Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

13 Octobre 2022

Éléments propres
Réduction

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Endomorphismes diagonalisables (solution ☜)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappelez la définition d'une valeur propre de u et d'un vecteur propre associé à une valeur propre.
2. Rappelez la définition d'un endomorphisme diagonalisable
3. Montrez que si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable
4. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 - Polynôme caractéristique (solution ☜)
Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappelez la définition du polynôme caractéristique de u. Dans quoi vivent ses coefficients ? Quel est son degré ?
2. Quels sont les coefficients de χ_u de degré n, $n-1$ et 0 ?
3. Soit F un sous-espace de E stable par u, et G un supplémentaire de F dans E (c'est-à-dire $E = F \oplus G$). Y a-t-il un lien entre χ_u et $\chi_{u_{|F}}$? Et entre χ_u et $\chi_{u_{|G}}$?

Exercice 3 - Stabilité des sous-espaces propres en cas de commutativité (solution ☜)

Soit E un espace vectoriel, et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappelez la définition d'un espace propre de u.
2. On suppose dans cette question que E est de dimension finie. Existe-t-il des endomorphismes de E n'ayant pas de sous-espaces propres ?
3. Montrez que si u et v commutent, alors v stabilise les espaces propres de u.

Exercices

Exercice 4 - (*) Valeur propre pour tout le monde (solution ☜)
Montrez que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une valeur propre. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ toutes

les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettent une valeur propre ? Et pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$?

<u>Indication :</u> On pourra utiliser une matrice compagnon pour la question sur $\mathbb{Q}$

Exercice 5 - (*) Tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable (solution ☜)

Montrez que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ admet une droite ou un plan stable.

Exercice 6 - (*) Forme linéaire valeur propre ? (solution ☜)

Soit $n \geq 2$. Existe-t-il une forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(M) \in \sigma(M)$?

Exercice 7 - (**) Centre de $\mathcal{L}(E)$ (solution ☜)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrez que le centre de $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties.

<u>Indication :</u> On pourra montrer qu'un endomorphisme stabilisant toute droite est une homothétie.

Exercice 8 - (**) Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (solution ☜)

Soient K un corps, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ et $C \in \mathcal{M}_n(K)$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque : On dit que la matrice C est cyclique si elle est de cette forme

1. Calculez χ_C. En déduire que C est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$. On notera dans la suite $P = \chi_C$.
2. Montrez qu'il existe $X \in K^n$ tel que $(X, CX, \dots, C^{n-1}X)$ soit une base de K^n. Exprimez C^nX dans cette base.
3. On note $P(C) = a_0I_n + a_1C + \dots + a_{n-1}C^{n-1} + C^n \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrez que $P(C)(X) = 0$, puis en déduire que $P(C)$ est la matrice nulle.

Remarque : On vient de démontrer le théorème de CAYLEY-HAMILTON *pour les matrices cycliques, qui dit que $\chi_A(A) = 0$ si $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Une preuve de ce théorème repose en fait sur ce résultat sur les matrices cycliques.*

Exercice 9 - (**) Endomorphisme de dérivation (solution ☜)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{C})$ et $D : E \to E$ l'application de dérivation : $D(f) = f'$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $D \in \mathcal{L}(E)$
2. D est-elle injective ? Surjective ? Précisez son noyau et son image
3. Montrer que tout élément de $\mathbb{C}$ est valeur propre de D (ie. $\sigma(D) = \mathbb{C}$), précisez pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ
4. En déduire que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est une famille libre de E. Est-ce que c'est une base de E ?
5. A-t-on les mêmes réponses si on considère l'espace $F = \mathbb{C}[X]$ et $D \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de dérivation ? ($D(P) = P'$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$)

Exercice 10 - (**) Crochet de LIE de matrices (solution ☜)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application :

$$ad(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB - BA \end{array}$$

1. On pose :

$$L(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & AB \end{array} \quad \text{et} \quad R(A) : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ B & \mapsto & BA \end{array}$$

   Montrez que $L(A)$ et $R(A)$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. En déduire que $ad(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Montrer que $L(A)$ et $R(A)$ commutent et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L(A)^k = L(A^k)$ et $R(A)^k = R(A^k)$.
3. En déduire que si A est nilpotente, alors $L(A)$ et $R(A)$ le sont aussi. En déduire que dans ce cas, $ad(A)$ est également nilpotente
4. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, calculer $ad(A - \lambda I_n)$

5. En déduire que si A n'a qu'une seule valeur propre, alors $ad(A)$ est nilpotente.

   Indication : Si le résultat n'a pas encore été vu, on peut admettre qu'une matrice complexe n'ayant que 0 pour valeur propre est nilpotente

