Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

17 Novembre 2022

Suites dans un espace vectoriel normé
Espaces préhilbertiens

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (solution 👈)
Énoncez le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, puis orthonormalisez la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} PQ$.

Exercice 2 - Inégalité de Cauchy-Schwarz (solution 👈)
Énoncez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien E. Quel est le cas d'égalité ? En déduire que la norme associée au produit scalaire vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Exercice 3 - Théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie (solution 👈)
Énoncez et démontrez le théorème de Bolzano-Weierstrass dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. (sans l'admettre sur $\mathbb{K}$)

Exercices

Suites dans un espace vectoriel normé

Exercice 4 - (*) Continuité et fermé (solution 👈)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez que f est continue si et seulement si le graphe de f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que $\{(x, f(x))\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrez que l'intérieur du graphe de f est nécessairement vide.
3. Quelle est l'adhérence du graphe de $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$? Et du graphe de $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par 0 en 0 ?

Exercice 5 - (*) Normes sur $\mathbb{K}[X]$ (solution 👈)

1. Trouvez une norme N sur $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite $(X^n)_n$ tende vers zéro.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Trouvez une norme N_P sur $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P.
   <u>*Indication :*</u> *Considérer la base* $(1, X, \ldots, X^{\deg(P)}, X^{\deg(P)+1} - P, \ldots)$

Exercice 6 - (**) Intérieur et adhérence dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ (solution 👈)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} N: & E & \longrightarrow & RR_+ \\ & f & \mapsto & ||f||_\infty + ||f'||_\infty \end{array}$$

1. Montrez que N est une norme sur E
2. Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour cette norme, quels sont l'adhérence et l'intérieur des fonctions polynômiales de degré au plus d ?
3. Pour cette norme, quels sont l'adhérence et l'intérieur des fonctions polynômiales ?
   <u>Indication :</u> On pourra utiliser le théorème d'approximation de WEIERSTRASS

Exercice 7 - (**) Densité des matrices diagonalisables (solution 👈)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrez que l'application :
   $$\begin{array}{rccc} ||\cdot||_2 : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & (a_{i,j})_{i,j} & \mapsto & \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i_j}|^2} \end{array}$$
   est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. Montrez que $||\cdot||_2$ est sous-multiplicative, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $||AB||_2 \leq ||A||_2\,||B||_2$
   <u>Indication :</u> On pourra utiliser l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ *:* $\sum a_n b_n \leq \sqrt{\sum |a_n|^2}\sqrt{\sum |b_n|^2}$
   Remarque : On dit alors que $||\cdot||_2$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. Montrez que M est trigonalisable et que toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe une suite de matrices $(M_k)_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ diagonalisables telles que $||M_k - M||_2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   <u>Indication :</u> On pourra montrer que si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, alors à partir d'un certain rang, les n-uplets $(\frac{1}{k} + \lambda_1, \ldots, \frac{n}{k} + \lambda_n)$ ont des termes deux à deux distincts

Exercice 8 - (**) Une norme subordonnée (solution ☜)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose : $N(A) = \sup_{x \in K^n \setminus \{0\}} \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty}$

1. Montrez que $N(A)$ est bien définie.
2. Montrez que $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i_j}|$ où $A = (a_{i,j})_{i,j}$
3. Montrez que $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle équivalente à la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 9 - (**) Intérieurs et adhérences (solution ☜)

Soient $A, B \subset E$ deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé E. Montrez que :

1. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^\circ$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Donnez exemple de non égalité du second cas.
3. $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$ et $(E \setminus A)^\circ = E \setminus \overline{A}$
4. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Espaces préhilbertiens

Exercice 10 - (*) Un produit scalaire ? (solution ☜)

Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(X, Y) \mapsto B(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$ soit un produit scalaire sur V ?

Indication : On pourra utiliser le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Exercice 11 - (*) Évaluation en zéro (solution ☜)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'un produit scalaire. Montrez qu'on a un isomorphisme :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & (y \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus n tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P(0) = \int_0^1 P(t) Q_n(t) dt$$

Montrez de plus que Q_n est de degré n. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ$, puis que l'application φ n'est pas surjective dans le cas général si E est de dimension infinie. Est-elle toujours injective ?

Exercice 12 - (**) Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (solution ☞)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculez le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ en fonction uniquement de A.

Indications Le produit scalaire considéré est bien entendu le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tXY)$

1. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$? Trouvez une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.
2. Calculez $\langle A, E_{i,j}\rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En déduire l'écriture de $\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$ dans la base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$ trouvée précédemment.
3. Conclure.

Exercice 13 - (**) Méthode QR (solution ☞)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrez qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QR$ et les termes diagonaux de R sont strictement positifs. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Que ce passe-t-il si A n'est pas supposée inversible ? Écrire la décomposition QR de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 18 & -15 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 - (**) Projection sur un convexe fermé non vide (solution ☞)
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de E. Le but de l'exercice est de définir une projection sur C.

