Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

22 Septembre 2022

Ensembles dénombrables
Familles sommables

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Calculs de sommes

Indiquer si les familles suivantes sont sommables et calculer leurs sommes dans le cas où elles le sont :

1. $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
2. $\left(\dfrac{1}{2^x}\right)_{x\in[1,+\infty[}$
3. $\left(\dfrac{\mathbf{1}_{\{0\le k\le n\}}}{2^n(n-k)!}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$
4. $\left(\dfrac{1}{q}\right)_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{ irréductible, } q>0}$
5. $(\zeta(n)-1)_{n\geq 2}$ où $\zeta(n)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-n}$

Solution :

1. C'est une série géométrique de raison 1/2 donc la famille est sommable, et sa somme vaut 2.
2. Le support de cette famille n'est pas dénombrable, donc la famille n'est pas sommable.
3. On reconnait le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{n!}$. Ces deux séries convergent, la première par la question 1 (vers 2), et la seconde vers e (on reconnait la série exponentielle). Donc la famille est sommable et de somme $2e$.
4. Soit $A=\{\frac{p}{2}\ ;\ p\in\mathbb{Z},\ 2\not|p\}\subset\mathbb{Q}$. Alors A est infini, car en bijection avec les entiers impairs. La famille est à termes positifs, on peut donc séparer la somme en deux :

$$\sum_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{ irréductible, } q>0}\frac{1}{q}=\sum_{x\in A}\frac{1}{2}+\sum_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\backslash A\text{ irréductible, } q>0}\frac{1}{q}$$

   Or, $\sum_{x\in A}\dfrac{1}{2}=+\infty$ car A est infini, donc la famille n'est pas sommable.
5. $\zeta(n)-1=\sum_{k\geq 2}k^{-n}$ donc

$$\sum_{n\geq 2}\zeta(n)-1=\sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}k^{-n}=\sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k^n}$$

   La famille est à termes positifs, on peut intervertir les sommes :

$$\sum_{n\geq 2}\zeta(n)-1=\sum_{k\geq 2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{k^n}=\sum_{k\geq 2}\frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}}=\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

   Par téléscopage, cette série converge vers 1. Donc la famille est sommable et de somme 1.

Exercice 2 - Preuves classiques du cours

Démontrez les résultats suivants :

1. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
2. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. Montrez que si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors son support est au plus dénombrable. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

Remarque : Si la dernière question n'a pas été traitée en cours, merci de me le signaler

Solution :

1. C'est l'argument diagonal de Cantor : on suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est dénombrable. En particulier, l'intervalle $]0,1[$ est lui aussi dénombrable. On considère alors $]0,1[= (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'écriture décimale propre de $x^{(n)}$:

$$x^{(n)} = 0, x_0^{(n)} x_1^{(n)} x_2^{(n)} \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^{(n)} 10^{-k}$$

Où pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $x_k^{(n)} \in [\![0,9]\!]$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\![0,9]\!] \setminus \{x_n^{(n)}, 9\}$. On retire 9 ici pour être certain de ne pas tomber sur une écriture décimale impropre. Alors le réel :

$$x = 0, x_0 x_1 x_2 \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k 10^{-k}$$

appartient à $]0,1[$ et est différent de tous les $x^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$, car son n-ième chiffre après la virgule est différent de celui de $x^{(n)}$. Ceci est absurde, car on a $]0,1[= (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $]0,1[$ n'est pas dénombrable, et $\mathbb{R}$ non plus.

2. On a :

$$\mathrm{Supp}((u_i)_i) = \{i \in I \ ; \ u_i \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{ i \in I \ ; \ |u_i| > \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$$

Or, si $(u_i)_i$ est sommable, alors $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. En particulier, A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathrm{Supp}((u_i)_i)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est au plus dénombrable.

