Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

6 Octobre 2022

Séries numériques - Fin

Étude asymptotique de suites réelles
Révisions et compléments d'algèbre linéaire

Table des matières

Questions de cours **2**
Exercice 1 - Séries de Riemann 2
Exercice 2 - Convergence en moyenne de Cesàro 2
Exercice 3 - Théorème du rang 2

Exercices **2**
Exercice 4 - (*) $e^{a_n} + e^{b_n}$ converge 2
Exercice 5 - (**) Une suite récurrente non linéaire 2
Exercice 6 - (**) Suite $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ 3
Exercice 7 - (**) Méthode de Newton 3
Exercice 8 - (**) Un calcul de déterminant 4×4 3
Exercice 9 - (**) Endomorphisme de dérivation 4
Exercice 10 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b 4
Exercice 11 - (**) Crochet de Lie de matrices 5
Exercice 12 - (**) Dual, bidual 5
Exercice 13 - (**) Matrice de Vandermonde 6

Questions de cours

Exercice 1 - Séries de RIEMANN (solution)
Énoncez et démontrez le théorème sur les séries de RIEMANN.

Exercice 2 - Convergence en moyenne de CESÀRO (solution)
Énoncez et démontrez le théorème de convergence en moyenne de CESÀRO. Existe-t-il des suites qui convergent au sens de CESÀRO mais qui ne convergent pas au sens usuel ?

Exercice 3 - Théorème du rang (solution)
Énoncez et démontrez le théorème du rang. Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E)$, a-t-on $\ker(u) \oplus \mathrm{im}(u) = E$?

Exercices

Exercice 4 - (*) $e^{a_n} + e^{b_n}$ converge (solution)
Soient $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et que $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que dire des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$?

Exercice 5 - (**) Une suite récurrente non linéaire (solution)
Soient $u_0, u_1, \lambda > 0$. On définit pour tout $n \geq 2$, $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_n u_{n+1}}$. Le but de l'exercice est de donner une formule explicite pour u_n, $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez la bonne définition de la suite $(u_n)_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(v_n)_n$?
2. Trouvez une solution particulière à l'équation vérifiée par la suite $(v_n)_n$ de la forme $w_n = \alpha n$.
3. On pose $x_n = v_n - w_n$. Montrez que $(x_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2. En déduire une expression explicite de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra garder deux inconnues)
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sans inconnue)

Exercice 6 - (**) Suite $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ (solution ☞)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_1 = 1; \qquad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq 2\sqrt{n}$, puis en déduire que $u_n \sim \sqrt{n}$
2. Calculez les trois premiers termes du développement asymptotique de $(u_n)_n$ en l'infini

---

Exercice 7 - (**) Méthode de Newton (solution ☞)

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f' > 0$ et que $f(c) < 0 < f(d)$. Soit $x_0 \in [c, d]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{où} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. Montrez que f a un unique zéro dans $[c, d]$, qu'on note a. Puis montrez que pour tout $x \in [c, d]$, il existe z entre a et x tel que
$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$
2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c, d]$: $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$. Puis montrez qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F. Enfin, montrez que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_n$ converge vers a et a une vitesse de convergence d'ordre 2.
3. Application : Retrouvez la méthode de Héron (aussi connue sur le nom de méthode babylonienne) du calcul de racines carrées : Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + a/u_n}{2}$ converge vers $\sqrt{a}$ à une vitesse d'ordre 2. En calculant les 3 premiers termes de cette suite pour $a = 3$, calculez une approximation de $\sqrt{3}$ à 4 chiffres (pour information, $\sqrt{3} \simeq 1.73205$)

Exercice 8 - (**) Un calcul de déterminant 4×4 (solution ☞)

Calculer $\det(A)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 - (**) Endomorphisme de dérivation (solution ☞)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ et $D : E \to E$ l'application de dérivation : $D(f) = f'$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $D \in \mathcal{L}(E)$
2. D est-elle injective ? Surjective ? Précisez son noyau et son image
3. Montrer que tout élément de $\mathbb{C}$ est valeur propre de D (ie. $\sigma(D) = \mathbb{C}$), précisez pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ
4. En déduire que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de E. Est-ce que c'est une base de E ?
5. A-t-on les mêmes réponses si on considère l'espace $F = \mathbb{C}[X]$ et $D \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de dérivation ? ($D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$)