1. Soit $x \in E$. Montrez que l'application $y \mapsto \langle y, y\rangle$ est continue.
2. Soit $x \in E$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que $C \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset$. En déduire qu'il existe un élément $p_C(x) \in C$ tel que $||x - p_C(x)|| = \inf_{y\in C} ||x - y||$
   Indication : *On pourra utiliser la caractérisation des compacts en dimension finie : A est une partie compacte de E si et seulement si elle est fermée et bornée*

3. Montrer qu'un tel élément est unique, puis qu'il est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \forall y \in C \, , \, \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{(condition de l'angle obtus)} \end{cases}$$

   <u>*Indication :*</u> *Pour le sens direct, on pourra regarder* $||x-(1-t)p_C(x)-ty||^2$, *pour le sens réciproque, on pourra développer* $||x-z||^2$ *judicieusement, où* z *vérifie la caractérisation de* $p_C(x)$

4. Montrez que p_C n'est pas linéaire dans le cas général. Montrez que p_C est 1-lipschitzienne.
5. Que dire à propos de p_C si C est un sous-espace vectoriel de E ?

Solutions des exercices

Solution 1 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (☞ exercice)

Soit E un espace préhilbertien et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E. On note F l'espace engendré par les x_i. Alors on peut construire une base orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$ de F (qu'on peut aussi renormaliser en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de F) de la manière suivante :

- On pose $u_1 = x_1$
- Si $k < n$ et $u_1, \dots, u_k$ sont construits, on pose

$$u_{k+1} = x_{k+1} - \frac{\langle x_{k+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k - \cdots - \frac{\langle x_{k+1}, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

Enfin, on pose $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Application On considère la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = X - \dfrac{\langle X, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X, 1 \rangle = 0$
  - ▷ $\langle 1, 1 \rangle = 2$

  Donc $u_1 = X$
- $u_2 = X^2 - \dfrac{\langle X^2, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X - \dfrac{\langle X^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X^2, X \rangle = 0$
  - ▷ $\langle X^2, 1 \rangle = 2/3$
  - ▷ $\langle X, X \rangle = 2/3$

  Donc $u_2 = X^2 - 1/3$
- $u_3 = X^3 - \dfrac{\langle X^3, X^2 - 1/3 \rangle}{\langle X^2 - 1/3, X^2 - 1/3 \rangle}(X^2 - 1/3) - \dfrac{\langle X^3, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X - \dfrac{\langle X^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X^3, X^2 - 1/3 \rangle = 0$
  - ▷ $\langle X^2 - 1/3, X^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^{1} X^4 - \frac{2}{3} X^2 + \frac{1}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$
  - ▷ $\langle X^3, X \rangle = 2/5$
  - ▷ $\langle X^3, 1 \rangle = 0$

  Ainsi : $u_3 = X^3 - \frac{3}{5} X$

On a donc la base orthogonale $\left(1, X, X^2 - \dfrac{1}{3}, X^3 - \dfrac{3}{5}X\right)$ En normalisant, comme $||X^3 - \frac{3}{5}X||^2 = \int_{-1}^{1} X^6 - \frac{6}{5}X^4 + \frac{9}{25}X^2 = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{8}{175}$, on obtient la base :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right), \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(5X^3 - 3X\right)\right)$$

Solution 2 - Inégalité de Cauchy-Schwarz (☞ exercice)

Soient $x, y \in E$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$$

Prouvons l'inégalité. Soit $t \in \mathbb{R}$. On développe :

$$||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2$$

Si $y = 0$, le résultat est immédiat, et on a égalité si et seulement si $x = 0$. Supposons maintenant $y \neq 0$, alors le membre de droite est un polynôme de degré 2 en t, qui est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, son discriminant est négatif ou nul :

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2\,||y||^2 \leq 0$$

En simplifiant par 4 et en passant à la racine carrée, on obtient bien l'inégalité voulue. De plus, il y a égalité si et seulement si le discriminant est nul, ce qui signifie que le polynôme considéré a (exactement) une racine. Soit t_0 une racine, on a alors $||x + t_0y|| = 0$, donc $x = -t_0y$. Ainsi, x et y sont colinéaires. Réciproquement, si $x = t_1y$, alors t_1 annule le polynôme qui a donc une racine réelle, donc un discriminant nul, donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Enfin, montrons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer que la norme associée au produit scalaire vérifie bien l'inégalité triangulaire :

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

On conclut en passant à la racine carrée.

