Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

8 décembre 2022

Probabilités discrètes

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Lois usuelles (solution)

Définissez les lois :

- de BERNOULLI de paramètre p
- binomiale de paramètre (n, p)
- uniforme sur un ensemble fini non vide (on calculera la variance dans le cas où l'ensemble fini non vide est $[\![1, n]\!]$)
- géométrique de paramètre p
- de POISSON de paramètre λ

Connaissez-vous des liens entre elles ?

Exercice 2 - Formule des probabilités totales (solution)

Définissez la notion de probabilité conditionnelle et de système quasi-complet d'événements (quelle est la différence avec un système complet d'événements ?), puis énoncez la formule des probabilités totales.

Exercice 3 - Lemme des coalitions (solution)

Énoncez et démontrez le lemme des coalitions (on admettra que si Y, Z sont des variables aléatoires indépendantes, alors $f(Y)$ et $g(Z)$ le sont aussi pour des fonctions déterministes f et g)

Exercices

Exercice 4 - (*) Être auto-indépendant (solution)

Soit X une variable aléatoire discrète telle que X soit indépendante d'elle-même. Montrez que X est presque-sûrement constante (c'est-à-dire qu'il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$)

Exercice 5 - (**) Loi jointe et marginales (solution)

1. Soient Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Définissez les marginales de Z. Représentez cette notion à l'aide d'un tableau.

2. Donnez un exemple où X, Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles et Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telles que, si U, V sont les marginales de Z, alors $X \sim U$, $Y \sim V$ mais $(X, Y) \not\sim Z$.
3. Montrez que si X, Y sont indépendantes, alors la loi de $Z = (X, Y)$ est entièrement déterminée par les lois de X et Y. Montrez aussi que les lignes (respectivement les colonnes) du tableau représentant la loi jointe (X, Y) sont proportionnels.
4. Application : est-il possible de piper de manière identique deux dés à 6 faces tels que la variable aléatoire indiquant la somme obtenue suive une loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$?

Exercice 6 - (**) Pioches distinctes (solution ☞)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $E = [\![1, n]\!]$. Déterminez le cardinal de

$$\Gamma = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \ ; \ A \subset B\}$$

2. Application : On dispose d'une urne contenant n boucles numérotées de 1 à n. On pioche un certain nombre de boules (éventuellement nul), puis on les remet dans l'urne. On recommence une seconde fois. Quelle est la probabilité qu'on n'ait pas pioché deux fois la même boule ?

Exercice 7 - (**) Produit eulérien par les probabilités (solution ☞)
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrez que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ est un espace probabilisable.
2. Soit $\alpha > 1$ un réel. Montrez qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la forme

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^\alpha}$$

   Que vaut λ ?
3. Calculez $\mathbb{P}(n\mathbb{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que les événements $p\mathbb{N}$ pour $p \in \mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.
4. On numérote $\mathcal{P} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par ordre croissant ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...). Montrez que la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \left(1 - \frac{1}{p_1^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$$

converge, et donnez sa limite.

Remarque : Merci Téofil pour l'exercice !

Exercice 8 - (**) Cycles dans $\mathfrak{S}_n$ (solution ☜)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculez a_n le nombre de permutations dans $\mathfrak{S}_{2n}$ qui possèdent un cycle de longueur $> n$.
2. Calculez la limite de $\frac{a_n}{(2n)!}$.
3. Application : un méchant ingénieur enferme 100 mathématiciens dans une pièce, et leur dit la chose suivante :

   « J'ai noté chacun de vos prénoms sur un bout de papier, et j'ai placé au hasard ces 100 bouts de papiers dans 100 coffres différents dans la salle d'à côté. À tour de rôle, vous allez pouvoir accéder à cette salle et regarder dans 50 coffres de votre choix (en pensant bien à les refermer après). Ensuite, vous vous rendez dans une troisième salle, sans aucun moyen de communication avec les autres. Si à la fin de l'expérience, chacun d'entre vous a trouvé son nom dans l'un des coffres, vous êtes libres. Sinon, vous mourrez tous. Vous avez le droit de vous mettre d'accord sur une stratégie avant de commencer l'expérience, mais il vous est impossible de communiquer pendant. ».