Exercice 10 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (solution ☞)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la matrice suivante :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

1. Montrez par récurrence sur $n \geq 2$ que $\det(A_n(a,b)) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$

   Remarque : On admettra aussi vraie la formule pour $a = 0$
2. Montrez que $\lambda_1 := (a + (n-1)b)$ et $\lambda_2 := a - b$ sont des valeurs propres de $A_n(a,b)$
3. Montrer que $\dim(E_{\lambda_1}(A_n(a,b))) = 1$ et que $\dim(E_{\lambda_2}(A_n(a,b))) = n-1$ en trouvant une base de vecteurs propres pour chacun de ces sous-espaces propres.
4. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable. À quelle matrice diagonale est-elle semblable ?

Exercice 11 - (**) Crochet de Lie de matrices (solution ☞)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application :

$$ad(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB - BA \end{array}$$

1. On pose :

$$L(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array} \quad \text{et} \quad R(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & BA \end{array}$$

   Montrez que $L(A)$ et $R(A)$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. En déduire que $ad(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Montrer que $L(A)$ et $R(A)$ commutent et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L(A)^k = L(A^k)$ et $R(A)^k = R(A^k)$.
3. En déduire que si A est nilpotente, alors $L(A)$ et $R(A)$ le sont aussi. En déduire que dans ce cas, $ad(A)$ est également nilpotente
4. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $ad(A - \lambda I_n)$
5. En déduire que si A n'a qu'une seule valeur propre, alors $ad(A)$ est nilpotente.
   Indication : Si le résultat n'a pas encore été vu, on peut admettre qu'une matrice complexe n'ayant que 0 pour valeur propre est nilpotente
6. Que dire de $ad(A)$ si A est diagonale ? Diagonalisable ?

Exercice 12 - (**) Dual, bidual (solution ☞)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ le dual de E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E

1. Montrez que $\dim(E^*) = \dim(E)$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i^* la forme linéaire définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Montrez que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*. On l'appelle la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$.
2. On pose $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E. Montrez que l'application linéaire $\Phi : E \to E^{**}$ définie par $\Phi(e_i) = e_i^{**}$ est un isomorphisme, puis montrez que Φ est en fait l'application définie

par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & (\varphi \mapsto \varphi(x)) \end{array}$$

Remarque : Ainsi, cet isomorphisme entre E et son bidual E^{**} ne dépend pas de la base de E choisie. On dit que cet isomorphisme est canonique (ou que E est canoniquement isomorphe à son bidual)

3. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrez qu'il existe une unique base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que pour tout i, $f_i^* = \varphi_i$. On appelle cette base la base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.
4. Application : Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Soit $D \in \mathcal{L}(E)$ la dérivation : $D(P) = P'$ et $ev_0 \in E^*$ l'évaluation en zéro : $ev_0(P) = P(0)$. Montrez que la base duale de $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ est

$$\left(ev_0,\ ev_0 \circ D,\ \frac{1}{2} ev_0 \circ D^2,\ \ldots,\ \frac{1}{(n-1)!} ev_0 \circ D^{n-1} \right)$$

Exercice 13 - (**) Matrice de Vandermonde (solution ☜)

Soit K un corps de caractéristique nulle et $E = K_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ sur K. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de K deux à deux distincts. Si $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$L_i = \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \in K_{n-1}[X]$$

1. Montrez que $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ et $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ sont deux bases de E.
2. Soit V la matrice de l'application :

$$\begin{array}{rccc} EV : & E & \to & K^n \\ & P & \mapsto & (P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)) \end{array}$$

écrite dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique de K^n. Explicitez V

3. Montrez que V est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$. En déduire que V est inversible, puis une méthode pour calculer V^{-1} (ne pas l'appliquer).
4. Calculez $\det(V)$

Solutions des exercices

Solution 1 - Séries de Riemann (☞ exercice)

Théorème *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$*

Preuve : Le cas où $\alpha \leq 0$ est trivial car la série diverge grossièrement. Dans les autres cas, on effectue une comparaison série/intégrale. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sont décroissantes et tendent vers 0, donc :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

donc en sommant :

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\ln(N+1) - \ln(2) \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \ln(N)$$

Donc la série diverge.

