Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

20 Octobre 2022

Suites dans un espace vectoriel normé
Révisions d'analyse

Table des matières

Questions de cours

Remarque : Ces questions de cours sont volontairement un peu plus longues que d'habitude, car il n'y a pas d'exercices sur ce chapitre

Exercice 1 - Normes sur $\mathbb{K}^n$ (solution)

1. Rappelez la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), puis définissez $|| \cdot ||_1$, $|| \cdot ||_2$ et $|| \cdot ||_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
2. Que veut dire que deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes ? Montrez que $|| \cdot ||_1$ et $|| \cdot ||_\infty$ sont équivalentes.
3. Démontrez que $|| \cdot ||_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Exercice 2 - Boules et parties convexes (solution)

1. Rappelez la définition d'une partie convexe de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soit N une norme sur E, montrez que la boule unité de N est une partie convexe de E. Une boule quelconque de E (pour la norme N) est-elle toujours convexe ?
3. Représentez la boule unité des normes $|| \cdot ||_1$, $|| \cdot ||_2$ et $|| \cdot ||_\infty$ de $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction $N((x, y, z)) = \max(\sqrt{x^2 + y^2}, |z|)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ est-elle une norme ? Représentez sa boule unité.

Exercice 3 - Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ (solution)

1. Définissez les normes $|| \cdot ||_1$, $|| \cdot ||_2$ et $|| \cdot ||_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ (sans démontrer que ce sont des normes). Pourquoi sont-elles bien définies et séparantes ?
2. Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercices

Exercice 4 - (*) $e^{a_n} + e^{b_n}$ converge (solution ☞)
Soient $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et que $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que dire des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$?

Exercice 5 - (**) Valeurs d'adhérence (solution ☞)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Montrez que si $(u_n)_n$ est bornée, alors elle admet une valeur d'adhérence. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrez que si $(u_n)_n$ est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.
3. Donnez un exemple de suite qui n'a pas de valeurs d'adhérence, une valeur d'adhérence, deux valeurs d'adhérence, et $[0, 1]$ pour valeurs d'adhérence

---

Exercice 6 - (**) Suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (solution ☞)
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ converge, et en donner un équivalent.

<u>Indication :</u> Si $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver un équivalent de $u_n^\alpha - u_0^\alpha = \sum_{i=0}^{n-1}(u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)$, puis utilisez le théorème de CESARO *pour un α bien choisi.*

Exercice 7 - (**) Une suite récurrente non linéaire (solution ☞)
Soient $u_0, u_1, \lambda > 0$. On définit pour tout $n \geq 2$, $u_{n+2} = \lambda\sqrt{u_n u_{n+1}}$. Le but de l'exercice est de donner une formule explicite pour u_n, $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez la bonne définition de la suite $(u_n)_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(v_n)_n$?
2. Trouvez une solution particulière à l'équation vérifiée par la suite $(v_n)_n$ de la forme $w_n = \alpha n$.
3. On pose $x_n = v_n - w_n$. Montrez que $(x_n)_n$ vérifie une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2. En déduire une expression explicite de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra garder deux inconnues)
4. En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (sans inconnue)

Exercice 8 - (**) Suite $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ (solution ☞)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$u_1 = 1; \qquad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq 2\sqrt{n}$, puis en déduire que $u_n \sim \sqrt{n}$
2. Calculez les trois premiers termes du développement asymptotique de $(u_n)_n$ en l'infini

---

Exercice 9 - (**) Méthode de Newton (solution ☞)

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $f' > 0$ et que $f(c) < 0 < f(d)$. Soit $x_0 \in [c,d]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{où} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. Montrez que f a un unique zéro dans $[c,d]$, qu'on note a. Puis montrez que pour tout $x \in [c,d]$, il existe z entre a et x tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c,d]$: $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$. Puis montrez qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F. Enfin, montrez que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_n$ converge vers a et a une vitesse de convergence d'ordre 2.
3. Application : Retrouvez la méthode de Héron (aussi connue sur le nom de méthode babylonienne) du calcul de racines carrées : Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + a/u_n}{2}$ converge vers $\sqrt{a}$ à une vitesse d'ordre 2. En calculant les 3 premiers termes de cette suite pour $a = 3$, calculez une approximation de $\sqrt{3}$ à 4 chiffres (pour information, $\sqrt{3} \simeq 1.73205$)

Exercice 10 - (**) Intégrales de Wallis et formule de Stirling (solution ☞)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est bien définie et calculez W_0 et W_1.
2. Montrez que pour tout $n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}$$

4. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$$

   et en déduire que

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

   puis la formule de Wallis :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$$

5. En déduire que

$$W_{2n} \sim W_{2n+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

   puis que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
6. On admet qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $n! \sim (n/e)^n \sqrt{n} k$. En utilisant la formule de Wallis, calculez k.