6. Que dire de $ad(A)$ si A est diagonale ? Diagonalisable ?

Exercice 11 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (solution ☞)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in K^* \times K$, on définit la matrice suivante :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

1. On suppose dans un premier temps que $a = b$. Montrez que $\dim(E_0(A_n(a,a))) = n-1$ et que $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) = 1$.
2. En déduire que $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X - na)$, puis que $A_n(a,a)$ est diagonalisable. Explicitez les matrices de passage.
3. On revient dans le cas général a, b quelconques. Calculez les sous-espaces propres de $A_n(a,b)$ et montrez que $\chi_{A_n(a,b)} = (X - (a-b))^{n-1}(X - (a + (n-1)b))$. À quelle condition sur a et b $A_n(a,b)$ est-elle inversible ?
4. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable et diagonalisez explicitement $A_n(a,b)$, puis en déduire une formule explicite pour $A_n(a,b)^k$, si $k \in \mathbb{N}$.

Solutions des exercices

Solution 4 - (*) Valeur propre pour tout le monde (☞ exercice)

On sait que les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines du polynôme caractéristique (dans le corps considéré). Or, comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, tout polynôme caractéristique admet une racine, donc toute matrice admet une valeur propre.

Sur $\mathbb{R}$, on sait par le théorème des valeurs intermédiaires que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle. Ainsi, si n est impair, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre. Si n est pair, ce n'est plus le cas. En effet, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$, qui n'a pas de racines réelles. Donc si $n = 2m$, la matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{m \text{ fois}})$ a pour polynôme caractéristique $(X^2+1)^m$ qui n'a pas de racines réelles.

Enfin, sur $\mathbb{Q}$, il existe des matrices sans valeurs propres dès que $n \geq 2$. En effet, soit $P = X^n - 2$ et C_P la matrice compagnon de P. Alors $\chi_{C_P} = P$ donc les valeurs propres de C_P sont les racines dans $\mathbb{Q}$ de P. Or, pour tout $n \geq 2$, $\sqrt[n]{2}$ est irrationnel (preuve classique par descente infinie), donc C_P n'a pas de valeurs propres. Pour $n = 1$, toute matrice admet une valeur propre, qui est son seul coefficient.

Solution 5 - (*) Tout endomorphisme réel admet une droite ou un plan stable (☞ exercice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet une valeur propre, A admet une droite stable. On suppose maintenant que A n'a pas de valeurs propres réelles. En particulier, les valeurs propres de A vue comme une matrice à coefficients complexes, sont stables par conjugaison. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A vue comme une matrice complexe, et soit X un vecteur propre associé. Comme A est à coefficients réels, on a $\overline{A} = A$, donc de l'égalité $AX = \lambda X$, on en déduit que $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Posons $U = \operatorname{Re}(X) = \frac{1}{2}(X + \overline{X})$ et $V = \operatorname{Im}(X) = \frac{1}{2i}(X - \overline{X})$. On a : $AU = \operatorname{Re}(\lambda X)$ et $AV = \operatorname{Im}(\lambda X)$. En posant $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a : $AU = \lambda_1 U - \lambda_2 V$ et $AV = \lambda_1 V + \lambda_2 U$. Ainsi, comme $U, V \in \mathbb{R}^n$, on a $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(U, V)$ qui est stable par A. Donc A admet un plan stable.

Solution 1 - Endomorphismes diagonalisables (☞ exercice)

1. $\lambda \in K$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$, on dit alors que x est un vecteur propre de u associé à λ. De manière équivalente, λ est une valeur propre de u si l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas inversible, et l'ensemble des vecteurs propres de u associés à λ est $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \setminus \{0\}$.

2. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. De manière équivalente, u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
3. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de u, et prenons $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs propres associés (x_i est associé à λ_i pour tout $1 \leq i \leq n$). Or, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre (pourquoi ?), donc la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E. Mais E est de dimension n, donc il s'agit d'une base de E. Donc on a trouvé une base de E formée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.
4. Non, l'identité est diagonalisable (car tout vecteur non nul est vecteur propre, donc toute base est une base de vecteurs propres de l'identité de E) mais elle n'a que 1 comme valeur propre. (de même pour la matrice nulle qui n'a que 0 comme valeur propre)

Solution 2 - Polynôme caractéristique (☛ exercice)

