Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

29 Septembre 2022

Séries numériques

Table des matières

Questions de cours **2**

Exercice 1 - Sommation des relations de comparaison (solution) 2

Exercice 2 - Théorème des séries alternées (solution) 2

Exercice 3 - Séries de Riemann (solution) 2

Exercices **2**

Exercice 4 - (*) Une série avec des sinus (solution) 2

Exercice 5 - (*) La règle du $n^\alpha u_n$ n'est pas une CNS (solution) 2

Exercice 6 - (*) Terme général d'une SATP décroissante (solution) 2

Exercice 7 - (**) Série des $f(1/n)$ (solution) 3

Exercice 8 - (**) Séries de Bertrand (solution) 3

Exercice 9 - (**) Une série presque alternée (solution) 3

Exercice 10 - (**) Série $\sum a^{H_n}$ (solution) 4

Exercice 11 - (**) Puissances de sommes de puissances (solution) 4

Exercice 12 - (***) Théorème de réarrangement de Riemann (solution) 4

Questions de cours

Exercice 1 - Sommation des relations de comparaison (solution)
Énoncez et le théorème de sommation de relations de comparaison, et démontrez-le dans le cas du petit o.

Exercice 2 - Théorème des séries alternées (solution)
Énoncez et démontrez le théorème des séries alternées. Donnez un contre-exemple pour chaque hypothèse retirée.

Exercice 3 - Séries de Riemann (solution)
Énoncez et démontrez le théorème sur les séries de Riemann.

Exercices

Exercice 4 - (*) Une série avec des sinus (solution)
Montrez que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{n-1}\sin^3(\frac{\pi}{3^n})$$

converge et calculer sa somme.
<u>Indication :</u> On pourra linéariser $\sin^3$ *en somme de fonctions sinus de différentes fréquences*

Exercice 5 - (*) La règle du $n^\alpha u_n$ n'est pas une CNS (solution)

1. Énoncez le théorème de la règle du $n^\alpha u_n$, puis trouvez une série $\sum u_n$ à termes positifs qui converge mais telle que pour tout $\alpha > 1$, la suite $(n^\alpha u_n)_n$ ne tend pas vers zéro.
2. Mieux (ou pire, selon le point de vue) : trouvez une série $\sum u_n$ à termes positifs qui converge mais telle que pour tout $\alpha > 0$, la suite $(n^\alpha u_n)_n$ n'est pas bornée.

Exercice 6 - (*) Terme général d'une SATP décroissante (solution)
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que la suite $(u_n)_n$ soit décroissante. Si la série converge,

montrez que $u_n = o(\frac{1}{n})$. Donnez un contre-exemple si la suite n'est pas décroissante.

Exercice 7 - (**) Série des $f(1/n)$ (solution)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. En fonction de la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$, donnez la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(1/n)$.

Indication : On peut écrire un développement de TAYLOR *de f en zéro*

Exercice 8 - (**) Séries de BERTRAND (solution)

Soient $\alpha, \beta > 0$. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$$

appelée série de BERTRAND. On cherche à déterminer pour quelles valeurs de α et β cette série converge.

Remarque : Le terme général de cette série commence à 2, car u_0 et u_1 n'ont pas de sens

1. Si $\alpha > 1$, montrer que la série de BERTRAND converge.
   Indication : (Orale) On pourra utiliser la règle du $n^\alpha u_n$
2. Si $\alpha < 1$, montrer que la série de BERTRAND diverge.
   Indication : (Orale) On pourra montrer que $1/n = o(u_n)$ dans ce cas
3. On suppose maintenant que $\alpha = 1$. En considérant la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$, montrer que la série de BERTRAND converge si et seulement si $\beta > 1$.

