Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

10 Novembre 2022

Suites dans un espace vectoriel normé

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Normes sur $\mathbb{K}^n$ (solution ☜)
Définissez les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Justifiez que ce sont des normes et comparez-les.

Exercice 2 - Théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie (solution ☜)
Énoncez et démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. (sans l'admettre sur $\mathbb{K}$)

Exercice 3 - Normes sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ (solution ☜)
Définissez les normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$). Justifiez que ce sont des normes et comparez-les.

Exercice 4 - Intérieur, adhérence (solution ☜)
Rappelez la définition de l'intérieur et de l'adhérence d'une partie A d'un espace vectoriel normé E. Montrez que l'intérieur de A est le plus grand ouvert de E contenu dans A et que l'adhérence de A est le plus petit fermé de E contenant A.

Exercices

Exercice 5 - (*) Continuité et fermé (solution ☜)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez que f est continue si et seulement si le graphe de f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que $\{(x, f(x))\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrez que l'intérieur du graphe de f est nécessairement vide.
3. Quelle est l'adhérence du graphe de $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$? Et du graphe de $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par 0 en 0 ?

Exercice 6 - (*) Normes sur $\mathbb{K}[X]$ (solution ☜)

1. Trouvez une norme N sur $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite $(X^n)_n$ tende vers zéro.

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Trouvez une norme N_P sur $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P.
   <u>*Indication :*</u> *Considérer la base* $(1, X, \dots, X^{\deg(P)}, X^{\deg(P)+1} - P, \dots)$

Exercice 7 - (**) Intérieur et adhérence dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ (solution)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} N : & E & \longrightarrow & RR_+ \\ & f & \mapsto & ||f||_\infty + ||f'||_\infty \end{array}$$

1. Montrez que N est une norme sur E
2. Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour cette norme, quels sont l'adhérence et l'intérieur des fonctions polynômiales de degré au plus d ?
3. Pour cette norme, quels sont l'adhérence et l'intérieur des fonctions polynômiales ?
   <u>*Indication :*</u> *On pourra utiliser le théorème d'approximation de* Weierstrass

---

Exercice 8 - (**) Densité des matrices diagonalisables (solution)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrez que l'application :

$$\begin{array}{rccc} ||\cdot||_2 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i_j}|^2} \end{array}$$

   est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. Montrez que $||\cdot||_2$ est sous-multiplicative, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $||AB||_2 \leq ||A||_2 \, ||B||_2$
   <u>*Indication :*</u> *On pourra utiliser l'inégalité de* Cauchy-Schwarz *:* $\sum a_n b_n \leq \sqrt{\sum |a_n|^2}\sqrt{\sum |b_n|^2}$
   Remarque : On dit alors que $||\cdot||_2$ *est une norme d'algèbre sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. Montrez que M est trigonalisable et que toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe une suite de matrices $(M_k)_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ diagonalisables telles que $||M_k - M||_2 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   <u>*Indication :*</u> *On pourra montrer que si* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$*, alors à partir d'un certain rang, les n-uplets* $(\frac{1}{k} + \lambda_1, \dots, \frac{n}{k} + \lambda_n)$ *ont des termes deux à deux distincts*

Exercice 9 - (**) Une norme subordonnée (solution ☜)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose : $N(A) = \sup_{x \in K^n \setminus \{0\}} \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}$

1. Montrez que $N(A)$ est bien définie.
2. Montrez que $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i_j}|$ où $A = (a_{i,j})_{i,j}$
3. Montrez que $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle équivalente à la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 10 - (**) Intérieurs et adhérences (solution ☜)

Soient $A, B \subset E$ deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé E. Montrez que :

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^\circ$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Donnez exemple de non égalité du second cas.
3. $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$ et $(E \setminus A)^\circ = E \setminus \overline{A}$
4. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Solutions des exercices

Solution 1 - Normes sur $\mathbb{K}^n$ (☞ exercice)

Sur $\mathbb{K}^n$, on définit pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

- $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- $||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

