Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

24 Novembre 2022

Endomorphismes des espaces euclidiens

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (solution ☜)
Énoncez le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, puis orthonormalisez la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} PQ$.

Exercice 2 - Inégalité de Cauchy-Schwarz (solution ☜)
Énoncez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace préhilbertien E. Quel est le cas d'égalité ? En déduire que la norme associée au produit scalaire vérifie bien l'inégalité triangulaire.

Exercice 3 - Théorème de représentation de Riesz + application (solution ☜)
Énoncez le théorème de représentation de Riesz dans un espace euclidien E.

Application Montrez l'existence d'un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus n tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)dt$$

Montrez de plus que Q_n est de degré n. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ$, puis que l'application φ n'est pas surjective dans le cas général si E est de dimension infinie. Est-elle toujours injective ?

Exercices

Espaces préhilbertiens

Exercice 4 - (*) Un produit scalaire ? (solution ☜)
Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(X, Y) \mapsto B(X, Y) = \mathrm{Tr}(XY)$ soit un produit scalaire sur V ?
Indication : On pourra utiliser le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

Exercice 5 - (**) Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (solution ☜)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculez le projeté orthogonal de A sur $S_n(\mathbb{R})$ en fonction uniquement de A.

Indications Le produit scalaire considéré est bien entendu le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à savoir $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tXY)$

1. Quelle est la dimension de $S_n(\mathbb{R})$? Trouvez une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.
2. Calculez $\langle A, E_{i,j} \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En déduire l'écriture de $\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$ dans la base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$ trouvée précédemment.
3. Conclure.

Exercice 6 - (**) Méthode QR (solution ☜)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrez qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times T_n(\mathbb{R})$ tel que $A = QR$ et les termes diagonaux de R sont strictement positifs. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Que ce passe-t-il si A n'est pas supposée inversible ? Écrire la décomposition QR de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 18 & -15 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 - (**) Projection sur un convexe fermé non vide (solution ☜)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de E. Le but de l'exercice est de définir une projection sur C.

1. Soit $x \in E$. Montrez que l'application $y \mapsto \langle y, y \rangle$ est continue.
2. Soit $x \in E$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que $C \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset$. En déduire qu'il existe un élément $p_C(x) \in C$ tel que $||x - p_C(x)|| = \inf_{y \in C} ||x - y||$

   <u>Indication :</u> *On pourra utiliser la caractérisation des compacts en dimension finie : A est une partie compacte de E si et seulement si elle est fermée et bornée*
3. Montrer qu'un tel élément est unique, puis qu'il est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \forall y \in C\,,\ \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{(condition de l'angle obtus)} \end{cases}$$

<u>Indication :</u> *Pour le sens direct, on pourra regarder $||x-(1-t)p_C(x)-ty||^2$, pour le sens réciproque, on pourra développer $||x - z||^2$ judicieusement, où z vérifie la caractérisation de $p_C(x)$*

4. Montrez que p_C n'est pas linéaire dans le cas général. Montrez que p_C est 1-lipschitzienne.
5. Que dire à propos de p_C si C est un sous-espace vectoriel de E ?

Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 8 - (**) Matrices de Gram (solution ☜)

Soit E un espace euclidien de dimension n. Si $(x_1, \dots, x_m)$ est une famille de E, on pose

$$G(x_1, \dots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \le i,j \le m} = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_m)$. On note $|G(x_1, \dots, x_m)|$ le déterminant de la matrice de Gram $G(x_1, \dots, x_m)$.

1. Montrez que $G(x_1, \dots, x_m)$ est inversible si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel strict de E, et $(x_1, \dots, x_m) \in F^m$. Soit $x \in F^\perp$. Montrez que
$$|G(x, x_1, \dots, x_m)| = ||x||^2 \, |G(x_1, \dots, x_m)|$$
3. En déduire que si $(x_1, \dots, x_m)$ est une base de F, et $x \in E$, alors
$$d(x, F)^2 = \frac{|G(x, x_1, \dots, x_m)|}{|G(x_1, \dots, x_m)|}$$

Exercice 9 - (**) Matrices orthogonales à coefficients positifs (solution ☜)

Je propose deux énoncés dont la solution sera très similaire, mais c'est pour varier un peu. Le premier est plus direct, le second demandera un petit peu plus de réflexion (à mon avis) mais je trouve l'énoncé plus rigolo.