Remarque : Il n'y a pas de raisonnement cyclique ici, nous avons utilisé la norme associée au produit scalaire pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz *mais il s'agit seulement d'une notation courte pour $x \mapsto \langle x, x\rangle$. Seule la séparation et l'homogénéité de cette fonction est utilisée, conséquence directe du caractère défini positif du produit scalaire ainsi que de sa bilinéarité*

Solution 3 - Théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie (☞ exercice)

Théorème *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de E. Alors $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.*

Preuve Démontrons le théorème en dimension 1, c'est-à-dire sur $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension 2, on peut en fait le démontrer sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ bornée. Il existe $A < B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \leq u_n \leq B$. Pour montrer que $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence, on procède par dichotomie. Posons $A_0 = A$, $B_0 = B$ et $M_0 = (A+B)/2$. Alors un des intervalles $[A_0, M_0]$ et $[M_0, B_0]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_n$. Notons cet intervalle $[A_1, B_1]$ et posons $M_1 = (A_1 + B_1)/2$. On recommence, l'un des intervalles $[A_1, M_1]$ et $[M_1, B_1]$ contient une infinité de termes de $(u_n)_n$, on le note $[A_2, B_2]$ et on pose $M_2 = (A_2 + B_2)/2$. En continuant ainsi, on construit une suite d'intervalles décroissants dont la longueur tend vers zéro, et où chacun d'entre eux contient une infinité de termes de $(u_n)_n$. Notons $u = \lim A_n = \lim B_n = \lim M_n$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle $[u+\alpha, u-\alpha]$ contenant une infinité de termes de $(u_n)_n$. Donc u est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$, donc $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence.

Passons maintenant au cas de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E ($d = \dim(E)$). On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n dans la base $\underline{e}$: $u_n = u_n^1 e_1 + \dots + u_n^d e_d$. En particulier, les suites $(u_n^1)_n, \dots, (u_n^d)_n$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. De plus, elles sont bornées, car $(u_n)_n$ est bornée. En effet, comme toutes les normes sur E sont équivalentes car E est de dimension finie, alors la suite $(\max_{1 \leq i \leq d} |u_n^d|)_n$ est bornée, donc chaque suite $(u_n^1)_n, \dots, (u_n^d)_n$ aussi. Par le cas en dimension 1, on a φ_1 une extractrice telle que $(u^1_{\varphi_1(n)})_n$ converge (vers $u^1 \in \mathbb{K}$). Puis comme la suite $(u^2_{\varphi_1(n)})_n$ est bornée, il existe φ_2 une extractrice telle que $(u^2_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_n$ converge (vers $u^2 \in \mathbb{K}$). On construit ainsi petit à petit $\varphi_3, \dots, \varphi_d$. On pose alors $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_d$. C'est une extractrice et on a :

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad u^i_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} u^i$$

Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers $u = u^1 e_1 + \dots + u^d e_d$. D'où le théorème.

Solution 4 - (*) Continuité et fermé (☞ exercice)

1. Si f est continue, prenons $(x_n, f(x_n))_n$ une suite de Γ le graphe de f qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y$. Comme f est continue, alors $f(x_n) \to f(x)$. Par

unicité de la limite, $f(x) = y$, donc $(x, y) \in \Gamma$. Par caractérisation séquentielle des fermés, Γ est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Si f n'est pas continue, soit x un point de discontinuité de f. Alors on dispose de $(x_n)_n$ une suite de réels telle que $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y \neq f(x)$. Ainsi, la suite $(x_n, f(x_n))_n \in \Gamma^n$ converge vers $(x, y) \notin \Gamma$. Donc Γ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $(x, f(x)) \in \Gamma$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $(x, f(x) + \varepsilon) \notin \Gamma$ (une fonction n'admet qu'une seule image par point). Donc Γ ne contient pas $B((x, f(x)), \varepsilon)$ pour aucun $\varepsilon > 0$, donc Γ est d'intérieur vide.

3. Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite de $\Gamma(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})$ qui converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $f(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors à partir d'un certain rang, cette suite est stationnaire. En particulier, $\overline{\Gamma(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}})} \subset \mathbb{R} \times 0, 1$. Montrons l'inclusion réciproque : Soit $x \in \mathbb{R}$.

   - Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $(x, 1) \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ et $(x, 0) = \lim(x + \sqrt{2}/n, 0) \in \overline{\Gamma}$
   - Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $(x, 0) \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$ et $(x, 1) = \lim(x_n, 1) \in \overline{\Gamma}$ où $(x_n)_n$ est une suite de rationnels qui converge vers x.

