Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

12 décembre 2022

Continuité, compacité

Table des matières

Questions de cours

Exercice 1 - Fonction distance (solution ☜)
Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie non vide de E. Définissez la fonction « distance à A ». Donnez une condition nécessaire et suffisante sur A pour que cette fonction soit identiquement nulle, pour que cette fonction soit une norme sur E. Montrez que cette fonction est 1-lipschitzienne. Est-elle uniformément continue ?

Exercice 2 - Application linéaire continue (solution ☜)
Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrez que f est continue si et seulement si

$$\exists C \geq 0,\ \forall x \in E,\ ||f(x)||_F \leq C\,||x||_E$$

Exercice 3 - Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ (solution ☜)
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, que dire d'une application $x \in E \mapsto f(x)$ polynômiale en les coordonnées de x ? Montrez que les applications $M \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(M)$, $(M, N) \mapsto MN$ et $M \mapsto {}^tM$ sont continues. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ et ouvert et que $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrez de plus que l'ensemble des matrices orthogonales est compact.

Exercices

Exercice 4 - (**) Suite de matrices orthogonales (solution ☜)

1. Montrez que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Application : Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in O_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$M_k + M_k^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 2I_n$$

Que dire de la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5 - (**) Continuité et noyau (solution ☞)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé et f une forme linéaire sur E.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrez que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrez que $\ker(f)$ est un sous-espace soit fermé, soit dense dans E
3. Montrez que f est continue si et seulement si $\ker(f)$ est fermé.

Exercice 6 - (**) Topologie et réduction (solution ☞)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S_A = \{PAP^{-1} \; ; \; P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ sa classe de similitude.

1. Montrez que si A est inversible, alors $\overline{S_A} \subset GL_n(\mathbb{C})$
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrez qu'il existe C une constante positive telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice triangulaire supérieure dans S_A telle que les coefficients sur-diagonaux soient tous de module $\leq C\varepsilon$.
3. Montrez que si S_A est fermé, alors A est diagonalisable.
   Remarque : En fait, on a une équivalence, mais cela fait intervenir plus de réduction que ce qui a été vu jusqu'à présent (en particulier le polynôme minimal)

Exercice 7 - (**) Contraction et point fixe (solution ☞)

Soit E un espace vectoriel normé, et $K \subset E$ une partie compacte non vide. Soit $f : K \to K$.

1. On suppose que f et L-lipschitzienne pour $0 \leq L < 1$. En utilisant la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_0 \in K$, montrez que f admet un point fixe, et que ce dernier est unique.
2. Donnez un exemple de fonction f 1-lipschitzienne telle que f admette une infinité de points fixes, et un autre exemple où elle n'en admet aucun. Donnez également un exemple d'une fonction L-lipschitzienne pour $0 < L < 1$ définie sur un sous-ensemble non compact qui n'admet aucun point fixe.
3. On suppose maintenant que f vérifie :

$$\forall x \neq y \in K, \; ||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$$

   Montrez que f peut ne pas être L-lipschitzienne pour $0 \leq L < 1$. En étudiant la fonction $g : x \mapsto ||f(x) - x||$, montrez que f admet un unique point fixe.

Exercice 8 - (***) Projection sur un convexe fermé non vide (solution ☞)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit C un sous-ensemble convexe, fermé et non vide de E. Le but de l'exercice est de définir une projection sur C.

1. Soit $||.||$ la norme associée au produit scalaire. Montrez qu'elle est continue sur E.
2. Soit $x \in E$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel que $C \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset$. En déduire qu'il existe un élément $p_C(x) \in C$ tel que $||x - p_C(x)|| = \inf_{y \in C} ||x - y||$
3. Montrer qu'un tel élément est unique, puis qu'il est caractérisé par :
$$\begin{cases} p_C(x) \in C \\ \forall y \in C \, , \, \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{(condition de l'angle obtus)} \end{cases}$$
<u>*Indication :*</u> *Pour le sens direct, on pourra regarder $||x-(1-t)p_C(x)-ty||^2$, pour le sens réciproque, on pourra développer $||x - z||^2$ judicieusement, où z vérifie la caractérisation de $p_C(x)$*
4. Montrez que p_C n'est pas linéaire dans le cas général. Montrez que p_C est 1-lipschitzienne.
5. Que dire à propos de p_C si C est un sous-espace vectoriel de E ?