   Montrez qu'il existe une stratégie qui fasse survivre tout le monde avec plus de 30% de chance.

   Remarque : On pourra utiliser le fait que $\ln(2) \simeq 0.69$ *et que 50 est assez grand pour que le développement limité de la série harmonique soit très précis*

Solutions des exercices

Solution 1 - Lois usuelles (☞ exercice)

- Soit $p \in [0,1]$. Alors $X \sim \mathcal{B}(p)$ si et seulement si $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$. On a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si et seulement si $\mathbb{P}(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$. On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini non vide. Alors $X \sim \mathcal{U}(E)$ si et seulement si $\forall x \in E$, $\mathbb{P}(X=x) = \dfrac{1}{n}$. On a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ et, si $E = [\![1,n]\!]$, $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
- Soit $p \in]0,1[$. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Soit $\lambda > 0$. Alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. On a alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est une somme de n lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes. Une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ est la loi du premier succès d'une suite de lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ indépendantes. Une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est une « limite »d'une suite de lois binomiales indépendantes $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

Solution 2 - Formule des probabilités totales (☞ exercice)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements. On suppose que $\mathbb{P}(A) > 0$(ie. A n'est pas presque-impossible), alors on définit la probabilité conditionnelle de B sachant A comme étant :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

La fonction $\mathbb{P}(\cdot|A) : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une mesure de probabilité sur Ω, qu'on appelle la probabilité conditionnelle sachant A.

Un système quasi-complet d'événements est une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ telle que

- Les événements de $\mathcal{C}$ ne sont pas impossibles (ie. ne sont pas l'ensemble vide)
- Les événements de $\mathcal{C}$ sont deux à deux incompatibles
- $\sum_{A \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(A) = 1$

Si $\mathcal{C}$ est un système complet d'événements, on remplace la dernière condition par

- $\bigsqcup_{A \in \mathcal{C}} A = \Omega$

La formule des probabilités totales est alors la suivante : soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements tous non presque-impossibles. Soit $B \in \mathcal{A}$. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Solution 3 - Lemme des coalitions (☞ exercice)

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires discrètes $\Omega \to E$ mutuellement indépendantes. Alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et toutes fonctions $f : E^k \to F$, $G : E^{n-k} \to G$ déterministes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Pour le prouver, on montre d'abord que les vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendants. Et on conclut par le fait que les images de variables aléatoires indépendantes par des applications déterministes sont indépendants. On calcule : pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_n(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k), (X_{k+1}, \dots, X_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n))\\ = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)\end{aligned}$$

De même :

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_k) = (x_1, \dots, x_k))\mathbb{P}((X_{k+1}, \dots, X_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Donc les vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendants.

Solution 4 - (*) Être auto-indépendant (☞ exercice)

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x, X = x) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(X = x)$ par indépendance. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) \in \{0, 1\}$. Comme $(\{X = x\})_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Ainsi, il existe un unique $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$, donc X est presque sûrement constante.

Solution 6 - (**) Pioches distinctes (☞ exercice)

1. Un élément $(A, B) \in \Gamma$ est entièrement déterminé par $A \subset E$ et $B \setminus A \subset E \setminus A$. Il n'y a aucune restriction sur le choix de A, donc il y a $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$ choix possibles. Pour B, il s'agit de choisir des éléments de $E \setminus A$, il y a donc $|\mathcal{P}(E \setminus A)|$ choix possibles. On découpe alors selon le cardinal de A : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour A. On a au total :

$$|\Gamma| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

2. Soit X la variable aléatoire « premier tirage » et Y la variable aléatoire « deuxième tirage ». Comme on fait les tirages l'un après l'autre en remettant les boules dans l'urne, X et Y sont indépendantes, et elles suivent la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$. On a alors :

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \emptyset) = \mathbb{P}(X \subset Y^c)$$

Or, Y^c suit la loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$, car pour tout $A \subset [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}(Y^c = A) = \mathbb{P}(Y = A^c) = 2^{-n}$$