- Déterminez $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ puis calculez $|SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})|$
- Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montez que : $\exists i, j \in [\![1, n]\!], |a_{i,j}| \neq 1 \Rightarrow \exists i', j' \in [\![1, n]\!], a_{i',j'} < 0$. En déduire une description simple de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 10 - (**) Matrices orthogonales et nilpotence (solution ☜)

Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - \alpha \mathrm{id}_E$ soit nilpotente. Que dire de u ?

Solutions des exercices

Solution 1 - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (☛ exercice)
Soit E un espace préhilbertien et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E. On note F l'espace engendré par les x_i. Alors on peut construire une base orthogonale $(u_1, \dots, u_n)$ de F (qu'on peut aussi renormaliser en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de F) de la manière suivante :

- On pose $u_1 = x_1$
- Si $k < n$ et $u_1, \dots, u_k$ sont construits, on pose

$$u_{k+1} = x_{k+1} - \frac{\langle x_{k+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k - \cdots - \frac{\langle x_{k+1}, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

Enfin, on pose $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Application On considère la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = X - \dfrac{\langle X, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X, 1 \rangle = 0$
  - ▷ $\langle 1, 1 \rangle = 2$

  Donc $u_1 = X$
- $u_2 = X^2 - \dfrac{\langle X^2, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X - \dfrac{\langle X^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X^2, X \rangle = 0$
  - ▷ $\langle X^2, 1 \rangle = 2/3$
  - ▷ $\langle X, X \rangle = 2/3$

  Donc $u_2 = X^2 - 1/3$
- $u_3 = X^3 - \dfrac{\langle X^3, X^2 - 1/3 \rangle}{\langle X^2 - 1/3, X^2 - 1/3 \rangle}(X^2 - 1/3) - \dfrac{\langle X^3, X \rangle}{\langle X, X \rangle} X - \dfrac{\langle X^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1$. Or,
  - ▷ $\langle X^3, X^2 - 1/3 \rangle = 0$
  - ▷ $\langle X^2 - 1/3, X^2 - 1/3 \rangle = \int_{-1}^{1} X^4 - \frac{2}{3} X^2 + \frac{1}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$
  - ▷ $\langle X^3, X \rangle = 2/5$
  - ▷ $\langle X^3, 1 \rangle = 0$

  Ainsi : $u_3 = X^3 - \frac{3}{5} X$

On a donc la base orthogonale $\left(1, X, X^2 - \dfrac{1}{3}, X^3 - \dfrac{3}{5}X\right)$ En normalisant, comme $||X^3 - \frac{3}{5}X||^2 = \int_{-1}^{1} X^6 - \frac{6}{5}X^4 + \frac{9}{25}X^2 = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = \frac{8}{175}$, on obtient la base :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right), \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(5X^3 - 3X\right)\right)$$

Solution 2 - Inégalité de Cauchy-Schwarz (☞ exercice)

Soient $x, y \in E$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$$

Prouvons l'inégalité. Soit $t \in \mathbb{R}$. On développe :

$$||x + ty||^2 = ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2$$

Si $y = 0$, le résultat est immédiat, et on a égalité si et seulement si $x = 0$. Supposons maintenant $y \neq 0$, alors le membre de droite est un polynôme de degré 2 en t, qui est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, son discriminant est négatif ou nul :

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2\,||y||^2 \leq 0$$

En simplifiant par 4 et en passant à la racine carrée, on obtient bien l'inégalité voulue. De plus, il y a égalité si et seulement si le discriminant est nul, ce qui signifie que le polynôme considéré a (exactement) une racine. Soit t_0 une racine, on a alors $||x + t_0 y|| = 0$, donc $x = -t_0 y$. Ainsi, x et y sont colinéaires. Réciproquement, si $x = t_1 y$, alors t_1 annule le polynôme qui a donc une racine réelle, donc un discriminant nul, donc égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Enfin, montrons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer que la norme associée au produit scalaire vérifie bien l'inégalité triangulaire :

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

On conclut en passant à la racine carrée.