   Pour $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $f(\frac{1}{2n\pi+\varphi}) = \sin(2n\pi + \varphi) = \sin(\varphi)$. Ainsi, le segment $\{0\} \times [-1, 1]$ est inclus dans $\overline{\Gamma}$. On a donc $\Gamma \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset \overline{\Gamma}$. Montrons l'inclusion réciproque. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout $(x, y) \in \overline{\Gamma}$ tel que $x \neq 0$, $y = f(x)$ donc $(x, y) \in \Gamma$. Si $(0, y) \in \overline{\Gamma}$, alors y est limite d'une suite $(f(x_n))_n$ où $x_n \to 0$. Or, la suite $(f(x_n))_n$ est à valeurs dans le fermé $[-1, 1]$, donc $y \in [-1, 1]$ et ainsi $(0, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$. Finalement, on a l'égalité $\overline{\Gamma} = \{0\} \times [-1, 1] \cup \Gamma$

Solution 5 - (*) Normes sur $\mathbb{K}[X]$ (☞ exercice)

1. On pose $N(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$. Montrons que c'est une norme sur $\mathbb{K}[X]$:
   - Séparation : $N(P) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, 1], P(t) = 0 \Leftrightarrow P = 0$
   - Homogénéité : $N(\lambda P) = \int_0^1 |\lambda P(t)|dt = |\lambda|N(P)$
   - Inégalité triangulaire : $N(P + Q) = \int_0^1 |P(t) + Q(t)|dt \leq \int_0^1 |P(t)| + |Q(t)|dt = N(P) + N(Q)$

   De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} 0$

2. Si $Q = \sum_{n=0}^d q_n X^n$, alors $N(Q) = \sum_{n=0}^d \dfrac{|q_n|}{n+1}$. Partons de cette idée, et posons $N_P(Q) = \sum_{n=0}^d \dfrac{|q'_n|}{n+1}$ où les q'_n sont les coefficients de Q dans la base $(1, X, \dots, X^{\deg(P)}, X^{\deg(P)+1} - P, \dots)$. En particulier, dans cette base, on a pour tout $n > \deg(P)$, $N_P(X_n - P) = \dfrac{1}{n+1}$. Donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N_P} P$.

Solution 6 - (**) Intérieur et adhérence dans $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{K})$ (☛ exercice)

1. On vérifie les trois points suivants :
   - Séparation : $N(f) = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ car f est continue.
   - Homogénéité : $N(\lambda f) = ||\lambda f||_\infty + ||\lambda f'||_\infty = |\lambda| N(f)$
   - Inégalité triangulaire : $N(f+g) = ||f+g||_\infty + ||f'+g'||_\infty \leq N(f) + N(g)$
2. L'ensemble des fonctions polynômiales de degré au plus d est un sous-espace vectoriel de dimension finie $d+1$ de E, donc il est fermé. De plus, F est un sous-espace strict de E, donc F est d'intérieur vide. Ainsi, son adhérence est lui-même et son intérieur est vide. C'est un résultat du cours mais il est important de savoir le démontrer :

   Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E, montrons que $\overline{F} = F$. Soit $(x_n)_n$ une suite de F qui converge dans E. Comme la suite converge, elle est bornée, et comme F est de dimension finie, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence dans F. Or, une suite convergente n'admet qu'une unique valeur d'adhérence, sa limite. Donc $(x_n)_n$ converge dans F. Donc F est fermé dans E.

   Soit F un sous-espace strict de E. Montrons que F est d'intérieur vide dans E. Soit $e \in E \backslash F$, qui existe car F est un sous-espace strict de E, et qu'on peut supposer de norme 1 quitte à le diviser par sa norme. Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $x \in F$, $x + \varepsilon e \notin F$. Donc F ne contient aucune boule ouverte, donc F est d'intérieur vide.
3. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, pour tout $f \in E$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_n$ qui converge vers f pour $||\cdot||_\infty$. Le problème, c'est qu'on ne peut pas en déduire que la suite $(P_n')_n$ converge uniformément vers f' (pourquoi ? avez-vous un contre-exemple ?). Pour y remédier, on considère par le théorème d'approximation de Weierstrass une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f', et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n la primitive de P_n qui vaut $f(0)$ en 0. Alors la suite $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers une fonction de dérivée f' valant $f(0)$ en 0, donc vers f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n' = P_n$. Ainsi, la suite $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynômiales qui converge pour la norme N vers f. Donc l'adhérence des fonctions polynômiales pour N est E.

   Comme l'ensemble des fonctions polynômiales est un sous-espace vectoriel strict de E, alors il est d'intérieur vide.

