

Colles MP1

Jad ABOU YASSIN

13 mars 2023

Endomorphismes autoadjoints Équations différentielles linéaires

Table des matières

Questions de cours	2
Endomorphismes autoadjoints	2
Exercice 1 - Endomorphismes autoadjoints	2
Équations différentielles linéaires	2
Exercice 2 - Méthode de la variation de la constante d'ordre 1	2
Exercice 3 - Une équation différentielle linéaire d'ordre 2	2
Exercice 4 - Système d'équation différentielle	2
Exercice 5 - Problème de CAUCHY	3
Exercices	3
Endomorphismes autoadjoints	3
Exercice 6 - ★☆☆ Matrices symétriques et nilpotentes	3
Équations différentielles linéaires	3
Exercice 7 - ★☆☆ Une équation fonctionnelle	3
Exercice 8 - ★☆☆ Lemme de GRONWALL et une petite application	4
Exercice 9 - ★☆☆ Espaces normés	4

Questions de cours

Endomorphismes autoadjoints

Exercice 1 - Endomorphismes autoadjoints (solution 📖)

Soit E un espace euclidien. Définissez la notion d'adjoint d'un endomorphisme (existence et unicité) et celle d'un endomorphisme autoadjoint (positif, défini positif). Énoncez le théorème spectral, et donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme autoadjoint soit positif (respectivement défini positif).

Équations différentielles linéaires

Exercice 2 - Méthode de la variation de la constante d'ordre 1 (solution 📖)

Énoncez le théorème de la méthode de la variation de la constante pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + 2ty = 2te^{-t^2}$$

Exercice 3 - Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (solution 📖)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2t} \sin(t)$$

Exercice 4 - Système d'équation différentielle (solution 📖)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 5 - Problème de CAUCHY

Énoncez le théorème de CAUCHY linéaire pour une équation scalaire d'ordre n .

Application : Existe-il deux fonctions continues $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ soient solution de

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

?

Exercices

Endomorphismes autoadjoints

☆☆☆ Exercice 6 - Matrices symétriques et nilpotentes (solution 📖)

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^tA$ soit nilpotente ? Et si tAA est nilpotente ?

Équations différentielles linéaires

☆☆☆ Exercice 7 - Une équation fonctionnelle (solution 📖)

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. On cherche dans un premier temps les solutions de classe $\mathcal{C}^1$. En exhibant une équation différentielle vérifiée par f , déterminez toutes les solutions.
2. On montre maintenant que toute solution est de classe $\mathcal{C}^1$. En considérant pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$g_\varepsilon(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)dt$$

Montrez que toutes les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et concluez.

☆☆☆ Exercice 8 - Lemme de GRONWALL et une petite application (solution 📖)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $u : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $v : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continues par morceaux et $C \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \geq a$, on a :

$$u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds$$

Montrer que pour tout $t \geq a$:

$$u(t) \leq C \exp \left(\int_a^t v(s)ds \right)$$

Indication : Posez $f(t) = \left(C + \int_a^t u(s)v(s)ds \right) \exp \left(- \int_a^t v(s)ds \right)$

2. En déduire que les solutions sur $\mathbb{R}_+$ du système suivant sont toutes à valeurs négatives :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \arctan(\sqrt{\cos(t^2) + \pi}) - \exp(-t^2 + \sin(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

☆☆☆ Exercice 9 - Espaces normés (solution 📖)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) ; f(0) = f'(0) = 0\}$. On définit pour tout $f \in E$

$$\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty$$

1. Montrez que $\|\cdot\|$ est une norme sur E
2. Montrez que $\|\cdot\|_\infty \leq a \|\cdot\|$ pour une certaine constante $a > 0$ (on dit que $\|\cdot\|$ est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$)
3. Ces normes sont-elles équivalentes ?