Solutions des exercices

Solution 1 - Fonction distance (☞ exercice)
On définit la fonction distance à A par : pour tout $x \in E$, $d(x,A) = \inf_{a \in A} ||x-a||$. C'est bien défini car A est non vide, donc l'inf porte sur une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Elle est identiquement nulle si et seulement si A est dense dans E. En effet, si A est dense dans E, alors par définition $d(x,A) = 0$ pour tout $x \in E$, et réciproquement, si $d(x,A) = 0$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x, donc A est dense dans E. Pour que cette fonction soit une norme sur E, il faut et il suffit que $A = \{0\}$. En effet, si c'est le cas, alors $d(\cdot, A) = ||\cdot||$ est une norme, et si ce n'est pas le cas, disons que $y \in A \setminus \{0\}$, alors $d(y,A) = 0$ donc cette fonction n'est pas séparante, donc pas une norme sur E.

Enfin, on a par inégalité triangulaire

$$\inf_{a\in A} ||x-a|| - \inf_{a'\in A} ||y-a'|| \leq ||x-y|| + \inf_{a\in A} ||y-a|| - \inf_{a'\in A} ||y-a'|| = ||x-y||$$

et

$$\inf_{a\in A} ||x-a|| - \inf_{a'\in A} ||y-a'|| \geq \inf_{a\in A} ||x-a|| - (||x-y|| + \inf_{a'\in A} ||x-a'||) = -\, ||x-y||$$

donc

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq ||x-y||$$

Donc la distance à A est 1-lipschitzienne, donc en particulier uniformément continue.

Solution 2 - Application linéaire continue (☞ exercice)
TODO

Solution 3 - Topologie dans $M_n(\mathbb{K})$ (☞ exercice)
TODO

Solution 4 - (**) Suite de matrices orthogonales (☞ exercice)

1. Comme $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2, il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $M_n(\mathbb{R})$. C'est un fermé car l'application $\varphi : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA$ est continue, par continuité de la transposée et de la multiplication matricielle (polynômiale en les coordonnées). Or, $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(I_n)$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc est fermé. De plus, c'est un ensemble borné car pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a

$||A||_2 = 1$ (les colonnes de A forment une famille orthonormée pour la norme euclidienne). C'est donc bien un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Comme $O_n(\mathbb{R})$ est un compact, alors la suite $(M_k)_k$ admet une sous-suite convergente, notons $M = \lim_{k\to+\infty} M_{\varphi(k)}$, on a $M \in O_n(\mathbb{R})$. De plus, par continuité de la transposée matricielle, la suite $(M_{\varphi(k)}^{-1})_k = ({}^tM_{\varphi(k)})_k$ converge vers ${}^tM = M^{-1}$ car $M \in O_n(\mathbb{R})$.
   Remarque : L'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas du tout immédiat contrairement à la continuité de la transposée et de la multiplication matricielle

   Ainsi, on a $M + M^{-1} = 2I_n$. Or, $M, M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, donc $Tr(M) \leq n$ et $Tr(M^{-1}) \leq n$ (car les coefficients d'une matrice orthogonale dans à valeurs dans $[-1, 1]$, car les colonnes sont normées). Donc $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M^{-1}) = n$. Cela n'est possible que si les coefficients diagonaux de M et M^{-1} sont égaux à 1. Comme les colonnes sont normées, alors ce sont les seuls coefficients non nul de chaque colonne, donc $M = M^{-1} = I_n$. Ainsi, la suite $(M_{\varphi(k)})_k$ converge vers l'identité.

