si ce n'est pas su, il faut savoir le redémontrer rapidement), on a

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \begin{cases} G_N(t) = e^{\lambda(t-1)} \\ G_X(t) = pt + (1-p) \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la formule précédente, on obtient que

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \exp(\lambda(pt + 1 - p - 1)) = \exp(\lambda p(t - 1)) = G_Z(t)$$

où $Z \sim \mathcal{P}(p\lambda)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors $S \sim \mathcal{P}(p\lambda)$.

3. Comme X et N sont d'espérance finie, alors les fonctions G_X et G_S sont dérivables à gauche en 1. Pour pouvoir utiliser le théorème de composition des dérivées, il faut s'assurer que la fonction G_X tend vers 1^- quand $t \rightarrow 1^-$. Ceci est le cas car G_X est continue, à valeurs dans $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 en 1. Ainsi, G_S est dérivable en 1 à gauche et on a

$$G'_S(1) = G'_X(1)G'_N(G_X(1)) = \mathbb{E}(X)G'_N(1) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$$

Ceci signifie que S est d'espérance finie égale à $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$, d'où l'égalité de WALD.

Solution 10 - Théorème d'approximation de WEIERSTRASS (🔒 exercice)

Par le théorème de transfert, on reconnaît que pour tout $x \in [0, 1]$

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E} \left(f \left(\frac{X}{n} \right) \right)$$

où $X \sim \mathcal{B}(n, x)$. Fixons $x \in [0, 1]$, on a

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E} \left(f \left(\frac{X}{n} \right) - f(x) \right) \right| \leq \mathbb{E} \left(\left| f \left(\frac{X}{n} \right) - f(x) \right| \right)$$

par inégalité triangulaire. Comme f est continue sur $[0, 1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $[0, 1]$. Fixons alors $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in [0, 1]$, si $|y - z| < \delta$ alors $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. On découpe alors notre espérance en deux :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E} \left(\left| f \left(\frac{X}{n} \right) - f(x) \right| \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{X}{n} - x \right| < \delta \right\}} \right) + \mathbb{E} \left(\left| f \left(\frac{X}{n} \right) - f(x) \right| \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{X}{n} - x \right| \geq \delta \right\}} \right)$$

On peut alors majorer le module du premier terme par ε , et on majore le module du second terme par $2 \|f\|_\infty$. On obtient :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \varepsilon \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{X}{n} - x \right| < \delta \right\}} \right) + 2 \|f\|_\infty \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{X}{n} - x \right| \geq \delta \right\}} \right) \\ &= \varepsilon \mathbb{P} \left(\left| \frac{X}{n} - x \right| < \delta \right) + 2 \|f\|_\infty \mathbb{P} \left(\left| \frac{X}{n} - x \right| \geq \delta \right) \end{aligned}$$

On majore la première probabilité par 1 (ce qu'on peut toujours faire). Il reste qu'à traiter la seconde probabilité. On remarque que

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{X}{n} - x \right| \geq \delta \right) = \mathbb{P} (|X - nx| \geq n\delta)$$

Or, X suit une loi binomiale de paramètres (n, x) , donc $\mathbb{E}(X) = nx$. On peut donc appliqué l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV :

$$\mathbb{P} (|X - nx| \geq n\delta) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n^2 \delta^2} = \frac{nx(1-x)}{x^2 \delta^2} = \frac{1}{4n\delta^2}$$

en utilisant la majoration classique $x(1-x) \leq 1/4$. Finalement, on obtient que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2}$$

Pour n assez grand (plus précisément, pour $n \geq \|f\|_\infty / (2\delta^2\varepsilon)$), on obtient que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

Cette majoration étant indépendante de x , on obtient alors que pour n assez grand,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

ce qui conclut la convergence uniforme de la suite des polynômes de BERNSTEIN de f vers f .