Exercice 11 - (***) Théorème de réarrangement de Riemann (solution ☞)

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente telle que $u_n \to 0$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite de signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.
   Indication : (Orale) Faire un dessin !
2. (Théorème de réarrangement de Riemann) Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = a$.

   Indication : On pourra partitionner $\mathbb{N}$ en trois ensembles, celui des indices où u_n est strictement négatif, nul, strictement positif respectivement. L'idée de la preuve est très similaire à celle de la question précédente.

Solutions des exercices

Solution 1 - Normes sur $\mathbb{K}^n$ (☞ exercice)

1. Une norme N sur un espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie :
   - Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
   - Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

   Sur $\mathbb{K}^n$, on définit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:
   - $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
   - $||x||_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
   - $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
2. On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes s'il existe deux constantes strictement positives c et C telles que :

   $$\forall x \in E, \quad cN_2(x) \leq N_1(x) \leq CN_2(x)$$

   Sur $\mathbb{K}^n$, on a :

   $$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

   Donc $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$, donc ces normes sont bien équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.
3. La séparation et l'homogénéité sont claires, le point délicat est de prouver l'inégalité triangulaire. Il y a plusieurs façons de faire, selon ce qui a été vu ou non sur les fonctions convexes. Faisons sans :

   Tout d'abord, nous voulons montrer que $||x+y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$. En passant aux carrés, et en développant, on obtient :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} ||x+y||_2^2 & = & \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \\ (||x||_2 + ||y||_2)^2 & = & \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2||x||_2||y||_2 \end{array} \right.$$

   Ainsi, il suffit de montrer que :

   $$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq ||x||_2||y||_2$$

   Soit on connait déjà (la preuve de) l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on conclut directement, soit on la redémontre dans ce cas particulier, grâce au fait suivant à connaître :

$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (parce que $(a-b)^2 \geq 0$). Posons pour tout $1 \leq i \leq n$, $\widetilde{x_i} = \dfrac{x_i}{||x||_2}$ et $\widetilde{y_i} = \dfrac{y_i}{||y||_2}$. On veut alors montrer que $\sum_{i=1}^n |\widetilde{x_i}||\widetilde{y_i}| \leq 1$. Or, par l'inégalité précédente, on a :

$$\sum_{i=1}^n |\widetilde{x_i}||\widetilde{y_i}| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{|x_i|^2}{||x||_2^2}\frac{|y_i|^2}{||y||_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}{||x||_2^2}\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}{||y||_2^2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

D'où l'inégalité triangulaire.

Solution 2 - Boules et parties convexes (☛ exercice)

1. Une partie $C \subset E$ est convexe si pour tout $x, y \in C$, le segment $[x, y]$ est inclus dans C. Autrement dit, pour tout $t \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
2. Soit $B = N^{-1}([0,1])$ la boule unité de N. Soient $x, y \in B$, et soit $\lambda \in [0,1]$. Alors $N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq N(\lambda x) + N((1-\lambda)y)$ par inégalité triangulaire, puis par homogénéité on a ($\lambda, 1-\lambda \geq 0$) :

$$N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y) \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

   car $N(x), N(y) \leq 1$ car $x, y \in B$. Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in B$, donc B est convexe. De manière générale, une boule quelconque de E est convexe. Il s'agit du même argument, en remplaçant x et y par $x - c$ et $y - c$ (où c est le centre de la boule), puis $N(x), N(y) \leq 1$ par $N(x - c), N(y-c) \leq r$, où r est le rayon de la boule.
3. La boule unité de la norme 1 est le carré de sommets $(0,1), (-1,0), (0,-1), (1,0)$, la boule unité de la norme est le disque unité, la boule unité de la norme infinie est le carré de sommets $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ (bien-sûr, faites un dessin au tableau pour répondre à cette question)
4. On peut vérifier les axiomes d'une norme (c'est facile dans ce cas), ou bien remarquer qu'il s'agit d'une norme produit des espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}_2, ||\cdot||_2)$ et $(\mathbb{R}, ||\cdot||_1)$ (ou la norme 2, ou infinie), qui est donc une norme. Sa boule unité est le cylindre de centre 0, de rayon 1, d'axe selon l'axe des z et de hauteur 1 (faire un dessin lors de la colle, c'est beaucoup plus clair !)