Remarque : Il n'y a pas de raisonnement cyclique ici, nous avons utilisé la norme associée au produit scalaire pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz *mais il s'agit seulement d'une notation courte pour $x \mapsto \langle x, x\rangle$. Seule la séparation et l'homogénéité de cette fonction est utilisée, conséquence directe du caractère défini positif du produit scalaire ainsi que de sa bilinéarité*

Solution 3 - Théorème de représentation de Riesz + application (☛ exercice)
Théorème de représentation de Riesz *Soit E un espace euclidien. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \langle x, \cdot\rangle\end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'application φ est bien linéaire par linéarité du produit scalaire. De plus, on a $\ker(\varphi) = E^\perp = \{0\}$, donc elle est injective. Or, $\dim(E) = \dim(E^*)$ donc φ est un isomorphisme.

Application Ainsi, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et que $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, et comme l'évaluation en zéro est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, alors il existe un unique (φ isomorphisme) $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ_n$.

Si Q_n était de degré strictement inférieur à n, alors $XQ_n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$0 = (XQ_n)(0) = \int_0^1 tQ_n(t)Q_n(t)dt = \int_0^1 tQ_n(t)^2 dt$$

La fonction $t \mapsto tQ_n(t)^2$ est positive sur $[0, 1]$, continue et d'intégrale nulle, donc c'est la fonction nulle. Ainsi, $Q_n = 0$, ce qui est absurde (car par exemple $1 = 1(0) = \int_0^1 Q_n$ donc $Q_n \neq 0$). Donc Q_n est de degré exactement n.

On suppose par l'absurde qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(0) = \int_0^1 PQ$. Par unicité des Q_n, on a pour tout $n \geq \deg(Q)$, $Q_n = Q$. C'est absurde car Q_n est de degré exactement n. Ainsi, l'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X]^* \\ P & \mapsto & \left(Q \mapsto \int_0^1 PQ\right)\end{array}$$

n'est pas surjective.

Cependant, $\ker(\varphi) = E^\perp = \{0\}$ est toujours injective.

Solution 4 - (*) Un produit scalaire ? (☛ exercice)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$ est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique. De plus, une matrice symétrique et anti-symétrique à la fois est nulle (car $a_{i,j} = a_{j,i} = -a_{j,i}$ pour tout i, j). Ainsi, on a bien la somme directe : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors $A^2 = {}^tAA$, donc B est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$ (produit scalaire

canonique). Si A est anti-symétrique, alors $B(A, A) = \mathrm{Tr}(-{}^tAA) \leq 0$ donc B n'est pas définie positive sur $A_n(\mathbb{R})$, donc n'est pas un produit scalaire sur $A_n(\mathbb{R})$.

Soit maintenant V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V. Alors $\dim(V) \leq \dim(S_n(\mathbb{R}))$, car sinon $V \cap A_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$. Donc $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que B soit un produit scalaire sur V. En particulier, dès que $n > 1$, alors B n'est pas un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Solution 5 - (**) Projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$ (☞ exercice)

1. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. En effet, une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ est entièrement définie par ses coefficients diagonaux et sur-diagonaux, qui peuvent être quelconques. Plus formellement, on montre que la famille $\widetilde{\mathcal{B}} = (E_{i,i})_{1\leq i\leq n} \cup (E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ est une base de $S_n(\mathbb{R})$. Elle est libre par liberté de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et opérations élémentaires sur une famille libre, et elle est génératrice par la remarque précédente. Cependant, $\widetilde{\mathcal{B}}$ n'est pas orthonormale. Elle est cependant orthogonale, car : $\langle E_{i,i}, E_{j,j}\rangle = 0$ et $\langle E_{i,i}, E_{k,l} + E_{l,k}\rangle = 0$ si $k < l$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,i}$ sélectionne la première ligne de la matrice multipliée) et enfin $\langle E_{i,j} + E_{j,i}, E_{k,l} + E_{l,k}\rangle = 0$ si $i < j$, $k < l$ et $(i, j) \neq (k, l)$ (pour rappel, multiplier à gauche par $E_{i,j}$ sélectionne la j-ième ligne, la place dans la i-ème, et annule toutes les autres lignes). Cependant, bien qu'on ait $||E_{i,i} = 1||$, on a $||E_{i,j}+E_{j,i}|| = \sqrt{2}$ si $i < j$. On remplace alors $\widetilde{\mathcal{B}}$ par $\mathcal{B} = (E_{i,i})_{1\leq i\leq n} \cup ((E_{i,j}+E_{j,i})/\sqrt{2})_{1\leq i<j\leq n}$. C'est une base orthonormée de $S_n(\mathbb{R})$.
2. Si $1 \leq i, j \leq n$, on a $\langle A, E_{i,j}\rangle = A_{i,j}$ (multiplier à droite par $E_{i,j}$ renvoie la matrice vide sauf la colonne j, qui contient la colonne i de A. Ainsi, en prendre la trace revient à prendre le i-ème coefficient de la j-ème colonne de A). Ainsi :
   - Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\langle A, E_{i,i}\rangle = a_{i,i}$
   - Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $\langle A, (E_{i,j} + E_{j,i})/\sqrt{2}\rangle = \dfrac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}}$