Remarque : Les séries de BERTRAND *se généralisent, on peut ajouter $\ln(\ln(n))^\delta$, $\ln(\ln(\ln(n)))^\gamma$, etc... et on obtient un résultat similaire : la série converge si et seulement si $(\alpha, \beta, \delta, \dots) >_{lex} (1, 1, 1, \dots)$, où on considère l'ordre lexicographique.*

Exercice 9 - (**) Une série presque alternée (solution)

Soit $\alpha > 0$

1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge ?
   Indication : (Orale) Cette série est très proche de la précédente, essayer de faire un développement limité

Exercice 10 - (**) Série $\sum a^{H_n}$ (solution)
Soit a un réel strictement positif. Pour quelles valeurs de a la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^{1+1/2+1/3+\cdots+1/n}$ converge ?

<u>Indication :</u> *(Orale) On pourra utiliser un développement asymptotique de* H_n

---

Exercice 11 - (**) Puissances de sommes de puissances (solution)
Déterminez tous les entiers $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^a = \left(\sum_{k=0}^{n} k^b\right)^c$$

<u>Indication :</u> *On pourra utiliser une comparaison série/intégrale pour trouver un équivalent à ces deux membres quand $n \to +\infty$, puis déterminer les valeurs de a, b, c à partir de ça*

Exercice 12 - (***) Théorème de réarrangement de RIEMANN (solution)

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente telle que $u_n \to 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite de signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.
   <u>Indication :</u> *(Orale) Faire un dessin !*
2. (Théorème de réarrangement de Riemann) Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = a$.

   <u>Indication :</u> *On pourra partitionner $\mathbb{N}$ en trois ensembles, celui des indices où u_n est strictement négatif, nul, strictement positif respectivement. L'idée de la preuve est très similaire à celle de la question précédente.*

Solutions des exercices

Solution 1 - Sommation des relations de comparaison (exo)

Théorème *Soient $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs.*

- *Si $\sum v_n$ diverge :*
  1. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_{n=0}^{N} u_n = o\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)$*
  2. *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{n=0}^{N} u_n = O\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)$*
  3. *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et $\sum_{n=0}^{N} u_n \sim \sum_{n=0}^{N} v_n$*
- *Si $\sum v_n$ converge :*
  1. *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = o\left(\sum_{n=N}^{+\infty} v_n\right)$*
  2. *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = O\left(\sum_{n=N}^{+\infty} v_n\right)$*
  3. *Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \sim \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$*

Preuve : On suppose que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ diverge : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$. Donc si $n \geq N$, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{N} u_k\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \leq A + \sum_{k=N+1}^{n} |u_k| \leq A + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{n} v_k$$

  Où A est une constante positive ne dépendant pas de n. On choisit alors $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\sum_{k=0}^{n} v_n \geq A/\varepsilon$. On a alors pour tout $n \geq N'$, $|\sum_{k=0}^{n} u_k| \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_n$, d'où le résultat.

- Si $\sum v_n$ converge : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$. En particulier, la série $\sum u_n$ converge. De plus si $n \geq N$, on a :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

  D'où le résultat.

Solution 2 - Théorème des séries alternées (exo)

Théorème *Soit (u_n) une suite réelle décroissante qui tend vers zéro. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, si R_n est le reste d'ordre n, alors R_n a le même signe que $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$*

Preuve : Se fait en montrant que les suites des sommes partielles des termes pairs et des termes impairs sont adjacentes, donc convergent. Donc la suite des sommes partielles converge. Pour la majoration du reste, ça découle de la décroissance de la suite (u_n).

Contre-exemples

- Si (u_n) n'est pas décroissante, même si elle reste positive et tend vers zéro, on prend $u_n = \frac{1}{2n}(1+(-1)^n)$ (qui vaut $\frac{1}{n}$ si n est pair et 0 sinon). Alors $(-1)^n u_n = u_n$, et la série des u_n n'est pas convergence.
- Si (u_n) ne tend pas vers zéro, alors la suite $(-1)^n u_n$ ne converge pas vers 0 non plus, donc la série diverge grossièrement.

Solution 3 - Séries de Riemann (exo)

Théorème *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$*

Preuve : Le cas où $\alpha \leq 0$ est trivial car la série diverge grossièrement. Dans les autres cas, on effectue une comparaison série/intégrale. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont décroissantes et tendent vers 0, donc :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

donc en sommant :

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}dx \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N} \frac{1}{x^\alpha}dx$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\ln(N+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \ln(N)$$

Donc la série diverge.