Solution 3 - Normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ (☞ exercice)

1. Soit $f \in E$. On définit :
   - $||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt$
   - $||f||_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$
   - $||f||_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$

   Elles sont bien définies car $|f|$ et $|f|^2$ sont continues sur $[a,b]$, donc intégrables et bornées. En fait, comme $[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, $|f|$ atteint ses bornes donc on peut remplacer le sup par un max dans la définition de la norme infinie.

   Elles sont bien séparantes car une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle.

2. Non, aucune n'est équivalente à une autre. Pour simplifier les notations, on suppose que $a = 0$ et $b = 1$:
   - $||\cdot||_1$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_2$. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = n(1-nt)$, la fonction affine par morceaux qui vaut n en 0, 0 en $1/n$ et nulle sur $[1/n, 1]$. Alors on a :
   $$\begin{cases} ||f_n||_1 & = & \displaystyle\int_0^1 n(1-nt)dt = n\left[\frac{(1-nt)^2}{-2n}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ ||f_n||_2^2 & = & \displaystyle\int_0^1 n^2(1-nt)^2 dt = n^2\left[\frac{(1-nt)^3}{-3n}\right]_0^1 = \frac{n}{3} \end{cases}$$
   Donc la suite $(||f_n||_1)_n$ est bornée mais la suite $(||f_n||_2)_n$ ne l'est pas, donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.
   - $||\cdot||_1$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_\infty$. Le même contre-exemple que précédemment fonctionne, car $||f_n||_\infty = n$ donc la suite $(||f_n||_\infty)_b$ n'est pas bornée.
   - $||\cdot||_2$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_\infty$. On peut prendre la suite de fonction g_n définie par $g_n(t) = \sqrt{f_n(t)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $||g_n||_\infty = \sqrt{n}$ et $||g_n||_2^2 = ||f_n||_1 = 1/2$, donc ces normes ne sont pas équivalentes.

Solution 4 - (*) $e^{a_n} + e^{b_n}$ converge (☞ exercice)

Supposons dans un premier temps que la suite $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, et soit a une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$. Comme $a_n + b_n \to 0$, alors $-a$ est valeur d'adhérence de $(b_n)_n$. En particulier, on a par continuité de l'exponentielle et de la somme, $e^a + e^{-a} = 2$, ce qui signifie que $ch(a) = 1$, donc $a = 0$. Ainsi, si $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, celle-ci est unique et c'est 0.

Montrons maintenant que $(a_n)_n$ admet une valeur d'adhérence. Il suffit de montrer que la suite $(a_n)_n$ est bornée, ce qui par symétrie avec $(b_n)_n$ revient à montrer que la suite $(a_n)_n$ est majorée (car $(a_n+b_n)_n$ est bornée). Comme $e^{a_n}+e^{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, il existe un rang N à partir duquel $3 \geq e^{a_n}+e^{b_n} \geq e^{a_n} \geq 0$. Donc la suite $(e^{a_n})_n$ est majorée, donc $(a_n)_n$ aussi car $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, la suite $(a_n)_n$ est bornée, donc possède une valeur d'adhérence. De plus, celle-ci est unique et vaut 0, donc $a_n \to 0$. De même, $b_n \to 0$.

Solution 5 - (**) Valeurs d'adhérence (☞ exercice)

1. On procède par dichotomie. On suppose que $(u_n)_n$ est à valeurs dans $[A_0, B_0]$. Comme il y a une infinité de termes, au moins l'un des deux intervalles $[A_0, M_0]$, $[M_0, B_0]$ (où $M_0 = \frac{A_0+B_0}{2}$) contient une infinité de termes de $(u_n)_n$. On note $[A_1, B_1]$ un tel intervalle, et on recommence : l'un des intervalles $[A_1, M_1]$ et $[M_1, B_1]$ contient une infinité de termes de la suite, on le choisit et on le renomme $[A_2, B_2]$. On construit alors par récurrence une suite d'intervalles emboités $[A_n, B_n]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a une infinité de termes de $(u_n)_n$ dans $[A_n, B_n]$. Mais par définition, la longueur de $[A_n, B_n]$ est $\dfrac{B_0 - A_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Notons A le point limite. Par construction, pour tout $\varepsilon > 0$, il y a une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$ dans $[A-\varepsilon, A+\varepsilon]$. C'est donc une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

   La réciproque est bien-sûr fausse, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 2n+1$ admet 0 pour valeur d'adhérence, mais n'est pas bornée.