Ce sont bien des normes. La séparation est claire pour les trois, ainsi que l'homogénéité. Les inégalités triangulaires pour $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ découlent de celle pour la valeur absolue sur $\mathbb{K}$. Il reste à montrer que $||\cdot||_2$ vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire que $||x+y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$. En passant aux carrés, et en développant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ||x+y||_2^2 & = & \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \\ (||x||_2 + ||y||_2)^2 & = & \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 + 2\,||x||_2\,||y||_2 \end{array}\right.$$

Ainsi, il suffit de montrer que :

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq ||x||_2\,||y||_2$$

Soit on connait déjà (la preuve de) l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on conclut directement, soit on la redémontre dans ce cas particulier, grâce au fait suivant à connaître : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (parce que $(a-b)^2 \geq 0$). Posons pour tout $1 \leq i \leq n$, $\widetilde{x_i} = \dfrac{x_i}{||x||_2}$ et $\widetilde{y_i} = \dfrac{y_i}{||y||_2}$. On veut alors montrer que $\sum_{i=1}^n |\widetilde{x_i}||\widetilde{y_i}| \leq 1$. Or, par l'inégalité précédente, on a :

$$\sum_{i=1}^n |\widetilde{x_i}||\widetilde{y_i}| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{|x_i|^2}{||x||_2^2}\frac{|y_i|^2}{||y||_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}{||x||_2^2}\frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}{||y||_2^2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

D'où l'inégalité triangulaire, donc $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Comme $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors on sait que toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Démontrons tout le même à la main que $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont équivalentes. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On a :

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Donc $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$. De plus :

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{n \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^2} = \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Donc $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$. Finalement, ces trois normes sont bien équivalentes.

Solution 2 - Théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie (☛ exercice)

Théorème *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de E. Alors $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.*

Preuve Démontrons le théorème en dimension 1, c'est-à-dire sur $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension 2, on peut en fait le démontrer sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ bornée. Il existe $A < B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \leq u_n \leq B$. Pour montrer que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, on procède par dichotomie. Posons $A_0 = A$, $B_0 = B$ et $M_0 = (A+B)/2$. Alors un des intervalles $[A_0, M_0]$ et $[M_0, B_0]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_n$. Notons cet intervalle $[A_1, B_1]$ et posons $M_1 = (A_1 + B_1)/2$. On recommence, l'un des intervalles $[A_1, M_1]$ et $[M_1, B_1]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_n$, on le note $[A_2, B_2]$ et on pose $M_2 = (A_2 + B_2)/2$. En continuant ainsi, on construit une suite d'intervalles décroissants dont la longueur tend vers zéro, et où chacun d'entre eux contient une infinité de termes de $(u_n)_n$. Notons $u = \lim A_n = \lim B_n = \lim M_n$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $[u+\alpha, u-\alpha]$ contenant une infinité de termes de $(u_n)_n$. Donc u est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, donc $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

Passons maintenant au cas de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E ($d = \dim(E)$). On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n dans la base $\underline{e}$: $u_n = u_n^1 e_1 + \cdots + u_n^d e_d$. En particulier, les suites $(u_n^1)_n, \ldots, (u_n^d)_n$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. De plus, elles sont bornées, car $(u_n)_n$ est bornée. En effet, comme toutes les normes sur E sont équivalentes car E est de dimension finie, alors la suite $(\max_{1 \leq i \leq d} |u_n^d|)_n$ est bornée, donc chaque suite $(u_n^1)_n, \ldots, (u_n^d)_n$ aussi. Par le cas en dimension 1, on a φ_1 une extractrice telle que $(u^1_{\varphi_1(n)})_n$ converge (vers $u^1 \in \mathbb{K}$). Puis comme la suite $(u^2_{\varphi_1(n)})_n$ est bornée, il existe φ_2 une extractrice telle que $(u^2_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_n$ converge (vers $u^2 \in \mathbb{K}$). On construit ainsi petit à petit $\varphi_3, \ldots, \varphi_d$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_d$. C'est une extractrice et on a :

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad u^i_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} u^i$$

Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $u = u^1 e_1 + \cdots + u^d e_d$. D'où le théorème.