   Ainsi, par l'écriture du projeté orthogonal dans une base orthonormée, on a :
   $$\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{\sqrt{2}} \frac{E_{i,j} + E_{j,i}}{\sqrt{2}}$$
3. En simplifiant l'écriture de $\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A)$, en considérant notamment que $E_{i,i} = (E_{i,i}+E_{i,i})/2$, on obtient :
   $$\mathrm{proj}_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} E_{i,j} = \frac{A + {}^tA}{2}$$

Solution 6 - (**) Méthode QR (☞ exercice)

On écrit $A = [a_1|\dots|a_n]$ en colonnes. Comme A est inversible, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$, et on peut donc appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On construit alors :

- $u_1 = a_1$ et $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$
- Si $k < n$: $u_{k+1} = a_{k+1} - \langle a_{k+1}, e_k\rangle e_k - \dots - \langle a_{k+1}, e_1\rangle e_1$ et $e_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{||u_{k+1}||}$

En particulier, on a pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$a_k = ||u_k||e_k + \langle a_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1} + \dots + \langle a_{k+1}, e_1\rangle e_1$$

C'est l'écriture de a_k dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, on a le changement de base :

$$[a_1|\dots|a_n] = [e_1|\dots|e_n]\begin{pmatrix} ||u_1|| & \langle a_2, e_1\rangle & \dots & \langle a_n, e_1\rangle \\ 0 & ||u_2|| & \dots & \langle a_n, e_2\rangle \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & ||u_n|| \end{pmatrix}$$

On pose Q la matrice de gauche, R la matrice de droite. On a bien Q orthogonale car $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, et R est clairement triangulaire supérieure de termes diagonaux strictement positifs. Montrons maintenant l'unicité. Soit $A = QR = Q'R'$ deux décompositions QR de A. On a alors :

$$B = Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

B est une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. En particulier, $B_{1,1} = 1$ car la première colonne de B est de norme 1. Mais alors la première ligne de B est $(1, 0, \dots, 0)$. La matrice extraite $(B_{i,j})_{i,j\geq 2}$ est encore une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, on conclut par récurrence que $B = I_n$. Ainsi, $Q = Q'$ et $R = R'$, d'où l'unicité de la décomposition QR.

Si maintenant on suppose que A n'est pas inversible, alors on ne peut pas appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, mais on peut appliquer le procédé d'orthogonalisation (sans normaliser). On obtient alors $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale, mais pas nécessairement libre (certains u_i sont nuls). On pose alors $\widetilde{Q} = [u_1|\dots|u_n]$ et $\widetilde{R}$ comme avant. On a bien $A = QR$, mais Q n'est pas orthogonale. Les u_i non nuls forment une famille libre (car orthogonale et de vecteurs non nuls), qu'on peut compléter en une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Les lignes de R correspondant à des u_i nuls étant nulles, le produit $\widetilde{Q}\widetilde{R}$ ne change pas si on remplace les colonnes nulles de Q par autre chose. Ainsi, on considère la famille orthogonale $(u'_i)_i$ obtenue à partie de la famille $(u_i)_i$ en remplaçant tous les termes nuls par des vecteurs orthogonaux aux autres. On pose finalement : $Q = \left[\frac{u_1}{||u_1||}\middle|\dots\middle|\frac{u_n}{||u_n||}\right]$ et $R = {}^t[||u_1||L_1|\dots|||u_n||L_n]$ où $R = {}^t[L_1|\dots|L_n]$ est l'écriture en ligne de $\widetilde{R}$. Alors Q est bien orthogonale et R bien triangulaire supérieure, à termes diagonaux positifs. Mais on n'a pas unicité de la décomposition, en particulier à cause du choix de complétion de la famille $(u_i)_i$.