1. Le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, est le polynôme défini par :

$$\chi_u(X) = \det(X\mathrm{id}_E - u) \in K[X]$$

   Il est de degré n.
2. χ_u est unitaire donc son coefficient de degré n est 1. En utilisant la formule explicite du déterminant d'un endomorphisme dans une base (ou d'une matrice), on retrouve que le coefficient de χ_u de degré $n-1$ est $-\mathrm{Tr}(u)$, et que celui de degré 0 est $(-1)^n \det(u)$.
3. Oui, on a $\chi_{u_{|F}} | \chi_u$. Pour le voir, on peut se placer dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, on obtient une matrice triangulaire par blocs, dont le bloc en haut à gauche est celui représentant $u_{|F}$ dans la base de F choisie. Les règles sur le calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire par blocs nous donne alors la relation de divisibilité voulue. Cependant, à moins que G soit lui aussi stable par u, $u_{|G}$ n'a même pas de sens, donc on ne peut pas parler de son polynôme caractéristique.

Solution 3 - Stabilité des sous-espaces propres en cas de commutativité (☛ exercice)

1. Un espace propre de u est un sous-espace de E associé à une valeur propre λ de u, et défini par :
$$E_\lambda(u) := \ker(\lambda \mathrm{id}_E - u)$$

   Remarque : On pourrait parler de sous-espace propre de E associé à n'importe quel scalaire λ dans le corps de base, mais si λ n'est pas une valeur propre de u, alors $E_\lambda = \{0\}$.
2. Oui, par exemple sur $\mathbb{R}$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de valeurs propres (pourquoi ?), donc pas d'espaces propres. Par contre, sur $\mathbb{C}$ (ou de manière générale sur un corps algébriquement clos), tous les endomorphismes admettent des valeurs propres, donc des espaces propres.
3. Soit λ une valeur propre de u et $x \in E_\lambda(u)$. Montrons que $v(x) \in E_\lambda(u)$. Calculons :
$$\lambda v(x) - u(v(x)) = \lambda v(x) - v(u(x)) = \lambda v(x) - v(\lambda x) = \lambda v(x) - \lambda v(x) = 0$$

   Donc $v(x) \in E_\lambda(x)$, donc v stabilise les sous-espaces propres de u.

Solution 6 - (*) Forme linéaire valeur propre ? (☞ exercice)
Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont la seule coordonnée non nulle est un 1 en position (i, j). Si $i \neq j$, la seule valeur propre de $E_{i,j}$ est 0 (car $\chi_{E_{i,j}} = X^n$). Donc $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$. De plus, $\varphi(E_{i,i}) \in \{0, 1\}$, et $\varphi(I_n) = 1$, donc il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varphi(E_{i,i}) = 1$. Ainsi, $\varphi(M) = M_{i,i}$ par linéarité. Il suffit donc de trouver une matrice M telle que $M_{i,i}$ ne soit pas une valeur propre de M, on a beaucoup de choix, prenons par exemple M la matrice pleine de 1 (qui a pour valeurs propres uniquement 0 et n), ou bien la matrice compagnon d'un polynôme à coefficient constant non nul, ou encore une diagonale de matrices par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec éventuellement un 1 sur la diagonale hors position (i, i) si n est impair (les valeurs propres sont alors $\pm i$ et éventuellement 1).

Solution 7 - (**) Centre de $\mathcal{L}(E)$ (☞ exercice)
Soit u dans le centre de $\mathcal{L}(E)$. Alors par une propriété du cours (cf la question de cours 3), u stabilise tous les espaces propres de tous les endomorphismes de E. En particulier, u stabilise toutes les droites de E. En effet, soit $D = \mathrm{Vect}(x)$ une droite de E ($x \in E \setminus \{0\}$). On complète (x) en une base $(x, x_2, \ldots, x_n)$ de E (où $n = \dim(E)$), et on pose $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $v(x) = x$ et $v(x_i) = 0$ si $2 \leq i \leq n$. Ainsi définie, D est un sous-espace propre de v, donc est stabilisé par u.

Ainsi, u stabilise toutes les droites de E. En particulier, u est diagonalisable, car elle est diagonale dans une base de E (en fait, toutes). Montrons que $\sigma(u)$, le spectre de u, est de cardinal

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(u)$. Soient $x_1, x_2 \in E$ des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2. Comme u stabilise la droite $\mathrm{Vect}(x_1 + x_2)$, il existe $\lambda \in K$ (le corps de base) tel que

$$u(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$$

Mais

$$u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

Ainsi :

$$(\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2$ (en effet, si (x_1, x_2) est libre, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ par ce qui précède, et sinon, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ car deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts sont linéairement indépendants).