Solution 3 - Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ (☛ exercice)

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $f \in E$. On définit :

- $||f||_1 = \int_a^b |f(t)| dt$

- $||f||_2 = (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$
- $||f||_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$

Elles sont bien définies car $|f|$ et $|f|^2$ sont continues sur $[a, b]$, donc intégrables et bornées. En fait, comme $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, $|f|$ atteint ses bornes donc on peut remplacer le sup par un max dans la définition de la norme infinie. Elles sont bien séparantes car une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle. L'homogénéité est claire pour les trois par linéarité de l'intégrale. L'inégalité triangulaire pour les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ provient de celle de la valeur absolue et de la linéarité de l'intégrale. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire pour $||\cdot||_2$ c'est-à-dire que $||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$ pour tous $f, g \in E$. En passant aux carrés, et en développant, on obtient :

$$\begin{cases} ||f+g||_2^2 &= \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2 + 2\int_a^b |f||g| \\ (||f||_2 + ||g||_2)^2 &= \int_a^b |f|^2 + \int_a^b |g|^2 + 2\,||f||_2\,||g||_2 \end{cases}$$

Ainsi, il suffit de montrer que :

$$\int_a^b |f||g| \leq ||f||_2\,||g||_2$$

Soit on connait déjà (la preuve de) l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on conclut directement, soit on la redémontre dans ce cas particulier, grâce au fait suivant à connaître : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ (parce que $(a-b)^2 \geq 0$). Posons alors $\widetilde{f} = \dfrac{f}{||f||_2}$ et $\widetilde{g} = \dfrac{g}{||g||_2}$ (On suppose que f, g sont non nulles, on a immédiatement le résultat sinon). On veut alors montrer que $\int_a^b |\widetilde{f}||\widetilde{g}| \leq 1$. Or, par l'inégalité précédente, on a :

$$\int_a^b |\widetilde{f}||\widetilde{g}| \leq \int_a^b \frac{1}{2}\left(\frac{|f|^2}{||f||_2^2}\frac{|g|^2}{||g||_2^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\int_a^b |f|^2}{||f||_2^2}\frac{\int_a^b |g|^2}{||g||_2^2}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

D'où l'inégalité triangulaire, donc $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ sont des normes sur E.

Aucune de ces normes n'est équivalente à une autre. Pour simplifier les notations, on suppose que $a = 0$ et $b = 1$:

- $||\cdot||_1$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_2$. En effet, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = n(1 - nt)$, la fonction affine par morceaux qui vaut n en 0, 0 en $1/n$ et nulle sur $[1/n, 1]$. Alors on a :

  $$\begin{cases} ||f_n||_1 &= \displaystyle\int_0^1 n(1-nt)dt = n\left[\frac{(1-nt)^2}{-2n}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \\ ||f_n||_2^2 &= \displaystyle\int_0^1 n^2(1-nt)^2 dt = n^2\left[\frac{(1-nt)^3}{-3n}\right]_0^1 = \frac{n}{3} \end{cases}$$

  Donc la suite $(||f_n||_1)_n$ est bornée mais la suite $(||f_n||_2)_n$ ne l'est pas, donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

- $||\cdot||_1$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_\infty$. Le même contre-exemple que précédemment fonctionne, car $||f_n||_\infty = n$ donc la suite $(||f_n||_\infty)_b$ n'est pas bornée.

- $||\cdot||_2$ n'est pas équivalente à $||\cdot||_\infty$. On peut prendre la suite de fonction g_n définie par $g_n(t) = \sqrt{f_n(t)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. On a $||g_n||_\infty = \sqrt{n}$ et $||g_n||_2^2 = ||f_n||_1 = 1/2$, donc ces normes ne sont pas équivalentes.

Remarque : Définissez ces fonctions sur un dessin, c'est plus clair. Une fonction affine par morceaux se définit très bien sans ambiguïté au tableau alors n'hésitez pas.