Application On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de $A = [a_1|a_2|a_3]$:

1. $$u_1 = a_1 \text{ et } ||u_1|| = 3 \text{ et } e_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

2. $$u_2 = a_2 - \underbrace{\left(18 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} - 6 \times \frac{2}{3}\right)}_{\langle a_2, e_1\rangle = 9} e_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   Or, $||u_2||^2 = 2 \times 144 = (12\sqrt{2})^2$ donc :

$$e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{aligned} u_3 &= a_3 - \underbrace{\left(-15 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 15 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\langle a_3, e_2\rangle = 0} e_2 - \underbrace{\left(-15 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} - 15 \times \frac{2}{3}\right)}_{\langle a_3, e_1\rangle = -21} e_1 \\ &= \begin{pmatrix} -15 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} + 21 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Or, $||u_3||^2 = 1 + 16 + 1 = (3\sqrt{2})^2$. Donc :

$$e_3 = \begin{pmatrix} -1/(3\sqrt{2}) \\ 4/(3\sqrt{2}) \\ 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$Q = [e_1|e_2|e_3] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & 4\sqrt{2} \\ -4 & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} ||u_1|| & \langle a_2, e_1\rangle & \langle a_3, e_1\rangle \\ 0 & ||u_2|| & \langle a_3, e_2\rangle \\ 0 & 0 & ||u_3|| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -21 \\ 0 & 12\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

C'est la décomposition QR de A.

Solution 7 - (**) Projection sur un convexe fermé non vide (☛ exercice)

1. Soit $y, h \in E$. On a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle y+h, y+h\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle y, h\rangle + \langle h, h\rangle \leq 2||y||\,||h|| + ||h||^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

2. En particulier, l'application $y \in E \mapsto ||x-y||$ est continue comme composée de trois applications continues (translation par x, norme au carrée, racine carrée). Comme C est non vide, alors $C \cap E \neq \emptyset$. Or, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x, n)$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{B}(x,r) \cap C \neq \emptyset$. En particulier, cet ensemble est fermé comme intersection de deux fermés, et est borné car inclus dans $\overline{B}(x,r)$. Il est donc compact. L'application $y \mapsto ||x-y||$ étant continue, elle atteint son minimum sur ce compact. Notons $p_C(x)$ un point en lequel il est atteint. Montrons qu'en fait, $p_C(x)$ atteint le minimum sur C tout entier. C'est évidemment le cas car tous les éléments hors de $\overline{B}(x,r)$ sont à distance strictement supérieure à r de x, tandis que $||p_C(x) - x|| \leq r$.
3. Soit $y \in C$ un élément tel que $||x-y|| = ||x-p_C(x)||$. Alors par convexité de C, $(p_C(x)+y)/2 \in C$.

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2} + \frac{y-x}{2}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2}\right|\right| + \left|\left|\frac{y-x}{2}\right|\right| = ||p_C(x)-x||$$

Mais comme $p_C(x)$ réalise le minimum de la distance de x à C, on a aussi

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| \geq ||p_C(x) - x||$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \geq 0$ tel que $p_C(x) - x = \lambda(y-x)$. Comme $||p_C(x)-x|| = ||y-x||$, alors $\lambda = 1$, donc $y = p_C(x)$. D'où l'unicité.

Montrons la caractérisation. Montrons d'abord que $p_C(x)$ vérifie bien la caractérisation. Tout d'abord, $p_C(x) \in C$ par définition. De plus, par convexité de C, on a pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $y \in C$:

$$\begin{aligned}||x - p_C(x)||^2 &\leq ||x - (1-t)p_C(x) - ty||^2 \\ &= ||x - p_C(x) - t(y - p_C(x))||^2 \\ &= ||x - p_C(x)||^2 + t^2||y - p_C(x)||^2 - 2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $0 < t \leq 1$, on peut simplifier par $2t$:

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq \frac{t}{2}||y - p_C(x)||^2$$

On conclut en faisant tendre t vers 0.