2. Notons I un intervalle borné sur lequel $(u_n)_n$ prend toutes ses valeurs. Soit a l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_n$. Si $(u_n)_n$ ne converge pas vers a, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'une infinité de termes de la suite se trouve dans $I \setminus [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Mais alors, par la question précédente, la suite extraite des termes dans $I \setminus [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence différente de a. C'est encore une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, ce qui est absurde. Donc $(u_n)_n$ converge vers a.

3. La suite définie par $u_n = n$ n'a pas de valeurs d'adhérence, toute suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence (par exemple la suite nulle), la suite $((-1)^n)_n$ a exactement deux valeurs d'adhérence. Construisons une suite donc l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$. On pose $u_0 = 0$, puis :

   $$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1, \quad u_n = \frac{n}{2^k} - 1$$

   Remarque : Faire un dessin au tableau serait une très bonne idée pour expliquer clairement ce qu'on fait

   Pour voir que l'ensemble des valeurs d'adhérence est bien $[0, 1]$, on utilise la densité des nombres dyadiques. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1]$, alors il existe $m, l \in \mathbb{N}$ tels que $|m2^{-l} - x| < \varepsilon$

et $m < 2^l$.

Posons alors, si $k \geq l$, $\varphi(k) =$ « l'unique $2^k \leq n < 2^{k+1}$ tel que $\dfrac{n-2^k}{2^k} = \dfrac{m}{2^l}$ ». Plus formellement, $\varphi(k) = m2^{k-l} + 2^k$. Il s'agit d'une suite strictement croissante de $[\![l, +\infty[\![$ dans $\mathbb{N}$, qui vérifie :

$$\forall k \geq l, \quad u_{\varphi(k)} = \frac{m}{2^l}$$

Donc il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - x| \leq \varepsilon$, donc x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

Solution 6 - (**) Suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (☛ exercice)

Quitte à commencer à u_1, on peut supposer sans perdre de généralité que $u_0 \in [-1, 1]$. Distinguons trois cas :

- Si $u_0 = 0$, alors la suite stationne à 0, donc converge vers 0 (on n'a pas d'équivalent dans ce cas)
- Si $u_0 > 0$, alors on a $0 < u_0 \leq 1 < \pi/2$, donc $0 < \sin(u_0) \leq u_0$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Notons $u \in [0, 1]$ sa limite. Par continuité de la fonction sinus et par unicité de la limite, on a $u = \sin(u)$. Or, le seul point fixe de la fonction sinus dans $[0, 1]$ est 0, donc $u = 0$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.
- Si $u_0 < 0$, par le même argument que précédemment en utilisant le fait que $-\pi/2 < -1 \leq u_0 < 0$ cette fois-ci, on obtient que $(u_n)_n$ est croissante est majorée par 0, donc elle converge, sa limite est encore un point fixe du sinus sur $[-1, 0]$ qui est donc 0.

Ainsi, dans tous les cas, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0. Donnons un équivalent si $u_0 \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^\alpha = u_0^\alpha + \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha)$$

Or, si $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{i+1}^\alpha - u_i^\alpha &= \sin(u_i)^\alpha - u_i^\alpha \\
&= \left(u_i - \frac{u_i^3}{6} + o(u_i^3)\right)^\alpha - u_i^\alpha \\
&= u_i^\alpha \left(1 - \frac{u_i^2}{6} + o(u_i^2)\right)^\alpha - u_i^\alpha \\
&= u_i^\alpha \left(\left(1 - \alpha\frac{u_i^2}{6} + o(u_i^2)\right) - 1\right) \\
&= -\alpha\frac{u_i^{2+\alpha}}{6} + o(u_i^{2+\alpha})
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\alpha = -2$, on a :

$$u_{i+1}^{\alpha} - u_i^{\alpha} = \frac{1}{3} + o(1)$$

Par le théorème de Cesaro, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}^{\alpha} - u_i^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