Solution 4 - Intérieur, adhérence (☞ exercice)

L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels que pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Montrons que $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$ et que $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$

- Soit $x \in \mathring{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. C'est un ouvert de E inclus dans A, donc dans $\bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$. Réciproquement, soit $x \in \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$. Alors il existe O un ouvert de E contenu dans A qui contient x. Comme O est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O \subset A$. Donc $x \in \mathring{A}$. D'où l'égalité.
- Soit $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Soit F un fermé de E tel que $A \subset F$. En passant au complémentaire, on a : $F^c \subset A^c$. Or, F^c est un ouvert de E. S'il contient x, il contient $B(x,r)$ pour un certain $r > 0$, donc $B(x,r) \cap F = \emptyset$, ce qui est absurde car $A \subset F$. Donc $x \in F$. Donc $x \in \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$. On suppose par l'absurde qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Soit F un ouvert de E contenant A. Alors $F \setminus B(x,r) = F \cap B(x,r)^c$ est une intersection de deux fermés donc est un fermé, et il contient A car $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Donc $x \in F \setminus B(x,r)$, c'est absurde. Donc $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$, donc $x \in \overline{A}$.

Solution 5 - (*) Continuité et fermé (☞ exercice)

1. Si f est continue, prenons $(x_n, f(x_n))_n$ une suite de Γ le graphe de f qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y$. Comme f est continue, alors $f(x_n) \to f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = y$, donc $(x,y) \in \Gamma$. Par caractérisation séquentielle des fermés, Γ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Si f n'est pas continue, soit x un point de discontinuité de f. Alors on

dispose de $(x_n)_n$ une suite de réels telle que $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y \neq f(x)$. Ainsi, la suite $(x_n, f(x_n))_n \in \Gamma^n$ converge vers $(x,y) \notin \Gamma$. Donc Γ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $(x, f(x)) \in \Gamma$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $(x, f(x)+\varepsilon) \notin \Gamma$ (une fonction n'admet qu'une seule image par point). Donc Γ ne contient pas $B((x,f(x)),\varepsilon)$ pour aucun $\varepsilon > 0$, donc Γ est d'intérieur vide.

3. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite de $\Gamma(\mathbf{1}_\mathbb{Q})$ qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(x_n) \in \{0,1\}^\mathbb{N}$, alors à partir d'un certain rang, cette suite est stationnaire. En particulier, $\overline{\Gamma(\mathbf{1}_\mathbb{Q})} \subset \mathbb{R} \times 0, 1$. Montrons l'inclusion réciproque : Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $(x,1) \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ et $(x,0) = \lim(x+\sqrt{2}/n, 0) \in \overline{\Gamma}$
   - Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $(x,0) \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ et $(x,1) = \lim(x_n, 1) \in \overline{\Gamma}$ où $(x_n)_n$ est une suite de rationnels qui converge vers x.

   Pour $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $f(\frac{1}{2n\pi+\varphi}) = \sin(2n\pi + \varphi) = \sin(\varphi)$. Ainsi, le segment $\{0\} \times [-1,1]$ est inclus dans $\overline{\Gamma}$. On a donc $\Gamma \cup \{0\} \times [-1,1] \subset \overline{\Gamma}$. Montrons l'inclusion réciproque. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout $(x,y) \in \overline{\Gamma}$ tel que $x \neq 0$, $y = f(x)$ donc $(x,y) \in \Gamma$. Si $(0,y) \in \overline{\Gamma}$, alors y est limite d'une suite $(f(x_n))_n$ où $x_n \to 0$. Or, la suite $(f(x_n))_n$ est à valeurs dans le fermé $[-1,1]$, donc $y \in [-1,1]$ et ainsi $(0,y) \in \{0\} \times [-1,1]$. Finalement, on a l'égalité $\overline{\Gamma} = \{0\} \times [-1,1] \cup \Gamma$

Solution 6 - (*) Normes sur $\mathbb{K}[X]$ (☛ exercice)

1. On pose $N(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$. Montrons que c'est une norme sur $\mathbb{K}[X]$:
   - Séparation : $N(P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1], P(t) = 0 \Leftrightarrow P = 0$
   - Homogénéité : $N(\lambda P) = \int_0^1 |\lambda P(t)|dt = |\lambda| N(P)$
   - Inégalité triangulaire : $N(P+Q) = \int_0^1 |P(t)+Q(t)|dt \leq \int_0^1 |P(t)| + |Q(t)|dt = N(P) + N(Q)$