Sinon, on a :

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Donc la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Solution 4 - (*) Une série avec des sinus (exo)
Tout d'abord, la série converge bien car le terme général est équivalent à la série de terme général $\pi^3 3^{-2n-1}$ qui est un multiple d'une série géométrique de raison $1/9 < 1$. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\sin(x) - \sin(3x)\right)$$

(À redémontrer si vous ne savez pas faire !) En particulier, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(3^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) - 3^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{3^{n-1}}\right)\right)$$

Par téléscopage, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{N} = \frac{3^N}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^N}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$$

Solution 5 - (*) La règle du $n^\alpha u_n$ n'est pas une CNS (exo)

1. La règle du $n^\alpha u_n$ est :

   Théorème : *Soit $\sum u_n$ une série numérique. S'il existe $\alpha > 1$ telle que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ converge vers 0, alors la série converge.*

   Un contre exemple facile peut s'obtenir via les séries de Bertrand : on sait que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$ converge, mais si $\alpha > 1$, alors $n^\alpha u_n = \frac{n^{\alpha-1}}{\ln(n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. L'idée est de prendre une série très lacunaire. Prenons par exemple :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin 2^{\mathbb{N}} \\ \dfrac{1}{k^2} & \text{si } n = 2^k \end{cases}$$

   Alors la série $\sum u_n$ est à termes positifs et converge (somme de Riemann), mais si $\alpha > 0$, on a :

$$n^\alpha u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin 2^{\mathbb{N}} \\ \dfrac{2^{\alpha k}}{k^2} & \text{si } n = 2^k \end{cases}$$

En particulier, la sous-suite $(u_{2^k})_k$ de $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, donc $(u_n)_n$ n'est pas bornée.

Solution 6 - (*) Terme général d'une SATP décroissante (exo)
Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(u_n)_n$ est décroissante, on a :

$$\sum_{n=N+1}^{2N} u_n \geq N u_{2N} \geq 0$$

En multipliant par 2 ces inégalités, et en utilisant le fait que la série $\sum u_n$ converge, on obtient par encadrement que $(2N)u_{2N} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ensuite, toujours par décroissance de la suite $(u_n)_n$, on a :

$$0 \leq (2N+1)u_{2N+1} \leq (2N+1)u_{2N} = (2N)u_{2N} + u_{2N}$$

Par ce qui précède, le membre de droite tend vers zéro en $+\infty$. On a donc par encadrement : $(2N+1)u_{2N+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, en rassemblant les termes paris et impairs, on a que $u_N = o(\frac{1}{N})$.

Pour trouver un contre exemple, l'idée est de prendre une série lacunaire. Posons $u_n = 0$ si n n'est pas un carré parfait, et $1/n$ si n est un carré parfait. Alors la série $\sum u_n$ converge (série de Riemann). Mais $nu_n = 0$ si n n'est pas un carré parfait et 1 si n est un carré parfait, donc $(nu_n)_n$ ne tend pas vers 0.

Solution 7 - (**) Série des $f(1/n)$ (exo)
Tout d'abord, si $f(0) \neq 0$, alors la suite $(f(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(1/n)$ diverge grossièrement. Supposons maintenant que $f(0) = 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, on a par la formule de Taylor-Young : $f(x) \underset{0}{=} xf'(0) + O(x^2)$. Autrement dit, on a $f(1/n) \underset{+\infty}{=} f'(0)/n + O(1/n^2)$. Si $f'(0) = 0$, alors $f(1/n) = O(1/n^2)$. Par sommation des relations de comparaisons, comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 1/n^2$ converge (série de Riemann), alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(1/n)$ converge. Sinon (si $f'(0) \neq 0$), alors la série de terme général $f(1/n) - f'(0)/n$ converge (pour les mêmes raisons que précédemment), donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(1/n)$ diverge, car dans le cas contraire la série de terme général $f(1/n) - (f(1/n) - f'(0)/n)$, c'est-à-dire de terme général $f'(0)/n$, convergerait. Et ce n'est pas le cas (série harmonique).
Finalement : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} f(1/n) \text{ converge si et seulement si } f(0) = f'(0) = 0.}$