De sorte que :

$$\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}^{\alpha} - u_i^{\alpha} \sim \frac{n}{3}$$

Finalement, comme u_0^{α} est une constante, donc un $o(n)$, on a :

$$u_n^{-2} \sim \frac{n}{3} \quad \text{donc} \quad u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

Solution 7 - (**) Une suite récurrente non linéaire (☞ exercice)

1. Par une récurrence immédiate, on montre que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on peut considérer $v_n = \ln(u_n)$. En passant au logarithme dans la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_n$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n + \ln(\lambda)$$

2. On injecte $w_n = \alpha n$ dans l'équation précédente :

$$\alpha(n+2) = \frac{\alpha}{2}(n+1) + \frac{\alpha}{2}n + \ln(\lambda) = \alpha\left(n + \frac{1}{2}\right) + \ln(\lambda)$$

   Donc $\alpha = \frac{2}{3}\ln(\lambda)$. La suite $w_n = \left(\frac{2}{3}\ln(\lambda)\right)n$ vérifie donc la relation de récurrence vérifiée par (v_n), c'est donc bien une solution particulière.

3. On a alors que la suite $(x_n)_n = (v_n - w_n)_n$ vérifie : $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n$, qui est une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2. L'équation caractéristique correspondante est : $r^2 - r/2 - 1/2 = 0$, de solution $r = -1/2$ et $r = 1$. Ainsi, il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b$.

4. Ainsi, $v_n = x_n + w_n = a + \left(-\frac{1}{2}\right)^n b + \frac{2}{3}\ln(\lambda)n$. Donc :

$$u_n = e^a e^{b(-1/2)^n} \lambda^{2n/3} = AB^{(-1/2)^n} \lambda^{2n/3}$$

où $A = e^a$ et $B = e^b$. Déterminons A et B en fonction de u_0 et u_1 : on a $u_0 = AB$ et $u_1 = \frac{A}{\sqrt{B}}\lambda^{2/3}$. Donc $u_0 u_1^2 = A^3\lambda^2$ donc $A = u_0^{1/3} u_1^{2/3} \lambda^{-4/9}$ et $B = u_0^{2/3} u_1^{-2/3} \lambda^{4/9}$.
Finalement, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(u_0^{1/3} u_1^{2/3} \lambda^{-4/9}\right) \left(\frac{u_0 \lambda^{2/3}}{u_1}\right)^{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \lambda^{2n/3}$$

Solution 8 - (**) Suite $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$ (☞ exercice)

1. On le fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$, on a $u_1 = 1 \leq 2$. Supposons maintenant $n \geq 1$ et le résultat vrai au rang n. On a alors :

$$u_{n+1}^2 = n + 1 + u_n \leq n + 1 + 2\sqrt{n} \leq (n+1) + (n+1) + 2(n+1) = 4(n+1)$$

Donc $u_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$.
Ainsi, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}} \leq \sqrt{n}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

Par encadrement, on a que $u_n \sim \sqrt{n}$.

2. La question précédente nous donne déjà le premier terme : $u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$. Injectons ceci dans la formule définissant u_n :

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{n + \sqrt{n-1} + o(\sqrt{n})} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

Ainsi, en utilisant la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$ en zéro :

$$u_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}_{1+o(1)} + o(1) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$$

Pour obtenir le troisième terme, on recommence :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n+u_{n-1}} \\
&= \sqrt{n+\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}+o(1)} \\
&= \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}+\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{\frac{n-1}{n}}}_{1+o(1/\sqrt{n})}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sqrt{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Solution 9 - (**) Méthode de Newton (☞ exercice)

1. Comme f est strictement croissante sur $[c,d]$ et que $f(c)<0<f(d)$, la théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence et l'unicité d'un zéro de f dans $[c,d]$, qu'on note a. Si $x\in[c,d]$, on applique la formule de Taylor-Lagrange : Il existe z entre a et x tel que

$$0=f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{1}{2}f''(z)(a-x)^2$$

   Donc :

$$F(x)-a=(x-a)-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{-(a-x)f'(x)-f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$

2. Comme $f'>0$ sur $[c,d]$ et que f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la fonction f''/f' est continue donc bornée sur $[c,d]$. En particulier, il existe $C>0$ tel que $||f''/f'||_\infty\leq C$, et alors $|F(x)-a|\leq C|x-a|^2$ pour tout $x\in[c,d]$

   Soit $\alpha>0$ tel que $a\pm\alpha\in[c,d]$. On a : $|F(a+\alpha)-a|\leq C\alpha^2$. Ainsi, si $\alpha<C^{-1}$, alors I est stable par F.