   De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $X^n \xrightarrow[n \to +\infty]{N} 0$

2. Si $Q = \sum_{n=0}^d q_n X^n$, alors $N(Q) = \sum_{n=0}^d \dfrac{|q_n|}{n+1}$. Partons de cette idée, et posons $N_P(Q) = \sum_{n=0}^d \dfrac{|q'_n|}{n+1}$ où les q'_n sont les coefficients de Q dans la base $(1, X, \dots, X^{\deg(P)}, X^{\deg(P)+1} - P, \dots)$. En particulier, dans cette base, on a pour tout $n > \deg(P)$, $N_P(X_n - P) = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{N_P} P$.

Solution 7 - (**) Intérieur et adhérence dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ (☛ exercice)

1. On vérifie les trois points suivants :
   - Séparation : $N(f) = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ car f est continue.
   - Homogénéité : $N(\lambda f) = ||\lambda f||_\infty + ||\lambda f'||_\infty = |\lambda| N(f)$
   - Inégalité triangulaire : $N(f+g) = ||f+g||_\infty + ||f'+g'||_\infty \leq N(f) + N(g)$
2. L'ensemble des fonctions polynômiales de degré au plus d est un sous-espace vectoriel de dimension finie $d+1$ de E, donc il est fermé. De plus, F est un sous-espace strict de E, donc F est d'intérieur vide. Ainsi, son adhérence est lui-même et son intérieur est vide. C'est un résultat du cours mais il est important de savoir le démontrer :

   Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E, montrons que $\overline{F} = F$. Soit $(x_n)_n$ une suite de F qui converge dans E. Comme la suite converge, elle est bornée, et comme F est de dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence dans F. Or, une suite convergente n'admet qu'une unique valeur d'adhérence, sa limite. Donc $(x_n)_n$ converge dans F. Donc F est fermé dans E.

   Soit F un sous-espace strict de E. Montrons que F est d'intérieur vide dans E. Soit $e \in E \backslash F$, qui existe car F est un sous-espace strict de E, et qu'on peut supposer de norme 1 quitte à le diviser par sa norme. Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in F$, $x + \varepsilon e \notin F$. Donc F ne contient aucune boule ouverte, donc F est d'intérieur vide.
3. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, pour tout $f \in E$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_n$ qui converge vers f pour $||\cdot||_\infty$. Le problème, c'est qu'on ne peut pas en déduire que la suite $(P_n')_n$ converge uniformément vers f' (pourquoi ? avez-vous un contre-exemple ?). Pour y remédier, on considère par le théorème d'approximation de Weierstrass une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f', et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n la primitive de P_n qui vaut $f(0)$ en 0. Alors la suite $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers une fonction de dérivée f' valant $f(0)$ en 0, donc vers f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n' = P_n$. Ainsi, la suite $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynômiales qui converge pour la norme N vers f. Donc l'adhérence des fonctions polynômiales pour N est E.

   Comme l'ensemble des fonctions polynômiales est un sous-espace vectoriel strict de E, alors il est d'intérieur vide.

Solution 8 - (**) Densité des matrices diagonalisables (☛ exercice)

1. Il s'agit simplement de la norme 2 sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n^2 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soient $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices. Soit $C = AB$. Alors $C = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)_{i,j}$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
||C||_2^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|^2 \\
&\leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2\right) \\
&= \left(\sum_{1\leq i,k\leq n} |a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{1\leq k,j\leq n} |b_{k,j}|^2\right) = ||A||_2^2\,||B||_2^2
\end{aligned}$$

3. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, alors χ_M est scindé, donc M est trigonalisable. De plus, si N admet n-valeurs propres distinctes, alors on dispose de n vecteurs propres linéairement indépendants, qui forment donc une base de diagonalisation de N.
4. Comme M est trigonalisable, on pose $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On considère alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice : $M_k = PT_kP^{-1}$ où

$$T_k = T + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{n}{k} \end{pmatrix}$$

