

COLLES PSI

Semaine 1 : Compléments sur les séries, révisions d'analyse et d'algèbre

Table des matières

1	Questions de cours	2
	Compléments sur les séries	2
	Exercice 1 - Séries à termes réels positifs	2
	Exercice 2 - Séries alternées	2
	Exercice 3 - Produit de CAUCHY	2
2	Exercices	2
	Compléments sur les séries	2
	Exercice 4 - ★☆☆ Études de séries	2
	Exercice 5 - ★☆☆ Une série presque alternée	2
	Exercice 6 - ★☆☆ Reconnaître un produit de CAUCHY	2
	Révisions d'analyse	3
	Exercice 7 - ★☆☆ ROLLE itéré	3
	Exercice 8 - ★☆☆ Raccordement $\mathcal{C}^\infty$	3
	Révisions d'algèbre	3
	Exercice 9 - ★★☆☆ Une matrice de TOEPLITZ	3
3	Solution des exercices	4

Questions de cours

Compléments sur les séries

Exercice 1 - Séries à termes réels positifs (solution ☞)

1. Énoncer précisément la règle de D'ALEMBERT sur les séries à termes réels positifs.
2. Écrire la formule de STIRLING.
3. Démontrer à l'aide d'une comparaison série-intégrale l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exercice 2 - Séries alternées (solution ☞)

1. Énoncer la définition d'une série alternée et en donner un exemple.
2. Énoncer et démontrer le théorème spécial des séries alternées.

Exercice 3 - Produit de CAUCHY (solution ☞)

1. Énoncer la définition du produit de CAUCHY de deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$.
2. Donner une condition suffisante sur deux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ pour que leur produit de CAUCHY converge.
3. Montrer que le produit de CAUCHY de $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qu'on admet convergente, avec elle-même est une série grossièrement divergente. Cela contredit-il la condition énoncée à la question précédente ?

Exercices

Compléments sur les séries

☆☆☆ Exercice 4 - Études de séries (solution ☞)

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-\frac{n+2}{2n}}$
2. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(2^n)}{2^n}$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}}$

☆☆☆ Exercice 5 - Une série presque alternée (solution ☞)

Soit $\alpha > 0$

1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ ($n \geq 1$) converge ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ ($n \geq 2$) converge ?

☆☆☆ Exercice 6 - Reconnaître un produit de CAUCHY (solution ☞)

On considère la série $\sum_n w_n$ de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{8^k}{k!}.$$

1. Montrer que la série $\sum_n w_n$ converge.
2. Exprimer w_n comme le terme général d'un produit de CAUCHY de deux séries classiques.
En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Révisions d'analyse

★★☆ Exercice 7 - ROLLE itéré (solution 📖)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$.

1. On suppose que f s'annule en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(b) = 0$ et que toutes les dérivées k -ièmes avec $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ de f s'annulent en a . Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
3. Soit P un polynôme réel. Montrer que l'équation $P(x) = \frac{1}{x}$ n'admet qu'un nombre fini de solutions sur $[1, +\infty[$.

★★☆ Exercice 8 - Raccordement $\mathcal{C}^\infty$ (solution 📖)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Après avoir justifié que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}.$$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Que valent les dérivées de f en 0 ?

Révisions d'algèbre

★★★ Exercice 9 - Une matrice de TOEPLITZ (solution 📖)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice

$$T_n = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & -a & a & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a & a \end{pmatrix}.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \det(T_n)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Δ_{n+2} en fonction de Δ_n et Δ_{n+1} .
2. Justifier pourquoi T_n est inversible.
3. On admet que les solutions de la suite récurrence linéaire $u_{n+2} = au_{n+1} + a^2u_n$ sont de la forme

$$a^n (\lambda \varphi^n + \mu \psi^n)$$

où φ et ψ sont les deux racines réelles du polynôme $X^2 - X - 1$ avec $\varphi > \psi$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donner une formule explicite pour Δ_n (en fonction uniquement de a , φ et ψ).

Solution des exercices

Solution 1 - Séries à termes réels positifs (🔗 exercice)

1. Règle de D'ALEMBERT : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que cette suite est à termes non nuls à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que la limite

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \geq n_0}} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe et vaut $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

- Si $l > 1$, la série $\sum_n u_n$ converge,
- Si $l < 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.