   Dans ce cas, la suite $(x_n)_n$ est bien définie (si $x_0\in I$), et on a $|x_{n+1}-a|=|F(x_n)-a|\leq C|x_n-a|^2$. On pose $v_n=C|x_n-a|$, on a alors $v_{n+1}\leq v_n^2$, donc par une récurrence immédiate,

$v_n \leq v_0^{2^n}$, c'est-à-dire $|u_n - a| \leq C^{-1}(C|x_0 - a|)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $C\alpha < 1$, et la convergence est donc d'ordre 2.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, sur l'intervalle $[0, a]$. Elle vérifie les hypothèses de la méthode de Newton et son unique zéro sur $[0, a]$ est $\sqrt{a}$. Donc la méthode de Newton appliquée à cette fonction donnera une suite (x_n) qui convergera vers $\sqrt{a}$ à la vitesse de convergence d'ordre 2. Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

On retrouve la méthode de Héron.

Si $a = 3$ et $x_0 = 1$, les premiers termes de la suite sont :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= \frac{1 + 3/1}{2} = 2 \\
x_2 &= \frac{2 + 3/2}{2} = \frac{7}{4} = 1.75 \\
x_3 &= \frac{\frac{7}{4} + 3\frac{4}{7}}{2} = \frac{97}{56} \simeq 1.7321
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{3} \simeq 1.73205$, on a bien trouvé une approximation de $\sqrt{3}$ à 4 chiffres.

Solution 10 - (**) Intégrales de Wallis et formule de Stirling (☞ exercice)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc W_n est bien définie. On a $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$

2. On fait une IPP :

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\sin(t)dt \\
&= \left[-\sin^{n-1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)dt \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)(1 - \sin^2(t))dt \\
&= (n-1)(W_{n-2} - W_n)
\end{aligned}$$

Donc $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$

3. Récurrence sur n (à savoir rédiger correctement, la présentation suivante peut passer le jour de l'oral mais à condition que vous sachiez parfaitement la faire proprement si on vous le demande.)

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} W_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \frac{\pi}{2}$$

De même pour W_{2n+1}.

4. Si $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$. En fait, toutes ces quantités sont strictement positives (car ni la fonction sinus, ni ses puissances, ne sont identiquement nulles sur $[0, \pi/2]$), on peut donc diviser par W_{2n+1} :

$$1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

(la dernière égalité vient de l'expression de W_{2n+1} qu'on a obtenue précédemment.) Par encadrement, on obtient que :

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

puis la formule de Wallis en écrivant l'expression de chaque terme qu'on a obtenue précédemment :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1} \right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$$

5. La formule de Wallis donne que :

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Le membre de gauche est égal à $\frac{2}{\pi} W_{2n}$, donc $W_{2n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Comme le quotient W_{2n}/W_{2n+1} tend vers 1, alors $W_{2n+1} \sim W_{2n}$.
En particulier, $W_{2n} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n)}}$ et $W_{2n+1} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}}$, donc $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

6. La formule de Wallis nous donne que :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$$

Or, on a :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}((n/e)^n \sqrt{n} k)^2}{(2n/e)^{2n} \sqrt{2n} k} \right)^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{\sqrt{n} k}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k^2}{2}$$

Donc $k^2 = 2\pi$, c'est-à-dire $k = \sqrt{2\pi}$. Ainsi, on a la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Solution 11 - (***) Théorème de réarrangement de Riemann (☞ exercice)