Solution 7 - (**) Densité des matrices diagonalisables (☞ exercice)

1. Il s'agit simplement de la norme 2 sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n^2 $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soient $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices. Soit $C = AB$. Alors $C = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)_{i,j}$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} ||C||_2^2 &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|^2 \\ &\leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2\right) \\ &= \left(\sum_{1\leq i,k\leq n} |a_{i,k}|^2\right)\left(\sum_{1\leq k,j\leq n} |b_{k,j}|^2\right) = ||A||_2^2\,||B||_2^2 \end{aligned}$$

3. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, alors χ_M est scindé, donc M est trigonalisable. De plus, si N admet n-valeurs propres distinctes, alors on dispose de n vecteurs propres linéairement indépendants, qui forment donc une base de diagonalisation de N.
4. Comme M est trigonalisable, on pose $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PTP^{-1}$ où

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On considère alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice : $M_k = PT_kP^{-1}$ où

$$T_k = T + \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{n}{k} \end{pmatrix}$$

Alors à partir d'un certain rang, la matrice M_k admet n valeurs propres distinctes (en effet, $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \dfrac{j}{k}$ si et seulement si $\frac{1}{k} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{i-j}$, donc il y a au plus une valeur de k qui rend égaux les i et j-ème termes diagonaux des M_k), donc M_k est diagonalisable pour tout $k \geq k_0 \geq 0$. De plus, on a :

$$||M_k - M||_2 = \left|\left|P(T_k - T)P^{-1}\right|\right|_2 = \left|\left|P\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{n}{k} \end{pmatrix}P^{-1}\right|\right|_2 \leq ||P||_2 \left|\left|P^{-1}\right|\right|_2 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{k^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Donc $(M_k)_k$, une suite de matrices diagonalisables, tend vers M, une matrice quelconque de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathbb{C}$.

Solution 8 - (**) Une norme subordonnée (☞ exercice)

1. Soit $x = {}^t\!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ non nul. Alors :

$$||Ax||_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \le \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| \le ||x||_\infty \underbrace{\sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|}_{C_A}$$

   Où C_A est une constante ne dépendant que de A. Ainsi, l'ensemble $\left\{ \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \; ; \; x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est borné, donc sa borne supérieure existe dans $\mathbb{R}$, d'où la bonne définition de $N(A)$.

2. Il suffit de montrer qu'il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $||Ax||_\infty = C_A \, ||x||_\infty$. On voudrait en fait avoir des égalités dans nos inégalités de la question précédente. On pose alors $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$ soit maximal, et on choisit pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $x_j \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $|a_{i_0,j}| = a_{i_0,j} x_j$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, x_j est le signe de $a_{i_0,j}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de $e^{-i\mathrm{Arg}(a_{i_0,j})}$). En particulier, $C_A = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$. On a alors :

$$||Ax||_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| = \sup \left(\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|, \sup_{1 \le i \ne i_0 \le n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right|}_{\le \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|} \right) = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \underbrace{||x||_\infty}_{1} C_A$$

   Donc $N(A) = C_A$.

3. On a $N(A) = 0 \Leftrightarrow \forall 1 \le i, j \le n, \; a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0$, d'où la séparation. Puis si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$N(\lambda A) = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| N(A)$$

   d'où l'homogénéité. Enfin, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$N(A+B) = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \le \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + |b_{i,j}| = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \le N(A) + N(B)$$

   Ainsi, N est une norme sur $(M)_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n^2, on sait que toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes. Donc en particulier, N est équivalente à $||\cdot||_\infty$.

Solution 9 - (**) Intérieurs et adhérences (☞ exercice)
Dans cet exercice, on utilise la caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence en tant que plus grand ouvert contenu dans une partie et de plus petit fermé contenant une partie de E. Voir la question de cours **??** ☜.

1. Soit $A \subset B$. Alors tous les ouverts de E contenus dans A sont contenus dans B, donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. De même, tous les fermés contenant B contiennent A, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$
2. $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$ donc on a l'inclusion $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ$. Réciproquement, soit $x \in (A \cap B)^\circ$. Alors il existe O un ouvert de E contenu dans $A \cap B$ tel que $x \in O$. Mais alors, $O \subset A$ et $O \subset B$ donc $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. D'où l'inclusion réciproque.

   De même, on a $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$ d'où l'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Cependant, on n'a pas l'inclusion réciproque. Par exemple sur $E = \mathbb{R}$ muni de la norme valeur absolue, si $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$, on a $\mathring{A} =]0,1[$, $\mathring{B} =]1,2[$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,2[\setminus\{1\} \neq]0,2[= (A \cup B)^\circ$
3. F est un fermé de E qui contient $E \setminus A$ si et seulement si $E \setminus F$ est un ouvert est contenu dans A. Ainsi :

$$\overline{E \setminus A} = \bigcap_{\substack{E \setminus A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F = \bigcap_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} (E \setminus O) = E \setminus \left(\bigcup_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O \right) = E \setminus \mathring{A}$$

   De même :

$$(E \setminus A)^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset E \setminus A \\ O \text{ ouvert}}} O = \bigcup_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} (E \setminus F) = E \setminus \left(\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F \right) = E \setminus \overline{A}$$

4. On applique la question 2 avec $E \setminus A$ et $E \setminus B$ en utilisant la question 3.

Solution 10 - (*) Un produit scalaire ? (☞ exercice)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$ est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. De plus, une matrice symétrique et anti-symétrique à la fois est nulle (car $a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{j,i}$ pour tout i, j). Ainsi, on a bien la somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Si A est symétrique, alors $A^2 = {}^tAA$, donc B est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$ (produit scalaire canonique). Si A est anti-symétrique, alors $B(A,A) = \mathrm{Tr}(-{}^tAA) \leq 0$ donc B n'est pas définie positive sur $A_n(\mathbb{R})$, donc n'est pas un produit scalaire sur $A_n(\mathbb{R})$.