Solution 8 - (**) Séries de Bertrand (exo)

1. Utilisons la règle du $n^\alpha u_n$. Ici, le α de la règle n'est pas nécessairement le α de l'énoncé ! Mais il va tout de même marcher. En effet, $n^\alpha u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   $\boxed{\text{Donc la série de Bertrand converge}}$

2. Montrons que $1/n \underset{+\infty}{=} o(u_n)$. Comme $\sum u_n$ est à termes positifs et que la série harmonique diverge, on obtient que $\boxed{\text{la série de Bertrand diverge}}$. On calcule

$$\frac{1}{nu_n} = \frac{n^\alpha(\ln(n))^\beta}{n} = n^{\alpha-1}(\ln(n))^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   car $\alpha - 1 < 0$ et par croissance comparée.

3. Commençons d'abord par le cas où $\beta \neq 1$. La fonction f est bien définie sur $[2, +\infty[$, et elle y est de classe C^1. On a $f(2) > 0$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'(x) = -\dfrac{(\ln(x))^\beta + \beta(\ln(x))^{\beta-1}}{x^2(\ln(x))^{2\beta}} < 0$. Ainsi, f est une fonction positive, décroissante et tendant vers 0 en l'infini, on peut appliquer une comparaison série/intégrale. Autrement dit, la série de Bertrand a la même nature que $\int f(x)dx$. Soit $A > 2$, étudions la convergence de cette intégrale :

$$\int_2^A \frac{1}{x(\ln(x))^\beta}dx \underset{\text{Primitive}}{=} \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln(x))^{1-\beta}\right]_2^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{(\ln(2))^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{Si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{Si } \beta < 1 \end{cases}$$

   Donc la série de Bertrand converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta < 1$. Traitons maintenant le cas $\beta = 1$. Dans ce cas, la fonction f est toujours positive, décroissante et tendant vers zéro en l'infini, mais une primitive de f est $\ln(\ln(x))$. Ainsi :

$$\int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln(x))]_2^A \underset{A\to+\infty}{+\infty}$$

   Donc la série de Bertrand diverge pour $\beta = 1$.

   $\boxed{\text{Finalement, on a obtenu que la série de Bertrand converge si et seulement si } (\alpha > 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$

Solution 9 - (**) Une série presque alternée (exo)

1. La suite $(1/n^\alpha)$ est positive, décroissante et tend vers 0. Par le critère des séries alternées, la série $\sum_n u_n$ $\boxed{\text{converge pour tout } \alpha > 0}$.

2. Écrivons un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \frac{1}{1+(-1)^n n^{-\alpha}} \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

où $v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ et $w_n \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$.
Par la question précédente, la série de terme général v_n converge pour toute valeur de α. Comme $u_n = v_n + w_n$, alors les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n w_n$ ont la même nature. Il suffit donc de voir pour quelles valeurs de α la série $\sum_n w_n$ converge. w_n est équivalente au terme général d'un série de Riemann $\sum_n n^{-2\alpha}$, qui est à terme positif, et qui converge si et seulement si $2\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1/2$. Par équivalence de séries, la série de terme général w_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$, et donc $\boxed{\text{la série } \sum_n u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1/2}$

Solution 10 - (**) Série $\sum a^{H_n}$ (exo)

Notons $u_n = a^{H_n}$ le terme général de cette série. Tout d'abord, si $a \geq 1$, alors $u_n \geq 1 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Supposons maintenant que $0 < a < 1$. D'après le cours (à savoir refaire !), on a le développement asymptotique de H_n suivant : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où $\gamma \in \mathbb{R}_+$ est la constante d'Euler. Ainsi :

$$\begin{aligned} a^{H_n} &= \exp(H_n \ln(a)) \\ &= \exp(\ln(n)\ln(a) + \gamma\ln(a) + o(1)) \\ &= \exp(\ln(n)\ln(a))\exp(\gamma\ln(a))\exp(o(1)) \\ &= n^{\ln(a)} a^\gamma (1 + o(1)) \\ &\sim n^{\ln(a)} a^\gamma \end{aligned}$$