Ainsi, $\sigma(u)$ contient exactement un élément (il en contient au moins un car u stabilise une droite), et u est diagonalisable. Donc c'est une homothétie, car dans une base de diagonalisation (c'est-à-dire toutes les bases) $(e_1, \ldots, e_n)$, on a $u(e_i) = \lambda e_i$ où λ est la valeur propre de u.

Solution 8 - (**) Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (☛ exercice)

1. On a, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_C &= \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (X + a_{n-1})X^{n-1} + (-1)a_{n-2}(-1)X^{n-2} + a_{n-3}(-1)^2 X^{n-3} + \ldots \\
&\quad \cdots + (-1)^{n+2} a_1 (-1)^{n-2} X + (-1)^{n+1} a_0 (-1)^{n-1} \\
&= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0
\end{aligned}$$

   En particulier, $\det(C) = (-1)^n a_0$, donc C est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

2. De l'écriture matricielle de C, on en déduit que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est la base canonique de K^n (X_i est le vecteur nul partout sauf sa i-ème coordonnée qui vaut 1), alors $CX_i = X_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Par une récurrence immédiate, on a que $C^{i-1}X_1 = X_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Donc si $X = X_1$, alors $(X, CX, \ldots, C^{n-1}X)$ est une base de K^n, c'est en fait même la base canonique de K^n.

   Ainsi, $C^n X = CX_n = -a_0 X - a_1 CX - \cdots - a_{n-1}C^{n-1}X$.

3. On a :

$$P(C)(X) = a_0X + a_1CX + \cdots + a_{n-1}C^{n-1}X + C^nX = 0$$

par la question précédente. Pour montrer que $P(C)$ est la matrice nulle, on montre qu'elle s'annule sur une base de K^n. Soit $1 \leq i \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned} P(C)(C^iX) &= a_0C^iX + a_1CC^iX + \cdots + a_{n-1}C^{n-1}C^iX + C^nC^iX \\ &= C^i(a_0X) + C^i(a_1CX) + \cdots + C^i(a_{n-1}C^{n-1}X) + C^i(C^nX) \\ &= C^iP(C)(X) \\ &= C^i0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $P(C)$ vaut zéro sur une base de K^n, c'est donc la matrice nulle. Donc $P(C) = 0$.

Solution 9 - (**) Endomorphisme de dérivation (☞ exercice)

1. Oui (juste appliquer les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire)
2. Non : $D(0) = D(1) = 0$. D'ailleurs, son noyau est justement l'ensemble des fonctions constantes. Par contre, D est surjective, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ s'écrit $D(x \mapsto \int_0^x f(t)dt)$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, alors les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ vérifient $D(f) = \lambda f$. Ce sont donc des vecteurs propres de D, chacun associé à la valeur propre λ. Donc $\sigma(D) = \mathbb{C}$.
4. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts est libre, donc cette famille est libre. Ce n'est pas une base de E car l'identité $x \mapsto x$ n'est pas dans le vect de cette famille. En effet, si $f(x) = x$ est l'identité, on a $D(f) \neq 0$ et $D(D(f)) = 0$, mais toute combinaison linéaire non constante de fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ a toutes ses dérivées non nulles, et une combinaison linéaire constante de telles fonctions a pour dérivée nulle.
5. Non. D est toujours surjective non injective, mais elle n'admet qu'une seule valeur propre, zéro. En effet, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\deg(D(P)) \neq \deg(\lambda P)$, donc $D(P) \neq \lambda P$. Zéro est bien valeur propre car le noyau de D est l'ensemble des polynômes constants.

Solution 10 - (**) Crochet de Lie de matrices (☞ exercice)

1. Ce sont bien des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par linéarité de la multiplication matricielle. Comme $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ est un espace vectoriel, $ad(A) = L(A) - R(A)$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. C'est une récurrence immédiate.
3. C'est une conséquence directe de la question précédente. Si $A^k = 0$, alors $L(A)^k = L(A^k) = L(0) = 0$ (l'endomorphisme nul). Item pour $R(A)^k$. Pour $ad(A)$, on peut appliquer le binôme de Newton car $L(A)$ et $R(A)$ commutent, et donc $ad(A)^{2k} = 0$.
4. C'est $ad(A)$: $ad(A - \lambda I_n)(B) = (A - \lambda I_n)B - B(A - \lambda I_n) = AB - BA - \lambda I_n B + B\lambda I_n = AB - BA$
5. Si A n'a qu'une seule valeur propre λ, alors $A - \lambda I_n$ n'a que 0 comme valeur propre, et est donc nilpotente (par exemple car la seule racine de son polynôme caractéristique est 0 donc X^n annule $A - \lambda I_n$). Par ce qui précède, $ad(A - \lambda I_n)$ est nilpotente, et donc $ad(A)$ aussi car ce sont les mêmes objets.
6. Si A est diagonale, $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors un calcul montre que $ad(A)(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ainsi, A est diagonale car les $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A est diagonalisable, on considère pour tout $P \in GL_n(\mathbb{C})$ l'application $C(P) : B \mapsto PBP^{-1}$. Soit P inversible telle que $PAP^{-1} = D$ est une matrice diagonale. On montre que $C(P)ad(A)C(P)^{-1} = ad(D)$ qui est diagonale par ce qui précède, donc $ad(A)$ est diagonalisable.