1. Comme la série de terme général u_n diverge, alors il existe un entier minimal N_0 tel que $A_0 := \sum_{n=0}^{N_0} u_n > a$ (N_0 peut être nul si $a < 0$). On pose alors $\varepsilon_0 = \cdots = \varepsilon_{N_0} = 1$. De même, il existe un entier $N_1 > N_0$ minimal tel que $A_1 := A_0 - \sum_{n=N_0+1}^{N_1} u_n < a$. On pose alors $\varepsilon_{N_0+1} = \cdots = \varepsilon_{N_1} = -1$. On continue ainsi, ce qui construit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons maintenant que la série $\sum \varepsilon_n u_n$ converge vers a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $S_n - a \to 0$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k$ est la somme partielle d'ordre n. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_k <= n < N_{k+1}$. Pour simplifier les notations, on suppose que k est impair (de sorte à avoir $\varepsilon_i = 1$ si $N_k + 1 \leq i \leq N_{k+1}$), la preuve pour le cas pair se fait de la même manière. En particulier, on a $|S_n - a| \leq \max(|S_{N_k} - a|, |S_{N_{k+1}} - a|) = \max(a - S_{N_k}, S_{N_{k+1}} - a)$. Or, par construction, $S_{N_k} < a < S_{N_k-1}$ et $S_{N_{k+1}} > a > S_{N_{k+1}-1}$. Ainsi, $a - S_{N_k} < S_{N_k-1} - S_{N_k} = u_{N_k}$ et $S_{N_{k+1}} - a < S_{N_{k+1}} - S_{N_{k+1}-1} = u_{N_{k+1}}$. Finalement, $|S_n - a| \leq \max(u_{N_k}, u_{N_{k+1}}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. (Pour rappel, et pour éviter d'alourdir les notations, k dépend de n et $k(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais on note tout de même seulement k au lieu de $k(n)$).
   Remarque : Pour le lecteur : FAIRE UN DESSIN. La preuve ici semble longue, difficile et abstraite. Un dessin est très clair, tracer une droite horizontale d'ordonnée a, puis montez jusqu'à dépasser a, puis descendez jusqu'à dépasser a, etc...

2. On partitionne $\mathbb{N}$ en trois ensembles P, Z, N :

$$\begin{aligned} P &= \{n \in \mathbb{N} \,;\, u_n > 0\} \\ Z &= \{n \in \mathbb{N} \,;\, u_n = 0\} \\ N &= \{n \in \mathbb{N} \,;\, u_n < 0\} \end{aligned}$$

   On suppose dans un premier temps que Z est vide pour simplifier les idées. On construit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ de la manière suivante, très similaire à la construction de la première question. On pose $n_P = n_N = 0$.

   - Initialement, si a est positif (ou nul), on incrémente n_P et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_P-ème élément (par ordre croissant) de P (dans ce cas, c'est le premier élément de P). Si a est strictement négatif, on incrémente n_N et on pose $\sigma(0)$ la valeur du n_N-ème élément de N (dans ce cas, c'est le premier élément de N)

- Supposons $\sigma(0), \dots, \sigma(m)$ définis pour $m \in \mathbb{N}$. On définit $\sigma(m+1)$ de la manière suivante : Si $\sum_{n=0}^{m} u_{\sigma(n)} \geq a$, on incrémente n_P et on pose $\sigma(m)$ comme étant le n_P-ème élément de P. sinon, on incrémente n_N et on pose $\sigma(m)$ comme étant le n_N-ème élément de N.

Pour avoir une permutation de $\mathbb{N}$, il faut s'assurer de la bijectivité. L'injectivité est claire (on associe à chaque m un élément différent de P ou de N, qui sont disjoints), reste à voir la surjectivité. Par construction, si σ n'est pas surjective, c'est qu'elle prend qu'un nombre fini de valeurs dans P ou dans N, disons N (l'argument sera le même si c'est P). Cela signifie que la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n \in P\}} u_n)_n$ converge. Or, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est semi-convergente, donc convergente. Donc la série différence qui est la série de terme général $(\mathbf{1}_{\{n \in N\}} u_n)_n$ aussi. Mais alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est convergente comme somme de deux séries convergentes. Ce qui est absurde. Ainsi, σ atteint tous les éléments de P et de N, donc est surjective car il s'agit d'une partition de $\mathbb{N}$. Il reste enfin à voir que la série $\sum_n u_{\sigma(n)}$ converge bien, il s'agit du même argument que dans la question précédente (la série $\sum_n u_n$ étant semi-convergente, elle est convergente, donc le terme général u_n tend vers 0).

Enfin, il reste à traiter le cas où Z n'est pas vide. Ce qu'on fait est qu'on ajoute entre chaque étape un élément de Z, tant qu'il en reste. On introduit dans la construction de σ un troisième compteur n_Z, et si m est pair, on fait comme précédemment, et si m est impair, on incrémente n_Z puis on définit $\sigma(m)$ comme étant le n_Z-ème élément de Z.