Soit maintenant V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V. Alors $\dim(V) \leq \dim(S_n(\mathbb{R}))$, car sinon $V \cap A_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$. Donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V. En particulier, dès que $n > 1$, alors B n'est pas un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Solution 11 - (*) Évaluation en zéro (☛ exercice)

L'application φ est bien linéaire par linéarité du produit scalaire. De plus, on a $\ker(\varphi) = E^\perp = \{0\}$, donc elle est injective. Or, $\dim(E) = \dim(E^*)$ donc φ est un isomorphisme.

Ainsi, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et que $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et comme l'évaluation en zéro est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, alors il existe un unique (φ isomorphisme) $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ_n$.

Si Q_n était de degré strictement inférieur à n, alors $XQ_n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$0 = (XQ_n)(0) = \int_0^1 tQ_n(t)Q_n(t)dt = \int_0^1 tQ_n(t)^2 dt$$

La fonction $t \mapsto tQ_n(t)^2$ est positive sur $[0,1]$, continue et d'intégrale nulle, donc c'est la fonction nulle. Ainsi, $Q_n = 0$, ce qui est absurde (car par exemple $1 = 1(0) = \int_0^1 Q_n$ donc $Q_n \neq 0$). Donc Q_n est de degré exactement n.

On suppose par l'absurde qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ$. Par unicité des Q_n, on a pour tout $n \geq \deg(Q)$, $Q_n = Q$. C'est absurde car Q_n est de degré exactement n. Ainsi, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X]^* \\ P & \mapsto & \left(Q \mapsto \int_0^1 PQ\right) \end{array}$$

n'est pas surjective.

Cependant, $\ker(\varphi) = E^\perp = \{0\}$ est toujours injective.

Solution 12 - (**) Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (☛ exercice)

1. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. En effet, une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est entièrement définie par ses coefficients diagonaux et sur-diagonaux, qui peuvent être quelconques. Plus formellement, on montre que la famille $\widetilde{\mathcal{B}} = (E_{i,i})_{1\leq i\leq n} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$

est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Elle est libre par liberté de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et opérations élémentaires sur une famille libre, et elle est génératrice par la remarque précédente. Cependant, $\widetilde{\mathcal{B}}$ n'est pas orthonormale. Elle est cependant orthogonale, car : $\langle E_{i,i}, E_{j,j}\rangle = 0$ et $\langle E_{i,i}, E_{k,l} + E_{l,k}\rangle = 0$ si $k < l$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,i}$ sélectionne la première ligne de la matrice multipliée) et enfin $\langle E_{i,j} + E_{j,i}, E_{k,l} + E_{l,k}\rangle = 0$ si $i < j$, $k < l$ et $(i, j) \neq (k, l)$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,j}$ sélectionne la j-ième ligne, la place dans la i-ème, et annule toutes les autres lignes). Cependant, bien qu'on ait $||E_{i,i} = 1||$, on a $||E_{i,j}+E_{j,i}|| = \sqrt{2}$ si $i < j$. On remplace alors $\widetilde{\mathcal{B}}$ par $\mathcal{B} = (E_{i,i})_{1\leq i\leq n}\cup((E_{i,j}+E_{j,i})/\sqrt{2})_{1\leq i<j\leq n}$. C'est une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.

2. Si $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle A, E_{i,j}\rangle = A_{i,j}$ (multiplier à droite par $E_{i,j}$ renvoie la matrice vide sauf la colonne j, qui contient la colonne i de A. Ainsi, en prendre la trace revient à prendre le i-ème coefficient de la j-ème colonne de A). Ainsi :
   - Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle A, E_{i,i}\rangle = a_{i,i}$
   - Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $\langle A, (E_{i,j} + E_{j,i})/\sqrt{2}\rangle = \dfrac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}}$

   Ainsi, par l'écriture du projeté orthogonal dans une base orthonormée, on a :
$$\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}} \frac{E_{i,j} + E_{j,i}}{\sqrt{2}}$$

3. En simplifiant l'écriture de $\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$, en considérant notamment que $E_{i,i} = (E_{i,i}+E_{i,i})/2$, on obtient :
$$\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} E_{i,j} = \frac{A + {}^tA}{2}$$