Solution 11 - (**) Diagonale de a sur un parterre de b (☛ exercice)

1. On remarque que les vecteurs :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de $A_n(a, a)$ associés à la valeur propre 0. De plus, ils forment une famille libre de K^n. Donc $\dim(E_0(A_n(a, a))) \geq n - 1$. Or, on remarque également que le vecteur $X_1 = {}^t(1, \ldots, 1)$ est vecteur propre de $A_n(a, a)$ pour la valeur propre na. Donc $\dim(E_{na}(A_n(a, a))) \geq 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de $A_n(a, a)$ est au plus $n = \dim(K^n)$, alors 0 et na sont les seules valeurs propres de $A_n(a, a)$ et on a égalité : $\dim(E_0(A_n(a, a))) = n - 1$ et $\dim(E_{na}(A_n(a, a))) = 1$.

Remarque : Ici, j'utilise beaucoup de « on remarque que », mais il faut voir que c'est effectivement le cas : multiplier à droite par un vecteur colonne revient à effectuer la combinaison linéaire des colonnes de la matrice associée aux coefficients du vecteur. Ainsi, on voit aisément que sommer toutes les colonnes, c'est-à-dire multiplier la matrice par ${}^t(1,\ldots,1)$*, renvoie un vecteur proportionnel à* ${}^t(1,\ldots,1)$ *par exemple.*

2. La dimension algébrique d'une valeur propre étant supérieure à sa dimension géométrique, on a $X^{n-1}(X-na)|\chi_{A_n(a,a)}$. Or, $\chi_{A_n(a,a)}$ est un polynôme unitaire de degré n, de même pour $X^{n-1}(X-na)$. Donc on a égalité : $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X-na)$.

   Ainsi, la dimension algébrique et la dimension géométrique des valeurs propres de $A_n(a,a)$ coïncident, donc $A_n(a,a)$ est diagonalisable, semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(na,0,\ldots,0)$ dans la base $(X_1,\ldots,X_n)$. Ainsi, on a $PA_n(a,a)P^{-1} = D$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

   Pour obtenir P^{-1}, on peut par exemple écrire les vecteurs de la base canonique dans la base $(X_1,\ldots,X_n)$ (ce n'est pas difficile).

3. On a $A_n(a,b) = (a-b)I_n + A_n(b,b)$. Ainsi, λ est valeur propre de $A_n(b,b)$ si et seulement si $a-b+\lambda$ est valeur propre de $A_n(a,b)$.

   Remarque : Attention, c'est faux dans le cas général, les valeurs propres d'une somme de matrice n'est pas la somme des valeurs propres de ces matrices ! Ici, c'est vrai parce qu'on travaille avec une homothétie. De plus, les espaces propres sont les mêmes, plus précisément : $E_0(A_n(b,b))) = E_{a-b}(A_n(a,b))$ et $E_{nb}(A_n(b,b)) = E_{a+(n-1)b}(A_n(a,b))$. Donc $\chi_{A_n(a,b)} = (X-(a-b))^{n-1}(X-(a+(n-1)b))$.

   Enfin, $A_n(a,b)$ est inversible si et seulement si $\chi_{A_n(a,b)}(0) \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.

4. Ainsi, les multiplicités algébriques et géométriques des valeurs propres de $A_n(a,b)$ coïncident, donc $A_n(a,b)$ est diagonalisable. En fait, la même matrice P diagonalise $A_n(a,b)$, car elle commute avec $(a-b)I_n$. On a donc :

$$PA_n(a,b)P^{-1} = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, \ldots, a-b)$$

   En particulier, si $k \in \mathbb{N}^*$, et en notant $\lambda_1 = a+(n-1)b$ et $\lambda_2 = a-b$, on a :

$$A_n(a,b)^k = P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_2^k)P = \cdots = \frac{1}{n}A_n(\lambda_1^k + (n-1)\lambda_2^k,\ \lambda_1^k - \lambda_2^k)$$