3. Il suffit de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $[0,1]$, qui n'est pas dénombrable. On peut en fait se ramener à moins fort, en montrant seulement que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur surjecte dans $[0,1]$. On obtient une telle surjection en considérant la bijection :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ & A & \mapsto & (\mathbf{1}_{\{n\in A\}})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Puis la surjection en considérant l'écriture (éventuellement impropre, c'est pour ça qu'on n'a pas une bijection) en base 2 :

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & [0,1] \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} x_n 2^{-n} \end{array}$$

En concaténant ces deux applications, on obtient une surjection $\psi \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$. Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3 - Dénombrabilité

Les ensembles suivants sont-ils (au plus) dénombrables ? (justifier rapidement)

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
5. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
6. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$
7. $\mathbb{Q}[X]$
8. $\mathbb{C}[X]$
9. $\mathbb{Q} \times [0,1]$
10. L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et périodiques.

Solution :

1. Oui, il s'injecte dans $\mathbb{N}$ en plaçant les entiers strictement négatifs de $\mathbb{Z}$ sur les entiers impairs de $\mathbb{N}$ et les positifs sur les pairs.
2. Non par l'argument diagonal de Cantor
3. Oui, c'est un produit fini d'ensembles dénombrables
4. Non, il se surjecte dans $\mathbb{R}$ en considérant le fait que tout réel est limite de rationnels
5. Non, il se surjecte dans $[0,1]$ en considérant l'écriture en base 2 d'un entier
6. Oui, le nombre de polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ est le nombre de choix possibles de ses $d+1$ coefficients, c'est un ensemble fini car $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini. Donc $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc au plus dénombrable.
7. Oui, l'ensemble des polynômes de degré $d \in \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{d+1}$ qui est dénombrable. Donc $\mathbb{Q}[X]$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.
8. Non, $\mathbb{C}$ s'injecte dans $\mathbb{C}[X]$ (les polynômes constants) et $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable
9. Non, un produit d'ensembles non vides dont l'un des termes est non dénombrable est non dénombrable.
10. Oui. L'ensemble des suites rationnelles de période $t \in \mathbb{N}^*$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^t$ qui est dénombrable. Donc l'ensemble des suites rationnelles périodiques est une réunion dénombrable d'ensemble dénombrables, donc dénombrable.

Exercices

Exercice 4 - (*) Il n'y a pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.

Indication : Dans le cas fini, raisonner par cardinalité. Dans le cas infini, montrez que si $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$, alors l'ensemble $\{x \in X \; ; \; x \notin \varphi(x)\}$ n'est pas dans l'image de φ

Solution : Si X est fini, on sait que $|\mathcal{P}(X) = 2^{|X|}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$. Donc $\boxed{\text{il n'existe pas de surjection de } X \text{ dans } \mathcal{P}(X) \text{ si } X \text{ est fini.}}$

Si X est infini (en fait, ça marche aussi si X est fini, on l'a traité à part pour mettre en évidence que c'est très élémentaire dans ce cas), nous allons montrer que toute application $\varphi : X \to \mathcal{P}(X)$ n'est pas surjective. Soit φ une telle application et définissons l'ensemble $A = \{x \in X \; ; \; x \notin \varphi(x)\}$. Nous allons voir que A n'est pas dans l'image de φ. En effet, si c'était le cas, on aurait un élément $x \in X$ tel que $\varphi(x) = A$. Deux cas se présentent alors :

- Soit $x \in A$. Dans ce cas, $x \notin \varphi(x) = A$ par définition. On aboutit à une contradiction.
- Soit $x \notin A$. Dans ce cas, $x \in \varphi(x) = A$ par définition. On aboutir à une contradiction.