Solution 13 - (**) Méthode QR (☞ exercice)

On écrit $A = [a_1|\dots|a_n]$ en colonnes. Comme A est inversible, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$, et on peut donc appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On construit alors :

- $u_1 = a_1$ et $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$
- Si $k < n$: $u_{k+1} = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, e_k\rangle e_k - \cdots - \langle a_{k+1}, e_1\rangle e_1$ et $e_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{||u_{k+1}||}$

En particulier, on a pour tout $1 \leq k \leq n$:
$$a_k = ||u_k||e_k + \langle a_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1} + \cdots + \langle a_{k+1}, e_1\rangle e_1$$

C'est l'écriture de a_k dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, on a le changement de base :

$$[a_1|\dots|a_n] = [e_1|\dots|e_n] \begin{pmatrix} ||u_1|| & \langle a_2, e_1 \rangle & \dots & \langle a_n, e_1 \rangle \\ 0 & ||u_2|| & \dots & \langle a_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & ||u_n|| \end{pmatrix}$$

On pose Q la matrice de gauche, R la matrice de droite. On a bien Q orthogonale car $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, et R est clairement triangulaire supérieure de termes diagonaux strictement positifs. Montrons maintenant l'unicité. Soit $A = QR = Q'R'$ deux décompositions QR de A. On a alors :

$$B = Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

B est une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. En particulier, $B_{1,1} = 1$ car la première colonne de B est de norme 1. Mais alors la première ligne de B est $(1, 0, \dots, 0)$. La matrice extraite $(B_{i,j})_{i,j \geq 2}$ est encore une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, on conclut par récurrence que $B = I_n$. Ainsi, $Q = Q'$ et $R = R'$, d'où l'unicité de la décomposition QR.

Si maintenant on suppose que A n'est pas inversible, alors on ne peut pas appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, mais on peut appliquer le procédé d'orthogonalisation (sans normaliser). On obtient alors $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale, mais pas nécessairement libre (certains u_i sont nuls). On pose alors $\widetilde{Q} = [u_1|\dots|u_n]$ et $\widetilde{R}$ comme avant. On a bien $A = QR$, mais Q n'est pas orthogonale. Les u_i non nuls forment une famille libre (car orthogonale et de vecteurs non nuls), qu'on peut compléter en une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Les lignes de R correspondant à des u_i nuls étant nulles, le produit $\widetilde{Q}\widetilde{R}$ ne change pas si on remplace les colonnes nulles de Q par autre chose. Ainsi, on considère la famille orthogonale $(u_i')_i$ obtenue à partie de la famille $(u_i)_i$ en remplaçant tous les termes nuls par des vecteurs orthogonaux aux autres. On pose finalement : $Q = \left[\frac{u_1}{||u_1||} \middle| \dots \middle| \frac{u_n}{||u_n||} \right]$ et $R = {}^t[||u_1||L_1|\dots|||u_n||L_n]$ où $R = {}^t[L_1|\dots|L_n]$ est l'écriture en ligne de $\widetilde{R}$. Alors Q est bien orthogonale et R bien triangulaire supérieure, à termes diagonaux positifs. Mais on n'a pas unicité de la décomposition, en particulier à cause du choix de complétion de la famille $(u_i)_i$.

Application On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de $A = [a_1|a_2|a_3]$:

1.

$$u_1 = a_1 \text{ et } ||u_1|| = 3 \text{ et } e_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

2.

$$u_2 = a_2 - \underbrace{\left(18 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} - 6 \times \frac{2}{3}\right)}_{\langle a_2, e_1 \rangle = 9} e_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Or, $||u_2||^2 = 2 \times 144 = (12\sqrt{2})^2$ donc :

$$e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} u_3 &= a_3 - \underbrace{\left(-15 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 15 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\langle a_3, e_2 \rangle = 0} e_2 - \underbrace{\left(-15 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} - 15 \times \frac{2}{3}\right)}_{\langle a_3, e_1 \rangle = -21} e_1 \\ &= \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} + 21 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, $||u_3||^2 = 1 + 16 + 1 = (3\sqrt{2})^2$. Donc :

$$e_3 = \begin{pmatrix} -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \\ 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$Q = [e_1|e_2|e_3] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 4\sqrt{2} \\ -4 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} ||u_1|| & \langle a_2, e_1 \rangle & \langle a_3, e_1 \rangle \\ 0 & ||u_2|| & \langle a_3, e_2 \rangle \\ 0 & 0 & ||u_3|| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -21 \\ 0 & 12\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

C'est la décomposition QR de A.