Et Y^c est indépendante de X par le lemme des coalitions. Ainsi, le couple (X, Y^c) suit une loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])^2$. On a alors

$$\mathbb{P}(X \cap Y = \emptyset) = \mathbb{P}(X \subset Y^c) = \frac{|\Gamma|}{|\mathcal{P}([\![1, n]\!]|)} = \frac{3^n}{2^{2n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Solution 5 - (**) Loi jointe et marginales (☛ exercice)

1. Les marginales de Z sont les variables aléatoires discrètes réelles X et Y telles que $Z = (X, Y)$. Elles sont définies par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\forall y \in E,\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

où E est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ telle que Z prenne ses valeurs dans $E \times E$. On a la représentation suivante, en supposant pour simplifier les notations que Z est à valeurs dans $[\![1, n]\!]^2$

	1	2	$\dots$	n	$\sum$
1	$\mathbb{P}(Z=(1,1))$	$\mathbb{P}(Z=(1,2))$	$\dots$	$\mathbb{P}(Z=(1,n))$	$\mathbb{P}(X=1)$
2	$\mathbb{P}(Z=(2,1))$	$\mathbb{P}(Z=(2,2))$	$\dots$	$\mathbb{P}(Z=(2,n))$	$\mathbb{P}(X=2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\mathbb{P}(Z=(n,1))$	$\mathbb{P}(Z=(n,2))$	$\dots$	$\mathbb{P}(Z=(n,n))$	$\mathbb{P}(X=n)$
$\sum$	$\mathbb{P}(Y=1)$	$\mathbb{P}(Y=2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(Y=n)$	

2. On considère $Z=(U,V)$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{0,1\}^2$ donnée par le tableau suivant

	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0

Alors $\mathbb{P}(U=0)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(U=1)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$. De même pour V. En particulier, U et V suivent des lois uniformes sur $\{0,1\}$. Soient X,Y deux lois uniformes sur $\{0,1\}$ indépendantes. Alors $X\sim U$ et $Y\sim V$. Mais pourtant, $\mathbb{P}((X,Y)=(0,0))=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}((U,V)=(0,0))$. En particulier, les marginales ne définissent pas la loi conjointe !

3. Si X et Y sont indépendantes, et si $Z=(X,Y)$, alors on a pour tout $(k,l)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathbb{P}(Z=(k,l))=\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=l)$. Ainsi, les marginales X et Y déterminent entièrement Z. On a de plus le tableau de la loi de Z :

	1	2	$\dots$	n
1	$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)$	$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=n)$
2	$\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1)$	$\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=1)$	$\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n)$

En particulier, si $i\neq j$, alors la colonne i est soit nulle si $\mathbb{P}(Y=i)=0$, donc proportionnelle à la colonne j, soit $\mathbb{P}(Y=i)\neq 0$ et la colonne j est égale à la colonne i multipliée par $\dfrac{\mathbb{P}(Y=j)}{\mathbb{P}(Y=i)}$, qui sont donc proportionnels. De même pour les lignes.

4. Supposons que nous ayons X,Y deux variables aléatoires sur $[\![1,6]\!]$ indépendantes telles que $X+Y\sim\mathcal{U}([\![2,12]\!])$. Comme X et Y sont indépendantes, elles définissent entièrement la loi conjointe de $Z=(X,Y)$. Dans le tableau définissant la loi de Z, comme $X+Y$ suit une loi uniforme, les anti-diagonales sont toutes de somme $\dfrac{1}{11}$. De plus, comme X et Y ont même loi, le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale principale.
Ainsi, on a $\mathbb{P}(X+Y=2)=\dfrac{1}{11}=\mathbb{P}(Z=(1,1))=\mathbb{P}(X=1)^2$. Donc $\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$.