Sinon, on a :

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

Donc la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Solution 2 - Convergence en moyenne de Cesàro (☞ exercice)

Théorème *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{C}$. Alors la suite $(c_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $c_N = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n$ converge vers l.*

Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_n$ converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. En particulier, si $N \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
&|u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1} - Nl| \\
&\quad \leq \quad |u_0 + u_1 + \cdots + u_{n_0} - (n_0+1)l| + |u_{n_0+1} + \cdots + u_{N-1} - (N - n_0 - 1)l| \\
&\quad \leq \quad A + |u_{n_0+1} - l| + \cdots + |u_{N-1} - l| \\
&\quad \leq \quad A + (N - n_0 - 1)\varepsilon \\
&\quad \leq \quad A + N\varepsilon
\end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{C}$ est une constante indépendante de N. Ainsi :

$$|c_N - l| \leq \frac{A}{N} + \varepsilon$$

Soit $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $N \geq n_1$, $A/N \leq \varepsilon$. On a donc pour tout $N \geq n_1$:

$$|c_N - l| \leq 2\varepsilon$$

Donc $(c_N)_N$ converge vers l.

Réciproque ? Non. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro en moyenne de CESÀRO, mais ne converge pas au sens usuel.

Solution 3 - Théorème du rang (☞ exercice)

Théorème *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors* $\dim(\ker(u)) + rg(u) = \dim(E)$

Preuve Soit $n = \dim(E)$ et $k = \dim(\ker(u)) \leq n$. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\ker(u)$ qu'on étend en une base $(e_1, \ldots e_n)$ de E. Alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}(u)$. Or, par définition, $u(e_1) = \cdots = u(e_k) = 0$, donc $(u(e_{k+1}), \ldots, u(e_n))$ est une partie génératrice de $\mathrm{im}(u)$. Montrons que c'en est une base, c'est-à-dire qu'elle est libre. S'il existe $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$, par linéarité, on a $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in \ker(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Donc cette combinaison linéaire est nécessairement nulle car $(e_1, \ldots e_n)$ est une base de E (donc libre). Ainsi, $(u(e_{k+1}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}(u)$. Finalement, on a $\dim(\ker(u)) = k$, $\dim(\mathrm{im}(u)) = n - k$ et $\dim(E) = n$, d'où le théorème du rang.

Noyau et image en somme directe ? Non. Prendre par exemple $E = \mathbb{R}^2$, de base (e_1, e_2) et

$u \in \mathcal{L}(E)$ définie par $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$. On a $\ker(u) = \mathbb{R}e_1$ et $\mathrm{im}(u) = \mathbb{R}e_1$, qui ne sont pas en somme directe.

Solution 4 - (*) $e^{a_n} + e^{b_n}$ converge (☛ exercice)

Supposons dans un premier temps que la suite $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, et soit a une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$. Comme $a_n + b_n \to 0$, alors $-a$ est valeur d'adhérence de $(b_n)_n$. En particulier, on a par continuité de l'exponentielle et de la somme, $e^a + e^{-a} = 2$, ce qui signifie que $ch(a) = 1$, donc $a = 0$. Ainsi, si $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, celle-ci est unique et c'est 0.

Montrons maintenant que $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence. Il suffit de montrer que la suite $(a_n)_n$ est bornée, ce qui par symétrie avec $(b_n)_n$ revient à montrer que la suite $(a_n)_n$ est majorée (car $(a_n + b_n)_n$ est bornée). Comme $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, il existe un rang N à partir duquel $3 \geq e^{a_n} + e^{b_n} \geq e^{a_n} \geq 0$. Donc la suite $(e^{a_n})_n$ est majorée, donc $(a_n)_n$ aussi car $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, la suite $(a_n)_n$ est bornée, donc possède une valeur d'adhérence. De plus, celle-ci est unique et vaut 0, donc $a_n \to 0$. De même, $b_n \to 0$.

Solution 5 - (**) Une suite récurrente non linéaire (☛ exercice)

1. Par une récurrence immédiate, on montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut considérer $v_n = \ln(u_n)$. En passant au logarithme dans la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_n$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + \ln(\lambda)$$

2. On injecte $w_n = \alpha n$ dans l'équation précédente :

$$\alpha(n+2) = \frac{\alpha}{2}(n+1) + \frac{\alpha}{2}n + \ln(\lambda) = \alpha\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(\lambda)$$

   Donc $\alpha = \frac{2}{3}\ln(\lambda)$. La suite $w_n = \left(\frac{2}{3}\ln(\lambda)\right)n$ vérifie donc la relation de récurrence vérifiée par (v_n), c'est donc bien une solution particulière.