Remarque : On aurait directement pu utiliser le résultat suivant : si $f = g + o(1)$, alors exp$(f) \sim$ exp(g). J'ai préféré refaire le calcul à la main car le passage à l'exponentielle requiert un $o(1)$, en particulier, si $f \sim g$, alors exp$(f) \not\sim \exp(g)$, prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x + ln(x)$. Il vaut mieux faire attention lorsqu'on a des exponentielles dans nos équivalents. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous ne pouvons pas nous contenter de l'équivalent $H_n \sim \ln(n)$

a^γ étant une constante, la nature de la série de terme général $n^{\ln(a)}a^\gamma$ est la même que celle de la série de terme général $n^{\ln(a)}$, qui est une série de Riemann. Elle converge donc si et seulement si $\ln(a) < -1$, c'est-à-dire si et seulement si $a < e^{-1}$. Par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^{H_n} \text{ converge si et seulement si } a < e^{-1}}$

Solution 11 - (**) Puissances de sommes de puissances (exo)

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^d$ est positive et croissante. On peut donc faire une comparaison série/intégrale et on obtient l'équivalent :

$$\sum_{k=0}^{n} k^d \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{d+1}}{d+1}$$

En particulier, si (a, b, c) vérifient l'égalité de l'énoncé, on a :

$$\frac{n^{a+1}}{a+1} = \left(\frac{n^{b+1}}{b+1}\right)^c$$

En particulier, on a les égalités $a + 1 = c(b + 1) = (b + 1)^c$. En passant au log, on obtient que $\ln(c) - (c - 1)\ln(b + 1) = 0$. Posons alors $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x) - (x - 1)\ln(b + 1)$. Une étude de fonction donne que :

x	0		$\frac{1}{\ln(b+1)}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	m_b	$\searrow$	$-\infty$

où $m_b = -1 + \ln(b + 1) - \ln(\ln(b + 1))$. On remarque aussi que 1 est toujours un zéro de f, quelque soit la valeur de b. 3 cas se présentent :

- Si $b+1 > e$, alors f a exactement deux zéros, à savoir 1 est un autre dans $]0, 1/\ln(b+1)[\subset]0, 1[$. Comme on ne cherche que les solutions entières, $c = 1$ est l'unique zéro de f sur $\mathbb{N}^*$
- Si $b + 1 < e$, alors $b = 1$ ($b \in \mathbb{N}^*$). En particulier, f a exactement deux zéros, à savoir 1 et 2.
  - ▷ Si $c = 1$, alors $a = b$. On obtient les triplets $(a, a, 1)$ pour $a \in \mathbb{N}^*$
  - ▷ Si $c = 2$, alors $b = 1$ et $a = 3$. On obtient le triplet $(3, 1, 2)$

On vérifie maintenant les solutions obtenues : les cas $(a, a, 1)$ sont triviaux, et le cas $(3, 1, 2)$ est en effet vrai. En effet, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \cdots = n^3$$

Solution 12 - (***) Théorème de réarrangement de Riemann (exo)

1. Comme la série de terme général u_n diverge, alors il existe un entier minimal N_0 tel que $A_0 := \sum_{n=0}^{N_0} u_n > a$ (N_0 peut être nul si $a < 0$). On pose alors $\varepsilon_0 = \cdots = \varepsilon_{N_0} = 1$. De même,