2. La formule de STIRLING donne l'équivalent suivant pour la suite $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

3. La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ est positive, décroissante et continue. Par le théorème de comparaison séries-intégrales, on a l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_2^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx$$

c'est-à-dire

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx.$$

Or, une primitive de f est la fonction $\ln$. Donc cette chaîne d'inégalités s'écrit :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1).$$

Si $n \geq 2$, on obtient en divisant par $\ln(n)$:

$$\frac{\ln(n+1) - \ln(2)}{\ln(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \leq 1.$$

Par croissance comparée, le membre de gauche de la première inégalité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc par le théorème des gendarmes :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, on a bien l'équivalent

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}.$$

Solution 2 - Séries alternées (🔗 exercice)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum_n u_n$ est alternée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leq 0$ (autrement dit, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés). Un exemple de série alternée est la série $\sum_n (-a)^n$ où $a \in \mathbb{R}$.
2. Théorème spécial des séries alternées : Soit $\sum_n u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum_n u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste de rang n , on a :
 - $R_n u_{n+1} \geq 0$ (le signe de R_n est le même que celui de u_{n+1}),
 - $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Preuve : Si $u_0 = 0$, alors par décroissance de la suite $(|u_n|)_n$, la série $\sum_n u_n$ est la série nulle, qui vérifie bien le résultat. De plus, quitte à considérer la série $\sum_n -u_n$, on peut supposer que $u_0 > 0$. En particulier, les termes pairs u_{2n} sont positifs et les termes impairs u_{2n+1} sont négatifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

et on pose $P = (S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $I = (S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ les sous-suites obtenues en ne gardant respectivement que les termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

On a, si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1}$. Comme

$$u_{2n+2} \geq 0, \quad u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad |u_{2n+2}| < |u_{2n+1}|,$$

alors $S_{2(n+1)} - S_{2n} \leq 0$. Donc la suite P est décroissante. De même, on montre que la suite I est croissante. Enfin, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{n+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad -u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par le théorème des suites adjacentes, les deux suites P et I convergent vers une même limite notée $S \in \mathbb{R}$, et on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} \geq S$ et $S_{2n+1} \leq S$.

En particulier, la suite complète $(S_n)_n$ converge (car on peut montrer que S est sa seule valeur d'adhérence par exemple). Ceci montre que la série $\sum_n u_n$ converge.

De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n$. En particulier, $R_{2n} \leq 0$ donc a le même signe que u_{2n+1} , et $R_{2n+1} \geq 0$ donc a le même signe que u_{2n+2} . On a donc quelque soit $n \in \mathbb{N}$, R_n est du même signe que u_{n+1} .

Enfin, si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \geq R_{2n} = R_{2n+1} + u_{2n+1} \geq u_{2n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leq R_{2n+1} = R_{2n+2} + u_{2n+2} \leq u_{2n+2}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Solution 3 - Produit de CAUCHY (🔗 exercice)

1. Produit de CAUCHY : Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries (à valeurs réelles ou complexes). Le produit de CAUCHY de ces deux séries est la série $\sum_n c_n$ où le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

2. Théorème de convergence des produits de CAUCHY : Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors leur produit de CAUCHY est une série absolument convergente, et on a de plus l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

3. Le terme général du produit de CAUCHY de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec elle-même est

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k} \sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{k(n-k)}}.$$

(les sommes sont indexées de 1 à $n-1$ car le terme d'ordre 0 de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est nul par convention)

Or, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $k(n-k) \leq (n-1)^2$. Ainsi, on a

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{1}{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} = 1.$$

Le terme général de la série $\sum_n c_n$ ne tendant pas vers zéro, cette série diverge grossièrement.

Ceci ne contredit pas le résultat énoncé à la question précédente, puisque la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente mais pas absolument convergente.

L'hypothèse « absolument convergente » est donc cruciale pour cet énoncé, puisqu'on vient de voir que le produit de CAUCHY de deux séries convergentes n'est pas toujours une série convergente.

Solution 4 - Études de séries (🔗 exercice)

1. On compare le terme général avec une série de RIEMANN. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n n^{-\frac{n+2}{2n}} = n^{\frac{n-2}{2n}} = n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}.$$

Si $n \geq 2$, alors

$$n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \geq n^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc par comparaison à une série de RIEMANN, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^{-\frac{n+2}{2n}}$ diverge.