3. On a alors que la suite $(x_n)_n = (v_n - w_n)_n$ vérifie : $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$, qui est une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique correspondante est : $r^2 - r/2 - 1/2 = 0$, de solution $r = -1/2$ et $r = 1$. Ainsi, il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b$.

4. Ainsi, $v_n = x_n + w_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b + \frac{2}{3}\ln(\lambda)n$. Donc :

$$u_n = e^a e^{b(-1/2)^n} \lambda^{2n/3} = AB^{(-1/2)^n} \lambda^{2n/3}$$

où $A = e^a$ et $B = e^b$. Déterminons A et B en fonction de u_0 et u_1 : on a $u_0 = AB$ et $u_1 = \frac{A}{\sqrt{B}} \lambda^{2/3}$. Donc $u_0 u_1^2 = A^3 \lambda^2$ donc $A = u_0^{1/3} u_1^{2/3} \lambda^{-4/9}$ et $B = u_0^{2/3} u_1^{-2/3} \lambda^{4/9}$.
Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(u_0^{1/3} u_1^{2/3} \lambda^{-4/9}\right) \left(\frac{u_0 \lambda^{2/3}}{u_1}\right)^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \lambda^{2n/3}$$

Solution 6 - (**) Suite $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ (☞ exercice)

1. On le fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leq 2$. Supposons maintenant $n \geq 1$ et le résultat vrai au rang n. On a alors :

$$u_{n+1}^2 = n + 1 + u_n \leq n + 1 + 2\sqrt{n} \leq (n+1) + (n+1) + 2(n+1) = 4(n+1)$$

Donc $u_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$.
Ainsi, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{n}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

Par encadrement, on a que $u_n \sim \sqrt{n}$.

2. La question précédente nous donne déjà le premier terme : $u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$. Injectons ceci dans la formule définissant u_n :

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{n + \sqrt{n-1} + o(\sqrt{n})} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Ainsi, en utilisant la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$ en zéro :

$$u_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}_{1+o(1)} + o(1) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$$

Pour obtenir le troisième terme, on recommence :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n+u_{n-1}} \\
&= \sqrt{n+\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}+o(1)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}+\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}_{1+o(1/\sqrt{n})}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Solution 7 - (**) Méthode de Newton (☛ exercice)

1. Comme f est strictement croissante sur $[c,d]$ et que $f(c)<0<f(d)$, la théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence et l'unicité d'un zéro de f dans $[c,d]$, qu'on note a. Si $x\in[c,d]$, on applique la formule de Taylor-Lagrange : Il existe z entre a et x tel que

$$0=f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(z)(a-x)^2$$

   Donc :

$$F(x)-a=(x-a)-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{-(a-x)f'(x)-f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

2. Comme $f'>0$ sur $[c,d]$ et que f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la fonction f''/f' est continue donc bornée sur $[c,d]$. En particulier, il existe $C>0$ tel que $||f''/f'||_\infty\leq C$, et alors $|F(x)-a|\leq C|x-a|^2$ pour tout $x\in[c,d]$

   Soit $\alpha>0$ tel que $a\pm\alpha\in[c,d]$. On a : $|F(a+\alpha)-a|\leq C\alpha^2$. Ainsi, si $\alpha<C^{-1}$, alors I est stable par F.

   Dans ce cas, la suite $(x_n)_n$ est bien définie (si $x_0\in I$), et on a $|x_{n+1}-a|=|F(x_n)-a|\leq C|x_n-a|^2$. On pose $v_n=C|x_n-a|$, on a alors $v_{n+1}\leq v_n^2$, donc par une récurrence immédiate,

$v_n \leq v_0^{2^n}$, c'est-à-dire $|u_n - a| \leq C^{-1}(C|x_0 - a|)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $C\alpha < 1$, et la convergence est donc d'ordre 2.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, sur l'intervalle $[0, a]$. Elle vérifie les hypothèses de la méthode de Newton et son unique zéro sur $[0, a]$ est $\sqrt{a}$. Donc la méthode de Newton appliquée à cette fonction donnera une suite (x_n) qui convergera vers $\sqrt{a}$ à la vitesse de convergence d'ordre 2. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

On retrouve la méthode de Héron.