   Ce qu'on vient de faire est vrai pour toute valeur d'adhérence de la suite $(M_k)_k$, donc cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence, l'identité, et est à valeurs dans un compact, donc elle converge vers I_n.

Remarque : On peut penser que le résultat reste vrai pour toute matrice à coefficient dans $[-1, 1]$ car on n'a pas explicitement utilisé l'orthogonalité des colonnes, mais on a eu besoin du fait que la suite des inverse avait aussi ses coefficients dans $[-1, 1]$, ce qui n'est pas toujours le cas lorsque les matrices ne sont pas orthogonales, et l'exemple le plus simple existe dès le cas $n = 1$!

Solution 5 - (**) Continuité et noyau (☞ exercice)

1. On utilise la caractérisation séquentielle des fermés : soient $x, y \in \overline{F}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $(x_n)_n, (y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers x et y. Alors par continuité de la somme et de la multiplication par un scalaire,

$$\lambda x_n + \mu y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x + \mu y$$

   Or, la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_n$ est à valeurs dans F car c'est un sous-espace vectoriel de E, donc la limite $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$, qui est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

2. Par ce qui précède, $\overline{\ker(f)}$ est un sous-espace vectoriel fermé. Si f est nulle, alors $\ker(f) = E$ est bien-sûr dense dans E. Sinon, alors $\ker(f)$ est de codimension 1, et inclus dans $\overline{ker(f)}$. On a donc exactement deux cas :
   - Soit $\ker(f) = \overline{\ker(f)}$, et alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E

- Soit $\ker(f) \subsetneq \overline{\ker(f)}$, et alors $\overline{\ker(f)} = E$, donc $\ker(f)$ est dense dans E

3. Si f est continue, alors $\ker(f) = f^{-1}(0)$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé. Montrons le sens réciproque, qui demande un peu de travail. On raisonne par contraposée. Si f n'est pas continue, alors elle est en particulier non nulle, mais il existe également une suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires tels que $0 \neq |f(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (car f est continue si et seulement si l'image de la boule unité de E est bornée). Comme f est non nulle, il existe $x \in E \setminus \ker(f)$ car $\ker(f)$ est de codimension 1. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n$$
La suite $(u_n)_n$ est une suite de E qui vérifie $f(u_n) = f(x) - f(x) = 0$, c'est donc une suite d'éléments de $\ker(f)$. Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \notin \ker(f)$, donc $\ker(f)$ n'est pas fermé.

Solution 6 - (**) Topologie et réduction (☛ exercice)

1. Soit $B \in \overline{S_A}$ limite de $(B_n)_n \in (S_A)^{\mathbb{N}}$. Comme le déterminant est invariant par conjugaison, on a $\det(B_n) = \det(A)$ pour tout n, donc par continuité du déterminant, on a $\det(B) = \det(A) \neq 0$. Donc B est inversible.
2. Comme A est une matrice complexe, elle est trigonalisable. On écrit $P^{-1}AP = T$ où T est triangulaire supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$. Alors la matrice $D^{-1}TD$ est triangulaire supérieure, de même diagonale que T, et le coefficient en (i,j) pour $i < j$ est $\varepsilon^{j-i}T_{i,j}$. On pose alors $C = \max_{i<j} |T_{i,j}|$, et alors $(PD)^{-1}A(PD)$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur-diagonaux sont tous de module $\leq C\varepsilon$
3. On prend une suite de matrices triangulaires semblables à A dont les coefficients sur-diagonaux tendent vers 0 par la question précédente. Alors la limite est une matrice diagonale, qui est conjuguée à A car la classe de similitude de A est fermée. Donc A est diagonalisable.
   Remarque : Pour le sens réciproque, l'idée est de montrer que tout élément de l'adhérence de S_A est diagonalisable en montrant que π_A annule un tel élément, puis de montrer qu'il appartient à la classe de similitude de A en montrant l'égalité des polynômes caractéristiques car deux matrices ***diagonalisables*** *ayant le même polynôme caractéristique sont semblables*