il existe un entier $N_1 > N_0$ minimal tel que $A_1 := A_0 - \sum_{n=N_0+1}^{N_1} u_n < a$. On pose alors $\varepsilon_{N_0+1} = \cdots = \varepsilon_{N_1} = -1$. On continue ainsi, ce qui construit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons maintenant que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge vers a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $S_n - a \to 0$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$ est la somme partielle d'ordre n. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_k <= n < N_{k+1}$. Pour simplifier les notations, on suppose que k est impair (de sorte à avoir $\varepsilon_i = 1$ si $N_k + 1 \leq i \leq N_{k+1}$), la preuve pour le cas pair se fait de la même manière. En particulier, on a $|S_n - a| \leq \max(|S_{N_k} - a|, |S_{N_{k+1}} - a|) = \max(a - S_{N_k}, S_{N_{k+1}} - a)$. Or, par construction, $S_{N_k} < a < S_{N_k-1}$ et $S_{N_{k+1}} > a > S_{N_{k+1}-1}$. Ainsi, $a - S_{N_k} < S_{N_k-1} - S_{N_k} = u_{N_k}$ et $S_{N_{k+1}} - a < S_{N_{k+1}} - S_{N_{k+1}-1} = u_{N_{k+1}}$. Finalement, $|S_n - a| \leq \max(u_{N_k}, u_{N_{k+1}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. (Pour rappel, et pour éviter d'alourdir les notations, k dépend de n et $k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais on note tout de même seulement k au lieu de $k(n)$).

Remarque : Pour le lecteur : FAIRE UN DESSIN. La preuve ici semble longue, difficile et abstraite. Un dessin est très clair, tracer une droite horizontale d'ordonnée a, puis montez jusqu'à dépasser a, puis descendez jusqu'à dépasser a, etc...

2. On partitionne $\mathbb{N}$ en trois ensembles P, Z, N :

$$\begin{aligned} P &= \{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n > 0\} \\ Z &= \{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = 0\} \\ N &= \{n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n < 0\} \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que Z est vide pour simplifier les idées. On construit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ de la manière suivante, très similaire à la construction de la première question. On pose $n_P = n_N = 0$.

- Initialement, si a est positif (ou nul), on incrémente n_P et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_P-ème élément (par ordre croissant) de P (dans ce cas, c'est le premier élément de P). Si a est strictement négatif, on incrémente n_N et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_N-ème élément de N (dans ce cas, c'est le premier élément de N)
- Supposons $\sigma(0), \ldots, \sigma(m)$ définis pour $m \in \mathbb{N}$. On définit $\sigma(m+1)$ de la manière suivante : Si $\sum_{n=0}^{m} u_{\sigma(n)} \geq a$, on incrémente n_P et on pose $\sigma(m)$ comme étant le n_P-ème élément de P. sinon, on incrémente n_N et on pose $\sigma(m)$ comme étant le n_N-ème élément de N.

Pour avoir une permutation de $\mathbb{N}$, il faut s'assurer de la bijectivité. L'injectivité est claire (on associe à chaque m un élément différent de P ou de N, qui sont disjoints), reste à voir la surjectivité. Par construction, si σ n'est pas surjective, c'est qu'elle prend qu'un nombre fini de valeurs dans P ou dans N, disons N (l'argument sera le même si c'est P). Cela signifie que la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n\in P\}} u_n)_n$ converge. Or, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est semi-convergente, donc convergente. Donc la série différence qui est la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n\in N\}} u_n)_n$ aussi. Mais alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est convergente comme somme de deux séries convergentes. Ce qui est absurde. Ainsi, σ atteint tous les éléments de P et de N, donc est surjective car il s'agit d'une partition de $\mathbb{N}$. Il reste enfin à voir que la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$ converge bien, il s'agit du même argument que dans la question précédente (la série $\sum_n u_n$ étant semi-convergente, elle est convergente, donc le terme général u_n tend vers 0).

Enfin, il reste à traiter le cas où Z n'est pas vide. Ce qu'on fait est qu'on ajoute entre chaque étape un élément de Z, tant qu'il en reste. On introduit dans la construction de σ un troisième compteur n_Z, et si m est pair, on fait comme précédemment, et si m est impair, on incrémente n_Z puis on définit $\sigma(m)$ comme étant le n_Z-ème élément de Z.