Alors à partir d'un certain rang, la matrice M_k admet n valeurs propres distinctes (en effet, $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \dfrac{j}{k}$ si et seulement si $\frac{1}{k} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{i-j}$, donc il y a au plus une valeur de k qui rend égaux les i et j-ème termes diagonaux des M_k), donc M_k est diagonalisable pour tout $k \geq k_0 \geq 0$. De plus, on a :

$$||M_k - M||_2 = \left|\left|P(T_k - T)P^{-1}\right|\right|_2 = \left|\left|P\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{n}{k} \end{pmatrix}P^{-1}\right|\right|_2 \leq ||P||_2\left|\left|P^{-1}\right|\right|_2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Donc $(M_k)_k$, une suite de matrices diagonalisables, tend vers M, une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathbb{C}$.

Solution 9 - (**) Une norme subordonnée (☞ exercice)

1. Soit $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul. Alors :

$$||Ax||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \leq ||x||_\infty \underbrace{\sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|}_{C_A}$$

   Où C_A est une constante ne dépendant que de A. Ainsi, l'ensemble $\left\{\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}\ ;\ x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\} \subset \mathbb{R}$ est borné, donc sa borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$, d'où la bonne définition de $N(A)$.

2. Il suffit de montrer qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $||Ax||_\infty = C_A\,||x||_\infty$. On voudrait en fait avoir des égalités dans nos inégalités de la question précédente. On pose alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ soit maximal, et on choisit pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $x_j \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $|a_{i_0,j}| = a_{i_0,j}x_j$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, x_j est le signe de $a_{i_0,j}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de $e^{-i\mathrm{Arg}(a_{i_0,j})}$). En particulier, $C_A = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$. On a alors :

$$||Ax||_\infty = \sup_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| = \sup\left(\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|, \sup_{1\leq i\neq i_0\leq n}\underbrace{\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right|}_{\leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|}\right) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \underbrace{||x||_\infty}_{1} C_A$$

   Donc $N(A) = C_A$.

3. On a $N(A) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n,\ a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0$, d'où la séparation. Puis si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$N(\lambda A) = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| N(A)$$

   d'où l'homogénéité. Enfin, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$N(A+B) = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|+|b_{i,j}| = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|+\sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq N(A)+N(B)$$

   Ainsi, N est une norme sur $(M)_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n^2, on sait que toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes. Donc en particulier, N est équivalente à $||\cdot||_\infty$.

Solution 10 - (**) Intérieurs et adhérences (☞ exercice)
Dans cet exercice, on utilise la caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence en tant que plus grand ouvert contenu dans une partie et de plus petit fermé contenant une partie de E. Voir la question de cours 4 ☜.

1. Soit $A \subset B$. Alors tous les ouverts de E contenus dans A sont contenus dans B, donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. De même, tous les fermés contenant B contiennent A, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$ donc on a l'inclusion $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ$. Réciproquement, soit $x \in (A \cap B)^\circ$. Alors il existe O un ouvert de E contenu dans $A \cap B$ tel que $x \in O$. Mais alors, $O \subset A$ et $O \subset B$ donc $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. D'où l'inclusion réciproque.

   De même, on a $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$ d'où l'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Cependant, on n'a pas l'inclusion réciproque. Par exemple sur $E = \mathbb{R}$ muni de la norme valeur absolue, si $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$, on a $\mathring{A} =]0,1[$, $\mathring{B} =]1,2[$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,2[\setminus\{1\} \neq]0,2[= (A \cup B)^\circ$
3. F est un fermé de E qui contient $E \setminus A$ si et seulement si $E \setminus F$ est un ouvert est contenu dans A. Ainsi :

$$\overline{E \setminus A} = \bigcap_{\substack{E\setminus A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F = \bigcap_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} (E \setminus O) = E \setminus \left(\bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O \right) = E \setminus \mathring{A}$$

   De même :

$$(E \setminus A)^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset E\setminus A \\ O \text{ ouvert}}} O = \bigcup_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} (E \setminus F) = E \setminus \left(\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F \right) = E \setminus \overline{A}$$

4. On applique la question 2 avec $E \setminus A$ et $E \setminus B$ en utilisant la question 3.