Les deux cas possibles sont absurdes, donc notre hypothèse que A est dans l'image de φ est fausse. Ainsi, φ n'est pas surjective. Et donc $\boxed{\text{Il n'y a pas de surjection de } X \text{ dans } \mathcal{P}(X)}$

Remarque : Ceci montre qu'on peut construire des ensembles toujours non dénombrables mais dont le cardinal est strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$, et d'ailleurs de plus en plus grands. En particulier, « non dénombrable »n'est pas équivalent à « équipotent à $\mathbb{R}$ »

Exercice 5 - (*) Sommabilité des entiers sans 9

1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.
2. Soit A l'ensemble des entiers non nuls sans 9 dans leur écriture en base 10. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable.
   Indication : On pourra partitionner A en ensembles d'entiers à $k+1$ chiffres dans leur écriture en base 10, pour tout k dans $\mathbb{N}$

Solution :

1. Il y a plusieurs façons de le montrer, soit on effectue une comparaison série/intégrale et on obtient que $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} \sim \ln(n)$ (cf cours sur les séries numériques), soit on fait une sommation par paquets :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geq 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{2^{k+1}} = 1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2} = +\infty$$

Remarquez qu'on peut faire tout ceci car la famille en question est positive (on peut donc tout faire, réarranger les termes, faire des paquets, etc. sans se soucier de la sommabilité)

2. On écrit

$$A = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{n \in A \,;\, 10^k \leq n < 10^{k+1}\right\} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \{n \in A \,;\, \text{« } n \text{ a } k{+}1 \text{ chiffres en base 10 »}\}$$

. Comme chaque A_k est fini pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in A_k}$ est sommable pour tout k. En fait, on a même que $\sum_{n\in A_k} \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{|A_k|}{10^k}$. Calculons alors le cardinal de A_k. Il s'agit des entiers ayant exactement $k+1$ chiffres dans leur écriture en base 10, et n'ayant pas de 9. En particulier, le premier chiffre peut-être n'importe quel élément de $[\![1, 8]\!]$, tandis que les k suivants peuvent être n'importe quel élément de $[\![0, 8]\!]$. Ainsi, $|A_k| = 8 \times 9^k$. Plus formellement, l'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{ccc} [\![1, 8]\!] \times [\![0, 8]\!] & \longrightarrow & A_k \\ (a_0, a_1, \dots, a_k) & \longmapsto & \overline{a_0 a_1 \dots a_k}^{10} \end{array}$$

Finalement, on obtient que : $\sum_{n\in A_k} \dfrac{1}{n} \leq 8 \left(\dfrac{9}{10}\right)^k$. Or, la famille $(8 \left(\dfrac{9}{10}\right)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable (série géométrique multipliée par 8). Comme la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est à termes positifs, on peut appliquer le théorème de sommation par paquets, et $\boxed{\text{elle est donc sommable}}$. D'ailleurs, on a même un majorant de la somme, il s'agit de 80.

Exercice 6 - (*) Un contre-exemple au théorème des séries doubles

On pose pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$:

$$u_{m,n}=\begin{cases} 1 & \text{si } m=n \\ -\dfrac{1}{2^{m-n}} & \text{si } m>n \\ 0 & \text{si } m<n \end{cases}$$

La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Si c'est trop difficile sans questions intermédiaires

1. Montrer que pour $m\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_{m,n}=\frac{1}{2^m}$.
2. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}u_{m,n}=0$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}}u_{m,n}$ et $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{m,n}$
4. Conclure.

Solution : Fixons $m\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{m,n}=1-\sum_{n=0}^{m-1}2^{n-m}=1-2^{-m}\sum_{n=0}^{m-1}2^n=1-2^{-m}(2^m-1)=2^{-m}$$

Ainsi, la série $\sum_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{m,n}\right)$ converge, et sa somme vaut 2 De même, fixons $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{m\in\mathbb{N}}u_{m,n}=1-\sum_{m=n+1}^{+\infty}2^{n-m}=1-2^n\sum_{m=n+1}^{+\infty}2^{-m}=1-2^n2^{-n}=0$$

Ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{m,n}\right)$ converge, et sa somme vaut 0

Les deux sommes sont différentes, donc la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

Exercice 7 - (**) Permutations de $\mathbb{N}$

L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

Indication : On pourra s'intéresser aux points fixes des éléments de $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$

Si c'est trop difficile sans questions intermédiaires

1. Montrer que l'ensemble des points fixes d'une permutation de $\mathbb{N}$ ne peut pas être de la forme $\mathbb{N}\setminus\{n\}$ pour un $n\in\mathbb{N}$

2. Montrer que pour toute partie F de $\mathbb{N}$ différente de celles de la question précédente, il existe une permutation dont l'ensemble des points fixes est F
3. Démontrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N} \setminus \{n\} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est non dénombrable.
4. Conclure que $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ est non dénombrable.