Réciproquement, soit $z \in E$ vérifiant la caractérisation. Alors $z \in C$. De plus, si $y \in C$, on a :

$$||y-x||^2 = ||y-z+z-x||^2 = ||y-z||^2+||x-z||^2-2\langle x-z, y-z\rangle \geq ||y-z||^2+||x-z||^2 \geq ||x-z||^2$$

Ainsi, z atteint bien le minimum de la distance à x de tous les éléments de C. Par unicité d'un tel élément, $z = p_C(x)$. D'où la caractérisation de $p_C(x)$

4. Si 0 ne contient pas C, alors en particulier $p_C(0) \neq 0$, donc p_C n'est pas linéaire ! Montrons maintenant qu'elle est 1-lipschitzienne. Soient $x, y \in E$. On a les caractérisations :

$$\begin{aligned}\langle x - p_C(x), z - p_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall z \in C \\ \langle y - p_C(y), w - p_C(y)\rangle \leq 0 \quad \forall w \in C\end{aligned}$$

On prend alors $z = p_C(y)$ et $w = p_C(x)$, qui sont bien des éléments de C, et on somme ces inégalités :

$$0 \geq \langle x - p_C(x) - y + p_C(y), p_C(y) - p_C(x)\rangle = \langle x - y, p_C(y) - p_C(x)\rangle + ||p_C(x) - p_C(y)||^2$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||p_C(x) - p_C(y)||^2 \leq \langle x - y, p_C(x) - p_C(y)\rangle \leq ||x - y||\,||p_C(x) - p_C(y)||$$

Si $p_C(x) = p_C(y)$, on a l'inégalité voulue. Sinon, on divise par $||p_C(x) - p_C(y)||$ pour conclure.

5. Si C est un sous-espace vectoriel de E, alors on a toujours une application p_C bien définie car un sous-espace vectoriel de E est un convexe, fermé et est non vide. L'application $x \mapsto p_C(x)$ étant celle qui renvoie l'unique élément de C minimisant la distance à x, il s'agit de la projection orthogonale sur C. (c'est une des caractérisations de la projection orthogonale vue en cours). Sinon, on peut le retrouver via la caractérisation de C. En effet, si C est un

espace vectoriel, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in C$, $\lambda y \in C$. En particulier, la condition de l'angle obtus donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ \langle x - p_C(x), ty - p_C(x) \rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C,\ t\langle x - p_C(x), y \rangle \leq \langle x - p_C(x), p_C(x) \rangle$$

Donc $\langle x - p_C(x), y \rangle = 0$ pour tout $y \in C$, donc $x - p_C(x) \in C^{\perp}$.

Solution 8 - (**) Matrices de Gram (☞ exercice)

1. Si la famille (x_i) est liée, alors on a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tous nuls tel que $\sum \lambda_i x_i = 0$. Mais alors, si C_j est la j-ème colonne de $G(x_1, \dots, x_m)$, on a par linéarité du produit scalaire à droite $\sum \lambda_j C_j = {}^t\left(\langle x_i, \sum \lambda_j x_j \rangle\right)_j = 0$ (vecteur nul). Donc $G(x_1, \dots, x_m)$ n'est pas inversible.
   Réciproquement, si la famille (x_i) est libre : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que :
   $$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j C_j = \begin{pmatrix} \langle x_1, \sum_{i=1}^m \lambda_j x_j \rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, \sum_{i=1}^m \lambda_j x_j \rangle \end{pmatrix} = 0$$
   Donc l'élément $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ appartient à l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, mais c'est également un élément de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$. Donc $x = 0$. Par liberté de la famille $(x_1, \dots, x_m)$, tous les λ_i sont nuls, donc la famille des colonnes de $G(x_1, \dots, x_m)$ est libre. Donc G est inversible.
2. Comme $x \in F^{\perp}$, alors tous les $\langle x, x_i \rangle$ sont nuls. Ainsi, on a :
   $$G(x, x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_m, x_1 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} ||x||^2 & 0 \\ \hline 0 & G(x_1, \dots, x_m) \end{array}\right)$$
   D'où le résultat en prenant le déterminant.
3. Soit $p_F : E \to F$ la projection orthogonale sur F. On a alors $x = x - p_F(x) + p_F(x)$, et $d(x, F) = ||x - p_F(x)||$ (c'est une propriété du projeté orthogonal vue dans le cours). De plus, $p_F(x) \in F$, donc est combinaison linéaire des x_i. Par linéarité à droite du produit scalaire, la matrice de Gram $G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_m)$ s'obtient par opérations élémentaires

sur les colonnes de la matrice de Gram $G(x, x_1, \dots, x_m)$. En particulier, elles ont le même déterminant. Par la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} d(x,F)^2\,|G(x_1,\dots,x_m)| &= ||x - p_F(x)||^2\,|G(x_1,\dots,x_m)| = |G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_m)| \\ &= |G(x, x_1, \dots, x_m)| \end{aligned}$$

Comme la famille x_i est libre, le déterminant de Gram est non nul et on peut diviser l'inégalité par ce déterminant, on obtient ce qu'on veut.