De plus, $\mathbb{P}(X+Y=3)\dfrac{1}{11}=\mathbb{P}(Z=(1,2))+\mathbb{P}(Z=(2,1))=2\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=2)$. Donc $\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{2\sqrt{11}}$. En particulier, $\mathbb{P}(Z=(2,2))=\dfrac{1}{44}$. On est en train de remplir petit à petit les cases du tableau de la loi de Z. On montre par récurrence que les valeurs de $\mathbb{P}(Z=(k,l))$ sont toutes rationnelles. C'est vrai pour $(k,l)=(1,1)$. On suppose vrai le résultat pour $(k,l)\leq m-1$. On a alors le tableau :

	1	$\dots$	$m-1$	m	$\dots$
1	$\in\mathbb{Q}$	$\dots$	$\in\mathbb{Q}$	α	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
$m-1$	$\in\mathbb{Q}$	$\dots$	$\in\mathbb{Q}$		
m	α				
$\vdots$					

Ainsi, comme la somme de l'anti-diagonale de rang m est égale $\dfrac{1}{11}$, alors $2\alpha\in\mathbb{Q}$ donc $\alpha\in\mathbb{Q}$. De plus, les rapport de proportionnalité entre les colonnes i et $i+1$ pour $i\leq m-2$ sont rationnels. Ainsi, on obtient que :

	1	$\dots$	$m-1$	m	$\dots$
1	$\in\mathbb{Q}$	$\dots$	$\in\mathbb{Q}$	$\alpha\in\mathbb{Q}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$m-1$	$\in\mathbb{Q}$	$\dots$	$\in\mathbb{Q}$	$\in\mathbb{Q}$	
m	$\alpha\in\mathbb{Q}$	$\dots$	$\in\mathbb{Q}$	$\in\mathbb{Q}$	
$\vdots$					

D'où l'itération. Mais alors, comme toutes les cases du tableau sont rationnelles, on a $\mathbb{P}(Z=(k,l))\in\mathbb{Q}$ pour tout $(k,l)\in[\![1,6]\!]^2$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{11}}=\mathbb{P}(X=1)=\sum_{l=1}^{6}\mathbb{P}(Z=(1,l))\in\mathbb{Q}$. C'est absurde. Donc il est impossible de truquer deux dés de manière identique de sorte que la loi « somme des chiffres » soit uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

Remarque : Une solution plus simple à ce problème, qui contient également le cas où X et Y ne suivent pas la même loi, peut être obtenue en considérant des fonctions génératrices, mais ce n'est pas au programme de colle

---

Solution 7 - (**) Produit eulérien par les probabilités (☞ exercice)

1. C'est un résultat du cours : si Ω est un ensemble, alors $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω. Donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.
2. On procède par analyse-synthèse :
   - Analyse : Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité définie comme dans l'énoncé. Alors

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha} = \lambda\zeta(\alpha)$$

   Ainsi, $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)}$.
   - Synthèse : On pose $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(\alpha)}$ et $\mathbb{P}$ définie par

   $$\forall A \subset \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A) = \sum_{n\in A} \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n\in A} \frac{1}{n^\alpha}$$

   On vérifie que c'est bien une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On a

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$$

   par l'analyse, et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Il reste à montrer la σ-additivité : soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes. Alors

   $$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \sum_{n\in A_i} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

   Donc $\mathbb{P}$ est l'unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la forme voulue, ce qui fait de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
3. Par σ-additivité, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(n\mathbb{N}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{kn\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(kn)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$$

et $\mathbb{P}(0\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\{0\}) = 0$. Si $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ sont deux à deux distincts, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(p_1\mathbb{N} \cap \dots \cap p_k\mathbb{N}) &= \mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}\ ;\ p_1|n,\ \dots,\ p_k|n\}) = \mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}\ ;\ (p_1 \dots p_k)|n\}) \\ &= \mathbb{P}(p_1 \dots p_k\mathbb{N}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_k)^\alpha} = \mathbb{P}(p_1\mathbb{N}) \dots \mathbb{P}(p_k\mathbb{N})\end{aligned}$$

Ainsi, les événements $p\mathbb{N}$ pour $p \in \mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

4. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (1 - \mathbb{P}(p_1\mathbb{N}))\dots(1 - \mathbb{P}(p_n\mathbb{N})) = \mathbb{P}((p_1\mathbb{N})^c)\dots\mathbb{P}((p_n\mathbb{N})^c)$$