Solution : On considère l'application $\varphi : \mathfrak{S}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\varphi(\sigma) = \mathrm{fix}(\sigma)$ où $\mathrm{fix}(\sigma) = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ \sigma(n) = n\}$. Cette application est bien définie car l'ensemble des points fixes d'une permutation de $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Si on montre que φ est surjective, on a gagné, car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est équipotent à $\mathbb{R}$, donc non dénombrable, donc $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ est non dénombrable. Le problème, c'est que ce n'est pas vrai : il n'existe pas de permutation de $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ fixant uniquement $\mathbb{N}^*$ par exemple, ou de manière générale, fixant uniquement $\mathbb{N}$ privé d'un point. Cependant, pour toute autre partie de $\mathbb{N}$, on peut trouver une permutation de $\mathbb{N}$ ayant cet ensemble de points fixes. En effet, pour $\mathbb{N}$ tout entier on prend l'identité, et si $F \subset \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N} \setminus F$ soit de cardinal au moins 2, on considère un dérangement de $\mathbb{N} \setminus F$ (qu'on peut obtenir par transposition deux à deux : si $\mathbb{N} \setminus F = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, on pose $\sigma(x_{2i}) = x_{2i+1}$ et $\sigma(x_{2i+1}) = \sigma(x_{2i})$ si $\mathbb{N} \setminus F$ est infini, et simplement un k cycle si $\mathbb{N} \setminus F$ est fini de cardinal k). On étend ce dérangement en une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par l'identité, il s'agit d'une permutation de $\mathbb{N}$ ayant pour points fixes exactement les éléments de F.

Ainsi, il reste à voir que $\varphi(\mathfrak{S}(\mathbb{N})) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N} \setminus \{n\} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est non dénombrable. L'ensemble qu'on retranche est en bijection avec $\mathbb{N}$, donc dénombrable. Donc $\varphi(\mathfrak{S}(\mathbb{N}))$ est non dénombrable, car sinon $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \varphi(\mathfrak{S}(\mathbb{N})) \sqcup \{\mathbb{N} \setminus \{n\} \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ serait dénombrable. Ainsi, $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ se surjecte dans un ensemble non dénombrable, il est donc $\boxed{\text{non dénombrable}}$.

Exercice 8 - (**) Nombres algébriques, nombres transcendants

On pose $\overline{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \exists P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}, \ P(z) = 0\}$, qu'on appelle ensemble (en fait, c'est un corps) des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Le but de cet exercice est de comprendre le cardinal de $\overline{\mathbb{Q}}$ et de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, ce dernier étant l'ensemble des nombres transcendants de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{C}$ (utiliser un résultat du cours, ne pas le redémontrer).
2. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.
   Indication : (Orale) Montrer d'abord que $\mathbb{Q}[X]$ est au plus dénombrable, puis utiliser le fait qu'un polynôme à coefficient dans un corps admet au plus un nombre fini de racines.
3. Soit E un ensemble infini et $D \subset E$ une partie infinie dénombrable de E telle que $D \setminus E$ soit infini. Montrer que E et $E \setminus D$ sont équipotents.
4. En déduire que l'ensemble des nombres transcendants est équipotent à $\mathbb{R}$.