Solution 9 - (**) Matrices orthogonales à coefficients positifs (☞ exercice)

Si $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$, montrons d'abord que chaque ligne de M contient au plus un élément non nul. En effet, si c'était faux, alors on aurait un indice i tel que $a_{i,j}$ et $a_{i,j'}$ soient non nuls, pour des certains $j \neq j'$. Mais alors, comme les colonnes de M forment une basse orthonormale (en particulier orthogonale), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}a_{k,j'} = 0 = \underbrace{a_{i,j}a_{i,j'}}_{>0} + \sum_{1\leq k\neq i\leq n} \underbrace{a_{k,j}a_{k,j'}}_{\geq 0} > 0$$

C'est absurde, donc chaque ligne contient au plus un élément non nul, qui est donc 1 car les lignes sont de norme 1 et les coefficients positifs. Ainsi, une matrice de $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est une matrice de permutation. Réciproquement, une matrice de permutation a ses colonnes de norme 1 et qui forment une famille orthogonale, c'est donc une matrice orthogonale. Donc $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des matrices de permutations.

Pour $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on montre que de même il ne peut y avoir qu'un seul coefficient par ligne, en utilisant le fait qu'elles soient de norme 1 (donc $\sum_j a_{i,j}^2 = 1$ est une somme d'éléments de $\mathbb{N}$ valant 1, donc exactement un seul terme est non nul, et il vaut 1). Ce terme est donc ± 1, et ainsi $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des permutations signées, et $SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des permutations signées de déterminant 1. Pour calculer son cardinal, on regarde nos choix :

- Pour le coefficient non nul de la première colonne, il y a $2n$ choix (sa position (n choix) et sa valeur (2 choix))
- Pour le coefficient non nul de la deuxième colonne, il y a $2(n-1)$ choix (sa position ($n-1$ choix car il est situé sur une ligne différente de celle du coefficient de la première colonne) et sa valeur (2 choix))
- ...
- Pour le coefficient non nul de l'avant-dernière colonne, il y a 2×2 choix (sa position (2 choix) et sa valeur (2 choix))

- Pour le dernier coefficient, on n'a pas le choix. Il est sur l'unique ligne vide restante, et sa valeur est celle qui rend le déterminant de la matrice positif.

Au total, on a donc $2^{n-1}n!$ choix. Donc $|SO_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})| = 2^{n-1}n!$

Remarque : En particulier, le même raisonnement donne que le cardinal de l'ensemble des matrices orthogonales à coefficient entiers est $2^n n!$, car cette fois on a le choix du signe pour le dernier coefficient

---

Solution 10 - (**) Matrices orthogonales et nilpotence (☞ exercice)

Tout d'abord, comme $u - \alpha \mathrm{id}_E$ est nilpotente, alors elle n'est pas inversible. Donc α est une valeur propre réelle de u, qui est donc 1 ou -1. Par réduction des endomorphismes orthogonaux, on a une base (orthonormée) de E dans laquelle la matrice de $u + \varepsilon \mathrm{id}_E$ est de la forme ($\varepsilon \in \{\pm 1\}$)

$$\begin{pmatrix} \pm 1 + \varepsilon & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 + \varepsilon & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) + \varepsilon & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) + \varepsilon \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) + \varepsilon & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) + \varepsilon \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Or, cette matrice est nilpotente, donc par un calcul par blocs, nilpotente d'indice au plus 2. On a donc $(u + \varepsilon \mathrm{id}_E)^2 = 0$. Ainsi, les termes des blocs 1×1 sont égaux à 0, et on a pour tout $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_i) + \varepsilon & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) + \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

Donc $2(\cos(\theta_i) + \varepsilon) = 0$, donc :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) + \varepsilon & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) + \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $u + \varepsilon \mathrm{id}_E = 0$. Donc $u = \pm \mathrm{id}_E$.