Si $a = 3$ et $x_0 = 1$, les premiers termes de la suite sont :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{1 + 3/1}{2} = 2 \\
x_2 &= \frac{2 + 3/2}{2} = \frac{7}{4} = 1.75 \\
x_3 &= \frac{\frac{7}{4} + 3\frac{4}{7}}{2} = \frac{97}{56} \simeq 1.7321
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{3} \simeq 1.73205$, on a bien trouvé une approximation de $\sqrt{3}$ à 4 chiffres.

Solution 8 - (**) Un calcul de déterminant 4×4 **(☞ exercice)**

On commence par un pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{l}
L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{5}{3}L_1 \\
L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{5}{3}L_1 \\
L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1
\end{array}\right. \Rightarrow \det(A) = \det(A') \text{ où } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{22}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

En faisant ensuite $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$, $L_2 \leftarrow 3L_2$, $L_3 \leftarrow 3L_3$ et $L_4 \leftarrow \frac{1}{3}L_4$, on obtient une matrice A'' telle que $\det(A'') = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times \frac{1}{3} \det(A') = \det(A)$. On a :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 22 & -14 & 13 \\ 0 & 4 & -5 & 19 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire par blocs (ou bien on développe par rapport à la première colonne), on obtient ainsi que $\det(A) = \det((1)) \det(B)$ où B est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 13 \\ 4 & -5 & 19 \\ \frac{4}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient que

$$\det(B) = \frac{4}{3} \begin{vmatrix} -14 & 13 \\ -5 & 19 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 22 & 13 \\ 4 & 19 \end{vmatrix}$$

On calcule alors les déterminants 2×2, et on obtient que $\det(B) = -\frac{4}{3} \times 201 + 366 = 98$. Donc $\boxed{\det(A) = 1 \times \det(B) = 98}$.

Solution 9 - (**) Endomorphisme de dérivation (☞ exercice)

1. Oui (juste appliquer les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire)
2. Non : $D(0) = D(1) = 0$. D'ailleurs, son noyau est justement l'ensemble des fonctions constantes. Par contre, D est surjective, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'écrit $D(x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ vérifient $D(f) = \lambda f$. Ce sont donc des vecteurs propres de D, chacun associé à la valeur propre λ. Donc $\sigma(D) = \mathbb{C}$.
4. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts est libre, donc cette famille est libre. Ce n'est pas une base de E car l'identité $x \mapsto x$ n'est pas dans le vect de cette famille. En effet, si $f(x) = x$ est l'identité, on a $D(f) \neq 0$ et $D(D(f)) = 0$, mais toute combinaison linéaire non constante de fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ a toutes ses dérivées non nulles, et une combinaison linéaire constante de telles fonctions a pour dérivée nulle.
5. Non. D est toujours surjective non injective, mais elle n'admet qu'une seule valeur propre, zéro. En effet, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$, donc pour tout

$\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\deg(D(P)) \neq \deg(\lambda P)$, donc $D(P) \neq \lambda P$. Zéro est bien valeur propre car le noyau de D est l'ensemble des polynômes constants.

Solution 10 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (☛ exercice)

1. Pour $n = 2$, ok. Si $n > 2$, on fait la première étape d'un pivot de Gauss. On obtient :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ 0 & a - \frac{b^2}{a} & b - \frac{b^2}{a} & \dots & b - \frac{b^2}{a} \\ 0 & b - \frac{b^2}{a} & a - \frac{b^2}{a} & \dots & b - \frac{b^2}{a} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & b - \frac{b^2}{a} & b - \frac{b^2}{a} & \dots & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

   Donc $\det(A_n(a,b)) = a\det(A_{n-1}(a - \frac{b^2}{a}, b - \frac{b^2}{a}))$. Par HR, on obtient :

$$\begin{aligned} \det(A_n(a,b)) &= a\left(a - \frac{b^2}{a} + (n-2)\left(b - \frac{b^2}{a}\right)\right)\left(a - \frac{b^2}{a} - b + \frac{b^2}{a}\right)^{n-2} \\ &= (a^2 - (n-1)b^2 + (n-2)ab)(a-b)^{n-2} \\ &= (a-b)(a+(n-1)b)(a-b)^{n-2} \\ &= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

   D'où l'itération et le résultat.