Solution 7 - (**) Contraction et point fixe (☛ exercice)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$||u_{n+1} - u_n|| = ||f(u_n) - f(u_{n-1})|| \leq L\,||u_n - u_{n-1}||$$

Par une récurrence immédiate, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||u_{n+1} - u_n|| \leq L^n\,||u_1 - u_0||$$

Donc la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers zéro, et la suite $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence car elle est à valeurs dans un compact. Ainsi, $(u_n)_n$ converge, vers un élément $a \in K$. Par continuité de f, on a $f(a) = a$ en passant à la limite dans $f(u_n) = u_{n+1}$, donc a est un point fixe de f. Finalement, si $b \in K$ est un point fixe de f, alors on a

$$||b - a|| = ||f(b) - f(a)|| \leq L\,||b - a||$$

ce qui n'est possible que si $a = b$ car $0 \leq L < 1$. Donc f admet un unique point fixe.

2. La fonction identité sur $[0, 1]$ est 1-lipschitzienne et admet une infinité de points fixes. La fonction $z \mapsto iz$ sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ est 1-lipschitzienne et n'admet aucun point fixe. Enfin, la fonction $x \mapsto x/2$ sur $]0, 1]$ est 1/2-lipschitzienne mais n'admet aucun point fixe.

3. La fonction $x \mapsto x^2/2$ sur $[0, 1]$ vérifie $|x^2/2 - y^2/2| < |x - y|$ mais elle n'est pas L-lipschitzienne pour un $L < 1$ car (par exemple)

$$\frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{2}\right|}{\left|1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|} = \frac{1}{2}\left(n - n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(n - n + 2 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi, on ne peut pas appliquer ce qui précède. Pour contourner ce problème, on étudie la fonction $g : x \mapsto ||f(x) - x||$. g est continue comme composée de fonctions continues. Ainsi, elle atteint ses bornes. On note a un minimum de g sur K. Montrons que a est un point fixe de f. On suppose par l'absurde que $f(a) \neq a$. On a alors

$$g(f(a)) = ||f(f(a)) - f(a)|| < ||f(a) - a|| = g(a)$$

ce qui contredit le fait que a soit un minimum de g. Donc $f(a) = a$ et a est un point fixe de f. Il est unique car si b est un autre point fixe de f, on a $||a - b|| = ||f(a) - f(b)|| < ||a - b||$, ce qui est absurde. Donc f admet un unique point fixe.

Solution 8 - (***) Projection sur un convexe fermé non vide (☞ exercice)

1. Soit $y, h \in E$. On a alors par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\langle y+h, y+h\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle y, h\rangle + \langle h, h\rangle \leq 2||y||\,||h|| + ||h||^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

   Ainsi, en composant à gauche par la racine carrée, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$, la norme euclidienne est continue sur E.

2. En particulier, l'application $y \in E \mapsto ||x-y||$ est continue comme composée de deux applications continues (translation par x, norme euclidienne). Comme C est non vide, alors $C \cap E \neq \emptyset$. Or, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(x, n)$. Donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{B}(x, r) \cap C \neq \emptyset$. En particulier, cet ensemble est fermé comme intersection de deux fermés, et est borné car inclus dans $\overline{B}(x, r)$. Il est donc compact. L'application $y \mapsto ||x-y||$ étant continue, elle atteint son minimum sur ce compact. Notons $p_C(x)$ un point en lequel il est atteint. Montrons qu'en fait, $p_C(x)$ atteint le minimum sur C tout entier. C'est évidemment le cas car tous les éléments hors de $\overline{B}(x, r)$ sont à distance strictement supérieure à r de x, tandis que $||p_C(x) - x|| \leq r$.