Corrections

Solution 1 - Endomorphismes autoadjoints (✚ exercice)

Pour tout $x \in E$, l'application $y \in E \mapsto \langle y, u(x) \rangle$ est une forme linéaire. Par le théorème de représentation des formes linéaires, il existe un unique vecteur $u^*(x)$ tel que pour tout $y \in E$:

$$\langle u^*(y), x \rangle = \langle y, u(x) \rangle$$

Un endomorphisme u est dit autoadjoint s'il est égal à son adjoint. Il est dit (défini) positif si l'application $x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est (strictement) positive pour x non nul. Le théorème spectral dit que tout endomorphisme autoadjoint se diagonalise en base orthonormée. Enfin, u est (défini) positif si et seulement si ses valeurs propres sont (strictement) positives.

Solution 6 - Matrices symétriques et nilpotentes (✚ exercice)

$A + {}^tA$ est une matrice symétrique. Par le théorème spectral, elle est diagonalisable. Or, une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle (car ses valeurs propres sont toutes nulles). Donc $A = -{}^tA$, donc A est anti-symétrique. Pour tAA , qui est aussi symétrique, on obtient que ${}^tAA = 0$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$0 = {}^tX {}^tAA X = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|_2^2$$

Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $AX = 0$. Donc $A = 0$.

Solution 2 - Méthode de la variation de la constante d'ordre 1 (✚ exercice)

Soit un système différentiel linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{1}$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sont continues. Connaissant $(X_1, \dots, X_n)$ une base de l'espace des solutions de l'équation homogène, on a l'équivalence : Pour toute famille $(C_1, \dots, C_n)$ d'application continues $I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$X(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t) X_k(t)$$

est solution de l'équation différentielle linéaire 1 si et seulement si pour tout $t \in I$:

$$\sum_{k=1}^n C'_k(t) X_k(t) = B(t)$$

On applique la méthode de variation de la constante à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$. On remarque que l'application $t \mapsto e^{-t^2}$ est solution de l'équation homogène. Comme il s'agit d'une équation différentielle homogène scalaire de degré 1, alors l'espace des solutions est de dimension 1 donc on a une base de solution. On peut donc appliquer la méthode de la variation de la constante. L'application $t \mapsto \lambda(t)e^{-t^2}$ est solution si et seulement si

$$\lambda'(t)e^{-t^2} = 2te^{-t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = 2t \Leftrightarrow \lambda(t) = c + t^2$$

Ainsi, les solutions sont

$$\left\{ t \mapsto (c + t^2)e^{-t^2} ; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Solution 3 - Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (🔗 exercice)

L'espace des solutions est un espace affine de dimension 2, entièrement déterminé par une solution particulière et une base de solutions de l'équation homogène. On résout d'abord l'équation homogène : $y'' + 4y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 5 = 0$, de discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sont :

$$\{t \mapsto \lambda e^{-2t} \cos(t) + \mu e^{-2t} \sin(t) ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Puis variation de la constante TODO

Solution 4 - Système d'équation différentielle (🔗 exercice)

On écrit matriciellement ce système : on cherche à résoudre $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est diagonalisable (car symétrique) et de rang 1, et on remarque facilement que 3 est valeur propre pour un vecteur propre $e_1 + e_2 + e_3$ (où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

Enfin, une base du noyau est $(e_2 - e_1, e_3 - e_1)$. Ainsi, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système $X' = AX$ se réécrit $P^{-1}X' = DP^{-1}X$. On pose $Y = P^{-1}X$, et on résout alors le système diagonal $Y' = DY$:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 \\ y_2' = 0 \\ y_3' = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont

$$S = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} ; (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Et ainsi, les solutions de notre système sont

$$\{PY ; Y \in S\} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^{3t} - \mu - \nu \\ \lambda e^{3t} + \mu \\ \lambda e^{3t} + \nu \end{pmatrix} ; (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Solution 7 - Une équation fonctionnelle (🔗 exercice)

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors en dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à x et en posant $y = 0$, on obtient que

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

Les solutions de cette équation différentielle sont $f(x) = Ce^{f'(0)x}$ pour $C \in \mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions $x \mapsto C \exp(ax)$ (pour $C, a \in \mathbb{R}$) vérifient bien l'équation fonctionnelle.