2. Si $f_1 = {}^t(1,1,\dots,1)$, alors $A_n(a,b)f_1 = (a+(n-1)b)f_1$ donc λ_1 est valeur propre de $A_n(a,b)$. De même, si $f_2 = {}^t(1,-1,0,0,\dots,0)$, alors $A_n(a,b)f_2 = (a-b)f_2$ donc λ_2 est valeur propre de $A_n(a,b)$.

3. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour rappel $f_1 = e_1 + \dots + e_n$ et $f_2 = e_1 - e_2$. On pose alors $f_k = e_1 - e_k$ pour $2 \leq k \leq n$. Il s'agit d'une famille libre (opérations élémentaires sur la famille libre $(e_2,\dots,e_n)$) et on a pour tout $2 \leq k \leq n$, $A_n(a,b)f_k = (a-b)f_k$. Ainsi, $\dim(E_{\lambda_2}(A_n(a,b))) \geq n-1$, et $\dim(E_{\lambda_1}(A_n(a,b))) \geq 1$. Donc ces inégalités sont des égalités.

4. On a donc une décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres de $A_n(a,b)$, donc cette matrice est diagonalisable, et semblable à : $\mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, a-b, \dots, a-b)$

Solution 11 - (**) Crochet de Lie de matrices (☛ exercice)

1. Ce sont bien des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par linéarité de la multiplication matricielle. Comme $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ est un espace vectoriel, $ad(A) = L(A) - R(A)$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. C'est une récurrence immédiate.
3. C'est une conséquence directe de la question précédente. Si $A^k = 0$, alors $L(A)^k = L(A^k) = L(0) = 0$ (l'endomorphisme nul). Item pour $R(A)^k$. Pour $ad(A)$, on peut appliquer le binôme de Newton car $L(A)$ et $R(A)$ commutent, et donc $ad(A)^{2k} = 0$.
4. C'est $ad(A)$: $ad(A - \lambda I_n)(B) = (A - \lambda I_n)B - B(A - \lambda I_n) = AB - BA - \lambda I_n B + B\lambda I_n = AB - BA$
5. Si A n'a qu'une seule valeur propre λ, alors $A - \lambda I_n$ n'a que 0 comme valeur propre, et est donc nilpotente (par exemple car la seule racine de son polynôme caractéristique est 0 donc X^n annule $A - \lambda I_n$). Par ce qui précède, $ad(A - \lambda I_n)$ est nilpotente, et donc $ad(A)$ aussi car ce sont les mêmes objets.
6. Si A est diagonale, $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors un calcul montre que $ad(A)(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ainsi, A est diagonale car les $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable, on considère pour tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $C(P) : B \mapsto PBP^{-1}$. Soit P inversible telle que $PAP^{-1} = D$ est une matrice diagonale. On montre que $C(P)ad(A)C(P)^{-1} = ad(D)$ qui est diagonale par ce qui précède, donc $ad(A)$ est diagonalisable.

Solution 12 - (**) Dual, bidual (☞ exercice)

1. On a $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E)\dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$. Il suffit de montrer que la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est libre, car elle est de taille $n = \dim(E^*)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum \lambda_i e_i^* = 0$. En évaluant sur chacun des e_i, on obtient que $\lambda_i = 0$. Donc c'est bien une base de E^*
2. Φ est un isomorphisme car par ce qui précède, $(e_1^{**}, \dots, e_n^{**})$ est une base de E^{**}, et Φ envoie une base sur une base.