2. La valeur absolue du terme général est 2^{-n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série des valeurs absolues du terme général est une série géométrique de raison 2^{-1} , qui converge. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(2^n)}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

3. Il s'agit d'une série alternée, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}} \geq 0$. On cherche donc à appliquer le théorème spécial des séries alternées. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}}.$$

Par croissance comparée, on sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Mais la suite $(u_n)_n$ n'est pas décroissante, puisque $u_1 = 0$ et $u_2 > 0$. On cherche donc à savoir s'il existe un rang n_0 à partir duquel cette suite est décroissante. On étudie donc les variations de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)^3}{\sqrt{x}}.$$

Cette fonction est dérivable (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{3\frac{1}{x} \ln(x)^2 \sqrt{x} - \ln(x)^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{6 \ln(x)^2 - \ln(x)^3}{3x\sqrt{x}}.$$

Le dénominateur étant positif pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6 \ln(x)^2 - \ln(x)^3 > 0 \Leftrightarrow 6 \ln(x)^2 > \ln(x)^3.$$

Si $x > 1$, on a alors $\ln(x) > 0$ et donc

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6 > \ln(x) \Leftrightarrow x < e^6.$$

En particulier, $f'(x) < 0$ pour tout $x \geq e^6$, donc f est décroissante sur $[e^6, +\infty[$. Ceci montre que la suite $(u_n)_n$ est décroissante à partir de $n_0 = \lceil e^6 \rceil$ ¹

On peut donc appliquer le théorème spécial des séries alternées pour conclure que la série

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}} \text{ converge}}.$$

Solution 5 - Une série presque alternée (🔗 exercice)

1. La suite $(n^{-\alpha})_n$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_n u_n$ $\boxed{\text{converge pour tout } \alpha > 0}$.
2. Ici, on ne peut pas appliquer le théorème spécial des séries alternées puisque la suite $(|u_n|)_n$ n'est pas décroissante en général. On écrit alors un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \frac{1}{1 + (-1)^n n^{-\alpha}} \underset{+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{w_n}.$$

Par la question précédente, la série de terme général v_n converge pour toute valeur de α . Comme $u_n = v_n + w_n$, alors les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ ont la même nature. Il suffit donc de voir pour quelles valeurs de α la série $\sum_n w_n$ converge.

La série $\sum_n w_n$ a son terme général équivalent au terme général de la série de Riemann $\sum_n n^{-2\alpha}$, qui est à terme positif, et qui converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Par le théorème d'équivalence de séries, on en déduit que la série $\sum_n w_n$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum_n u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}}$.

Solution 6 - Reconnaître un produit de CAUCHY (🔗 exercice)

1. La suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{8^k}{k!}\right)_n$ est la suite des sommes partielles de la série définissant l'exponentielle de 8, qui converge donc vers e^8 . En particulier, cette suite est bornée. Plus précisément, comme cette suite est croissante, alors elle est bornée entre 0 et e^8 .

1. Ce n'est pas demandé, mais pour information, $n_0 = 404$.

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{8^k}{k!} \leq \frac{1}{2^n} e^8.$$

Or, la série $\sum_n \frac{e^8}{2^n}$ converge, il s'agit d'un multiple d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$. Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_n w_n$ converge.

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \frac{8^k}{k!}.$$

On force un terme dépendant de $n - k$ à apparaître :

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} \frac{1}{2^k} \frac{8^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k}} \frac{4^k}{k!}.$$

On reconnaît maintenant le terme général du produit de CAUCHY des séries $\sum_n \frac{1}{2^n}$ et $\sum_n \frac{4^k}{k!}$. Ces deux séries classiques (géométrique et exponentielle) sont convergentes, et leurs sommes valent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^k}{k!} = e^4.$$

Ainsi, la somme de la série $\sum_n w_n$ est :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = 2e^4}.$$

Solution 7 - ROLLE itéré (🔗 exercice)

1. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, alors il existe $u, v \in [a, b]$ tels que $u < v$ et $f(u) = f(v) = 0$. Par le théorème de ROLLE, il existe $c \in]u, v[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. D'où l'initialisation.

Supposons maintenant que le résultat est vrai au rang n pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ s'annulant n fois sur $[a, b]$. Soit f soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $n + 2$ points distincts de $[a, b]$, qu'on note $u_0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1}$. En appliquant le théorème de ROLLE à f et sur chaque intervalle $[u_i, u_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n$, on obtient qu'il existe dans chaque intervalle $]u_i, u_{i+1}[$ un point v_i tel que $f'(v_i) = 0$.

En particulier, on a $a < v_0 < v_1 < \dots < v_n < b$. Donc f' est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ qui s'annule en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Par hypothèse de récurrence, il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, et donc $f^{(n+1)}(c) = 0$. D'où l'hérédité.

On a montré par récurrence l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

2. On procède une fois de plus par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, on a $f(a) = f(b) = 0$. Par le théorème de ROLLE, on obtient qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. D'où l'initialisation.