Solution 14 - (**) Projection sur un convexe fermé non vide (☞ exercice)

1. Soit $y, h \in E$. On a alors par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\langle y+h, y+h\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle y, h\rangle + \langle h, h\rangle \leq 2||y||\,||h|| + ||h||^2 \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

2. En particulier, l'application $y \in E \mapsto ||x-y||$ est continue comme composée de trois applications continues (translation par x, norme au carrée, racine carrée). Comme C est non vide, alors $C \cap E \neq \emptyset$. Or, $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(x, n)$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{B}(x, r) \cap C \neq \emptyset$. En particulier, cet ensemble est fermé comme intersection de deux fermés, et est borné car inclus dans $\overline{B}(x, r)$. Il est donc compact. L'application $y \mapsto ||x-y||$ étant continue, elle atteint son minimum sur ce compact. Notons $p_C(x)$ un point en lequel il est atteint. Montrons qu'en fait, $p_C(x)$ atteint le minimum sur C tout entier. C'est évidemment le cas car tous les éléments hors de $\overline{B}(x, r)$ sont à distance strictement supérieure à r de x, tandis que $||p_C(x) - x|| \leq r$.
3. Soit $y \in C$ un élément tel que $||x-y|| = ||x-p_C(x)||$. Alors par convexité de C, $(p_C(x)+y)/2 \in C$.

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2} + \frac{y-x}{2}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2}\right|\right| + \left|\left|\frac{y-x}{2}\right|\right| = ||p_C(x)-x||$$

Mais comme $p_C(x)$ réalise le minimum de la distance de x à C, on a aussi

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| \geq ||p_C(x)-x||$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \geq 0$ tel que $p_C(x) - x = \lambda(y-x)$. Comme $||p_C(x)-x|| = ||y-x||$, alors $\lambda = 1$, donc $y = p_C(x)$. D'où l'unicité.

Montrons la caractérisation. Montrons d'abord que $p_C(x)$ vérifie bien la caractérisation. Tout d'abord, $p_C(x) \in C$ par définition. De plus, par convexité de C, on a pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $y \in C$:

$$\begin{aligned} ||x - p_C(x)||^2 &\leq ||x - (1-t)p_C(x) - ty||^2 \\ &= ||x - p_C(x) - t(y - p_C(x))||^2 \\ &= ||x - p_C(x)||^2 + t^2||y - p_C(x)||^2 - 2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $0 < t \leq 1$, on peut simplifier par $2t$:

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq \frac{t}{2}||y - p_C(x)||^2$$

On conclut en faisant tendre t vers 0.

Réciproquement, soit $z \in E$ vérifiant la caractérisation. Alors $z \in C$. De plus, si $y \in C$, on a :

$$||y-x||^2 = ||y-z+z-x||^2 = ||y-z||^2+||x-z||^2-2\langle x-z, y-z\rangle \geq ||y-z||^2+||x-z||^2 \geq ||x-z||^2$$

Ainsi, z atteint bien le minimum de la distance à x de tous les éléments de C. Par unicité d'un tel élément, $z = p_C(x)$. D'où la caractérisation de $p_C(x)$

4. Si 0 ne contient pas C, alors en particulier $p_C(0) \neq 0$, donc p_C n'est pas linéaire ! Montrons maintenant qu'elle est 1-lipschitzienne. Soient $x, y \in E$. On a les caractérisations :

$$\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$$
$$\langle y - p_C(y), w - p_C(y)\rangle \leq 0 \quad \forall w \in C$$

On prend alors $z = p_C(y)$ et $w = p_C(x)$, qui sont bien des éléments de C, et on somme ces inégalités :

$$0 \geq \langle x - p_C(x) - y + p_C(y), p_C(y) - p_C(x)\rangle = \langle x - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle + ||p_C(x) - p_C(y)||^2$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||p_C(x) - p_C(y)||^2 \leq \langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq ||x - y||\,||p_C(x) - p_C(y)||$$

Si $p_C(x) = p_C(y)$, on a l'inégalité voulue. Sinon, on divise par $||p_C(x)-p_C(y)||$ pour conclure.

5. Si C est un sous-espace vectoriel de E, alors on a toujours une application p_C bien définie car un sous-espace vectoriel de E est un convexe, fermé et est non vide. L'application $x \mapsto p_C(x)$ étant celle qui renvoie l'unique élément de C minimisant la distance à x, il s'agit de la projection orthogonale sur C. (c'est une des caractérisations de la projection orthogonale vue en cours). Sinon, on peut le retrouver via la caractérisation de C. En effet, si C est un espace vectoriel, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in C$, $\lambda y \in C$. En particulier, la condition de l'angle obtus donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ \langle x - p_C(x), ty - p_C(x)\rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ t\langle x - p_C(x), y\rangle \leq \langle x - p_C(x), p_C(x)\rangle$$

Donc $\langle x - p_C(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in C$, donc $x - p_C(x) \in C^{\perp}$.