3. Soit $y \in C$ un élément tel que $||x-y|| = ||x-p_C(x)||$. Alors par convexité de C, $(p_C(x)+y)/2 \in C$.

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| = \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2} + \frac{y-x}{2}\right|\right| \leq \left|\left|\frac{p_C(x)-x}{2}\right|\right| + \left|\left|\frac{y-x}{2}\right|\right| = ||p_C(x) - x||$$

   Mais comme $p_C(x)$ réalise le minimum de la distance de x à C, on a aussi

$$\left|\left|\frac{p_C(x)+y}{2} - x\right|\right| \geq ||p_C(x) - x||$$

   Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $\lambda \geq 0$ tel que $p_C(x) - x = \lambda(y-x)$. Comme $||p_C(x) - x|| = ||y-x||$, alors $\lambda = 1$, donc $y = p_C(x)$. D'où l'unicité.

   Montrons la caractérisation. Montrons d'abord que $p_C(x)$ vérifie bien la caractérisation. Tout d'abord, $p_C(x) \in C$ par définition. De plus, par convexité de C, on a pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $y \in C$:

$$\begin{aligned} ||x - p_C(x)||^2 &\leq ||x - (1-t)p_C(x) - ty||^2 \\ &= ||x - p_C(x) - t(y - p_C(x))||^2 \\ &= ||x - p_C(x)||^2 + t^2||y - p_C(x)||^2 - 2t\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $0 < t \leq 1$, on peut simplifier par $2t$:

$$\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq \frac{t}{2} ||y - p_C(x)||^2$$

On conclut en faisant tendre t vers 0.

Réciproquement, soit $z \in E$ vérifiant la caractérisation. Alors $z \in C$. De plus, si $y \in C$, on a :

$$||y-x||^2 = ||y-z+z-x||^2 = ||y-z||^2+||x-z||^2-2\langle x-z, y-z\rangle \geq ||y-z||^2+||x-z||^2 \geq ||x-z||^2$$

Ainsi, z atteint bien le minimum de la distance à x de tous les éléments de C. Par unicité d'un tel élément, $z = p_C(x)$. D'où la caractérisation de $p_C(x)$

4. Si 0 ne contient pas C, alors en particulier $p_C(0) \neq 0$, donc p_C n'est pas linéaire ! Montrons maintenant qu'elle est 1-lipschitzienne. Soient $x, y \in E$. On a les caractérisations :

$$\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$$
$$\langle y - p_C(y), w - p_C(y) \rangle \leq 0 \quad \forall w \in C$$

On prend alors $z = p_C(y)$ et $w = p_C(x)$, qui sont bien des éléments de C, et on somme ces inégalités :

$$0 \geq \langle x - p_C(x) - y + p_C(y), p_C(y) - p_C(x) \rangle = \langle x - y, p_C(y) - p_C(x) \rangle + ||p_C(x) - p_C(y)||^2$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$||p_C(x) - p_C(y)||^2 \leq \langle x - y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq ||x - y|| \, ||p_C(x) - p_C(y)||$$

Si $p_C(x) = p_C(y)$, on a l'inégalité voulue. Sinon, on divise par $||p_C(x) - p_C(y)||$ pour conclure.

5. Si C est un sous-espace vectoriel de E, alors on a toujours une application p_C bien définie car un sous-espace vectoriel de E est un convexe, fermé et est non vide. L'application $x \mapsto p_C(x)$ étant celle qui renvoie l'unique élément de C minimisant la distance à x, il s'agit de la projection orthogonale sur C. (c'est une des caractérisations de la projection orthogonale vue en cours). Sinon, on peut le retrouver via la caractérisation de C. En effet, si C est un espace vectoriel, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in C$, $\lambda y \in C$. En particulier, la condition de l'angle obtus donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C, \ \langle x - p_C(x), ty - p_C(x) \rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in C, \ t\langle x - p_C(x), y \rangle \leq \langle x - p_C(x), p_C(x) \rangle$$

Donc $\langle x - p_C(x), y \rangle = 0$ pour tout $y \in C$, donc $x - p_C(x) \in C^\perp$.