Or, les événements $p_1\mathbb{N}, \dots, p_n\mathbb{N}$ sont mutuellement indépendants, donc aussi les événements $(p_1\mathbb{N})^c, \dots, (p_n\mathbb{N})^c$ par le lemme des coalitions. Ainsi, on a

$$u_n = \mathbb{P}((p_1\mathbb{N})^c \cap \dots \cap (p_n\mathbb{N})^c) = \mathbb{P}((p_1\mathbb{N} \cup \dots \cup p_n\mathbb{N})^c) = 1 - \mathbb{P}(p_1\mathbb{N} \cup \dots \cup p_n\mathbb{N})$$

Or, on a :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\uparrow (p_1\mathbb{N} \cup \dots \cup p_n\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

En effet, l'union est clairement croissante, et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il existe un nombre premier $p \in \mathbb{P}$ tel que $p|n$, ainsi, $n \in p\mathbb{N}$.

Ainsi, comme l'union est croissante, on a par continuité croissante :

$$u_n = 1 - \mathbb{P}(p_1\mathbb{N} \cup \dots \cup p_n\mathbb{N}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \mathbb{P}(\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \zeta(\alpha)$$

On vient de démontrer le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\forall \alpha > 1 \; ; \; \zeta(\alpha) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)$$

Solution 8 - (**) Cycles dans $\mathfrak{S}_n$ (☛ exercice)

1. Soit $A \subset \mathfrak{S}_{2n}$ le sous-ensemble constitué des permutations qui possèdent un cycle de longueur $> n$. Chaque élément de A n'a donc qu'un unique cycle de longueur $> n$, et il est alors déterminé par :
   - La longueur de cet unique cycle de longueur $> n$: c'est un entier $j \in [\![n+1, 2n]\!]$
   - Pour chaque longueur j, le support du cycle : c'est une partie de $[\![1, 2n]\!]$ de cardinal j, il y a $\binom{2n}{j}$ choix
   - Pour chaque support, le cycle effectué dessus : une fois le premier élément fixé, il y a autant de choix que de permutations des $j-1$ autres : $(j-1)!$ choix
   - Pour chaque cycle, une permutation quelconque sur le complémentaire du support : $(2n-j)!$ choix

Ainsi, on a :

$$a_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j} (j-1)!(2n-j)! = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{(2n!)}{j} = (2n)!H_{2n} - H_n$$

où $H_n = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$ est la série harmonique.

2. En utilisant le développement limité classique de la série harmonique, on a :

$$\frac{a_n}{(2n)!} = H_{2n} - H_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2) + o(1)$$

Donc $\frac{a_n}{(2n)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2) \simeq 0.69$

3. Les mathématiciens se donnent chacun un numéro unique entre 1 et 100, et se fixent un ordre sur les boites aussi (par exemple en « serpent »), de sorte qu'on ait une permutation σ(« boîte i ») = « mathématicien j » une fois que le méchant ingénieur place les papiers dans les boîtes. Déjà, montrons que la stratégie naïve consistant à regarder dans des boîtes au hasard est très mauvaise : chaque mathématicien aura une chance sur deux de tomber sur son numéro, donc la probabilité que tout le monde trouve son nom est 2^{-100}, soit environ 8×10^{-31}. Autrement dit, la mort est certaine.

   On va utiliser le fait qu'il y a moins de 70% de chance que σ ait un cycle de longueur > 50 grâce aux questions précédentes. Ainsi, il y a plus de 30% de chance que tous les cycles de σ soient de longueur ≤ 50. La stratégie est alors la suivante : On commence par regarder dans la boîte portant notre numéro. Si on a trouvé notre nom dedans, on part. Sinon, on ouvre la boîte dont le numéro est celui de la personne qui était marqué dans la boîte qu'on vient de regarder. Et on recommence. Comme tous les cycles de σ sont de longueur ≤ 50, on va nécessairement tomber un moment sur une boîte contenant notre numéro. Ainsi, dans le cas où tous les cycles de σ sont de longueur au plus 50, tout le monde retrouve son nom en utilisant cette stratégie, ce qui arrive avec au moins 30% de chance.