2. On a par changement de variable :

$$g_\varepsilon(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)dt = \int_0^\varepsilon f(t+x)dt = f(x) \int_0^\varepsilon f(t)dt = f(x)g_\varepsilon(0)$$

Ainsi, si $g_\varepsilon(0) \neq 0$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme primitive d'une fonction continue.

Si f est identiquement nulle, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et il n'y a rien à faire. Sinon, on a $f(0) = 1$. En effet, $f(0) = f(0)^2$ et si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+0) = 0$.

En particulier, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_\varepsilon(0)}{\varepsilon} = f(0) = 1$$

et il existe donc un $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $g_\varepsilon(0) \neq 0$.

Finalement, toutes les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$, et on a vu que dans ce cas les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$.

Solution 8 - Lemme de GRONWALL et une petite application (🔗 exercice)

1. En prenant la fonction f de l'indication, on a que f est dérivable et pour tout $t \geq a$:

$$f'(t) = \left(u(t)v(t) + \underbrace{\left(C + \int_a^t u(s)v(s)ds \right)}_{\leq -u(t)v(t)} (-v(t)) \right) \exp \left(- \int_a^t v(s)ds \right) \leq 0$$

Ainsi, la fonction f est décroissante. Donc pour tout $t \geq a$, $f(t) \leq f(a) = C$. En réécrivant l'expression de f , on obtient que :

$$u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds \leq C \exp \left(\int_a^t v(s)ds \right)$$

2. On note $v : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \arctan(\sqrt{\cos(t^2) + \pi})$ et $w = \exp(-t^2 + \sin(t))$. La fonction w est continue et positive. La forme intégrale de l'équation différentielle, avec la croissance de l'intégrale, donne que :

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u(s)v(s) - w(s)ds \leq 0 + \int_0^t u(s)v(s)ds$$

Par le lemme de GRONWALL, on a que $u(t) \leq u(0) \exp(\int_0^t v(s)ds) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Solution 9 - Espaces normés (🔗 exercice)

1. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. La séparation provient du théorème de CAUCHY linéaire. En effet, si $f + 2f' + f''$ est identiquement nulle, alors on a le problème

de Cauchy

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

qui admet donc une unique solution. Or, la fonction identiquement nulle est solution, c'est donc la seule, donc $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

2. Soit $f \in E$. Posons $g = f'' + 2f' + f$. Alors f est solution au problème de CAUCHY

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = g \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

En résolvant l'équation homogène de solutions $(\lambda + x\mu)e^{-x}$, on applique la méthode de variation de la constante pour obtenir le système

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \lambda'(x)e^{-x} + x\mu'(x)e^{-x} = 0 \\ -\lambda'(x)e^{-x} - x\mu'(x)e^{-x} + \mu'(x)e^{-x} = g \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \lambda'(x) + x\mu'(x) = 0 \\ \mu'(x) = ge^x \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mu(x) = \int_0^x g(t)e^t dt$ et $\lambda(x) = -\int_0^x g(t)te^t dt$ car $\lambda(0) = 0$ et $\mu(0) = 0$ en utilisant les conditions initiales. Finalement, la solution est

$$f(x) = \left(\int_0^x g(t)te^t dt + x \int_0^x g(t)e^t dt \right) e^{-x}$$

sur $[0, 1]$, on a alors la majoration

$$|f(x)| \leq e \|g\|_\infty + e \|g\|_\infty = 2e \|f'' + 2f' + f\|_\infty = 2e \|f\|$$

D'où le résultat.

3. Non, on prend par exemple la suite de fonctions $f_n(x) = (\sin(nx) - n)/n$. On a

$$\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f'_n(x) = \cos(nx) - 1 \quad \text{donc} \quad f'_n(0) = 0 \\ f''_n(x) = -n \sin(nx) \end{cases}$$

Ainsi, $f_n \in E$ pour tout n , mais $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ tandis que $(\|f_n\|)_n$ diverge.