   Soit $x \in E$. On écrit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a $\Phi(x) = x_1 e_1^{**} + \cdots + x_n e_n^{**}$. Soit $\varphi \in E^*$. On écrit $\varphi = \varphi_1 e_1^* + \cdots + \varphi_n e_n^*$. Par définition de la base duale de $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(x)(\varphi) &= x_1 e_1^{**}(\varphi) + \cdots + x_n e_n^{**}(\varphi) \\
&= x_1\varphi_1 + \cdots + x_n\varphi_n \\
&= \varphi_1 e_1^*(x_1 e_1) + \cdots + \varphi_n e_n^*(x_n e_n) \\
&= \varphi_1 e_1^*(x) + \cdots + \varphi_n e_n^*(x) \\
&= \varphi(x)
\end{aligned}$$

3. On vérifie que $(\Phi^{-1}(\varphi_1^*), \dots, \Phi^{-1}(\varphi_n^*))$ est une base de E, puis que sa base duale est $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Par définition, $\Phi^{-1}(\varphi_j^*)$ est l'unique élément f_j de E tel que $\Phi(f_j) = \varphi_j^*$, c'est-à-dire tel que pour tout i, $\varphi_i(f_j) = \varphi_j^*(\varphi_i) = \delta_{i,j}$. Donc $(f_1, \dots, f_n)$ est bien la base antéduale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$
4. On montre que pour tout $k, l \in [\![0, n-1]\!]$, $ev_0 \circ D^k(X^l) = \delta_{k,l}$ par la règle de dérivation des monômes.

Solution 13 - (**) Matrice de Vandermonde (☞ exercice)

1. $\mathcal{B}$ est une famille de $n = \dim(E)$ polynômes de degrés échelonnés, donc c'est une base de E. Pour $\mathcal{L}$, on montre qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que :

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$$

   En évaluant en α_1, on obtient que $\lambda_1 = 0$, puis en évaluant en α_2, on obtient que $\alpha_2 = 0$, etc.
2. Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $EV(X^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$. Donc dans la base $\mathcal{B}$ de E, la matrice de EV s'écrit :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

   On reconnaît une matrice de Vandermonde !
3. On écrit les L_i dans la base $\mathcal{B}$: $L_i = x_0^{(i)} + x_1^{(i)} X + \cdots + x_{n-1}^{(i)} X^{n-1}$. On a :

$$V \begin{pmatrix} x_0^{(i)} \\ x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} + x_1^{(i)}\alpha_1 + \cdots + x_{n-1}^{(i)}\alpha_1^{n-1} \\ x_0^{(i)} + x_1^{(i)}\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}^{(i)}\alpha_2^{n-1} \\ \vdots \\ x_0^{(i)} + x_1^{(i)}\alpha_n + \cdots + x_{n-1}^{(i)}\alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_i(\alpha_1) \\ L_i(\alpha_2) \\ \vdots \\ L_i(\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

   V est donc bien la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{L}$. Comme c'est une matrice de passage, elle est inversible, son inverse étant la matrice de passage de la base $\mathcal{L}$ à la base $\mathcal{B}$. Pour l'obtenir, il faudrait écrire les L_i dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire développer le produit et considérer la matrice V^{-1} dont la i-ème colonne est formée des coefficients de L_i.
4. On montre par récurrence sur $\mathbb{N}^*$ que $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_j - \alpha_i$.

- Le cas $n = 1$ est trivial (c'est le produit vide, donc égal à 1)
- Supposons vraie la formule pour $n \in \mathbb{N}^*$. Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $2 \leq i \leq n+1$ donnent :

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \\ 1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \dots & \alpha_2^n - \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n^2 - \alpha_1^2 & \dots & \alpha_n^n - \alpha_1^n \\ 0 & \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \alpha_{n+1}^2 - \alpha_1^2 & \dots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_1^n \end{vmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det(V) &= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_2^n - \alpha_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n+1} - \alpha_1 & \dots & \alpha_{n+1}^n - \alpha_1^n \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{2 \leq i \leq n+1} \alpha_i - \alpha_1 \right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & (\alpha_2^{n-1} + \alpha_2^{n-2}\alpha_1 + \dots + \alpha_2 \alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-1}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \dots & (\alpha_{n+1}^{n-1} + \alpha_{n+1}^{n-2}\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}\alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-1}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On fait les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - \alpha_1 C_1 - \alpha_2 C_2 - \dots - \alpha_{j-1} C_{j-1}$. On obtient alors que :

$$\begin{aligned} \det(V) &= \left(\prod_{2 \leq i \leq n+1} \alpha_i - \alpha_1 \right) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}^2 & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{2 \leq j \leq n+1} \alpha_j - \alpha_1 \right) \left(\prod_{2 \leq i < j \leq n+1} \alpha_j - \alpha_i \right) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence. Donc finalement :

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} \alpha_j - \alpha_i$$