Remarque : Ce résultat est assez paradoxal avec la pratique. En effet, il est difficile d'exhiber un nombre *transcendant, alors qu'ils sont infiniment plus nombreux que les nombres algébriques. À titre d'exemple, la notion de nombre transcendant existe depuis au moins le 17e siècle, mais le premier nombre transcendant exhibé ne l'a été qu'au 19e siècle ! (il s'agit entre autres de la constante de* Liouville*). Aujourd'hui, nous connaissons bien plus de (familles) de nombres transcendants, avec des méthodes pour en fabriquer, mais il reste beaucoup de questions ouvertes, par exemple, il est toujours inconnu à ce jour si* $e\pi$ *ou si la constante* γ *d'*Euler *sont transcendants. On sait en revanche que* e *et* π *le sont, et ce dernier a notamment permis de démontrer l'impossibilité de la quadrature du cercle.*

Solution :

1. On utilise soit un résultat du cours disant que $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$, puis que $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.
2. On a $\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{P \in \mathbb{Q}[X] \ ; \ \deg(P) = n\} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{(a_0,\dots a_n) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^*} \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d\}$ est une union dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable. Ainsi, $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{P \in \mathbb{Q}[X]} R(P)$ où $R(P)$ est l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$, qui est de cardinal fini (au plus $\deg(P)$) si P est non nul. Donc $\overline{\mathbb{Q}}$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc est dénombrable. $\boxed{\text{L'ensemble des nombres algébriques sur } \mathbb{Q} \text{ est dénombrable}}$
3. Comme D est infinie et dénombrable, on note $D = (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $i \neq j \in \mathbb{N}$, $d_i \neq d_j$. Comme $E \setminus D$ est infini, on peut prendre une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (E \setminus D)^{\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts. On définit alors une application $\varphi : E \to E \setminus D$ par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \varphi(d_n) = x_{2n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \varphi(x_n) = x_{2n+1} \\ \forall x \in E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{d_n, x_n\}, & \varphi(x) = x \end{cases}$$

   Alors φ est bien bijective (parce que son inverse est donnée par $\varphi^{-1}(x_{2n}) = d_n$, $\varphi^{-1}(x_{2n+1}) = x_n$ et $\varphi^{-1}(x) = x$ si x n'est ni un d_n, ni un x_n), donc $\boxed{E \text{ et } E \setminus D \text{ sont équipotents}}$
4. En appliquant la question précédente avec $E = \mathbb{C}$ et $D = \overline{\mathbb{Q}}$, on obtient que l'ensemble des nombres transcendants, $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$, est équipotent à $\mathbb{C}$, donc $\boxed{\text{à } \mathbb{R}}$ par la première question. En particulier, il n'est pas dénombrable.

Exercice 9 - (**) Une série génératrice

On fixe $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que la famille $\left(x^{kl}\right)_{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.
2. En exprimant la somme de cette famille de deux manières différentes, montrer l'identité suivante :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs (positifs) de n.

Solution :

1. Il suffit de montrer que la famille à termes positifs $\left(|x|^{kl}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est de somme finie. Pour le faire, on va utiliser le théorème des séries doubles : fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On a, comme $|x| < 1$:

$$u_k = \sum_{l=1}^{+\infty} |x|^{kl} = \sum_{l=1}^{+\infty} \left(|x|^k\right)^l = \frac{|x|^k}{1 - |x|^k}$$

Or, la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable. En effet, soit on remarque que $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} |x|^k$ et la série $\sum |x|^k$ converge (cf cours sur les séries numériques), soit on majore $u_k \leq \frac{|x|^k}{1-|x|}$, et la série de terme général $\frac{|x|^k}{1-|x|}$ converge car est multiple d'une série géométrique de raison $|x| < 1$. Dans tous les cas, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} |x|^{kl} < +\infty$$

Par le théorème des séries doubles, $\boxed{\text{la famille } \left(x^{kl}\right)_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable}}$.

2. Le même calcul que précédemment mais sans les valeurs absolue (qu'on peut faire car la famille est sommable !) donne que :

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^k}$$

De plus, on peut également sommer par paquets. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ ; \ n = kl\}$. On a alors :

$$\sum_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2} x^{kl} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,l)\in A_n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| x^n$$

Il reste à voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_n| = d(n)$. Ceci est vrai car l'application :

$$\begin{array}{ccc} A_n & \to & \{\text{Diviseurs de } n\} \\ (k,l) & \mapsto & k \end{array}$$

est une bijection. D'où le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n}$$