Supposons maintenant le résultat pour toute fonction g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[u, v]$ vérifiant $g(v) = 0$ et $g^{(k)}(u) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ telle que $f(b) = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}(a) = 0$. En appliquant le théorème de ROLLE à f entre a et b , on obtient qu'il existe $\tilde{c} \in]a, b[$ tel que $f'(\tilde{c}) = 0$. On applique alors l'hypothèse de récurrence sur f' et sur le segment $[a, \tilde{c}]$. On obtient qu'il existe $c \in]a, \tilde{c}[\subset]a, b[$ tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$, donc $f^{(n+1)}(c) = 0$. D'où l'hérédité.

Finalement, on a montré qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

3. On pose pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g(x) = P(x) - \frac{1}{x}$. On a que g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1, +\infty[$. On montre que g s'annule un nombre fini de fois.

Si $n = \deg(P) + 1$, alors $P^{(n)} = 0$ et donc $g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ (les dérivées successives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont à connaître ou à savoir retrouver rapidement!). En particulier, $g^{(n)}$ ne s'annule pas. Par la première question, ceci implique que g s'annule au plus n fois sur $[1, +\infty[$. Donc l'équation $P(x) = \frac{1}{x}$ n'admet qu'un nombre fini de solutions (au plus le degré de P).

En particulier, $g^{(n)}$

Solution 8 - Raccordement $\mathcal{C}^\infty$ (🔗 exercice)

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Par composition de fonctions usuelles, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors le résultat est clair $P_0 = Q_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}$. On calcule $f^{(n+1)}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{P'_n(x)Q_n(x) - P_n(x)Q'_n(x)}{Q_n(x)^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

On pose alors

$$P_{n+1} = (P'_n Q_n - P_n Q'_n) X^2 + Q_n P_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = Q_n^2 X^2.$$

On a $P_{n+1}, Q_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)} e^{-\frac{1}{x}}$. D'où l'hérédité.

Ainsi, on a montré par récurrence qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}}.$$

2. Comme f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-$. Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il faut montrer que toutes les dérivées de f sont continues en 0 pour pouvoir faire le raccordement.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre que $f^{(n)}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$) se prolonge par continuité en 0. On calcule les limites à gauche et à droite en 0 :

- Limite à gauche : $f^{(n)}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ donc $f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$.
- Limite à droite : on sait qu'il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}$. Par croissance comparée, on a

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Ainsi, $f^{(n)}$ est bien continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Remarque : La fonction f admet toutes ses dérivées en 0 nulles, mais devient non nulle pour $x > 0$. Ce phénomène montre par exemple que f n'est pas somme de sa série de TAYLOR en 0 sur un voisinage de 0.

Solution 9 - Une matrice de TOEPLITZ (🔗 exercice)

1. On développe par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne. On obtient :

$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & \dots & 0 \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & -a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & -a & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n+1} + a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a & a & a & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -a & a & a \\ 0 & \dots & 0 & -a & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n+1} + a^2\Delta_n.$$

On a donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} + a^2\Delta_n}.$$

2. On calcule Δ_0 et Δ_1 :

$$\Delta_0 = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_1 = |a| = a > 0.$$

Ainsi, par une récurrence immédiate, on a d'après la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_{n+2} > 0$. Donc en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n \neq 0$, et donc T_n est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. L'énoncé nous dit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_n = a^n (\lambda\varphi^n + \mu\psi^n).$$

On trouve les valeurs de λ et μ grâce aux valeurs connues de Δ_0 et Δ_1 :

$$\begin{cases} 1 = \Delta_0 = a^0 (\lambda\varphi^0 + \mu\psi^0) & \Leftrightarrow 1 = \lambda + \mu \\ a = \Delta_1 = a (\lambda\varphi + \mu\psi) & \Leftrightarrow 1 = \lambda\varphi + \mu\psi. \end{cases}$$

Or, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, nous avons donc le système :

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\varphi + \mu\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\lambda - \mu}{2} \sqrt{5}. \end{cases}$$

Celui-ci se réécrit

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \frac{\lambda + \mu}{2} + \frac{\lambda - \mu}{2} \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \\ \mu = 1 - \lambda = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Finalement, on a une formule explicite pour Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \frac{a^n}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})}.$$

Remarque : En fait, on a $\Delta_n = a^n F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où F_n est le n -ième nombre de la suite de FIBONACCI. En effet, la suite $(\frac{\Delta_n}{a^n})_n$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et ses premiers termes sont 1 et 1.