Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

10 janvier 2023

Topologie
Suites et séries de fonctions

Table des matières

Questions de cours

Topologie

Exercice 1 - Application linéaire continue (solution ☜)
Soient $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrez que f est continue si et seulement si

$$\exists C \geq 0,\ \forall x \in E,\ ||f(x)||_F \leq C\,||x||_E$$

Exercice 2 - Théorème des valeurs intermédiaires (solution ☜)
Énoncez et démontrez le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction définie sur un espace vectoriel normé.

Application : Montrez que toute fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ admet un point fixe.

Suites et séries de fonctions

Exercice 3 - Modes de convergence (solution ☜)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Définissez les notions de convergence normale, absolue, uniforme et simple. Y a-t-il des implications entre ces différents modes de convergences ? Essayez de donner autant que possible des contre-exemples.

Exercices

Topologie

★★☆ **Exercice 4 - $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ (solution ☜)**
Montrez que $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ est connexe par arcs si $d \geq 2$.

★☆☆ **Exercice 5 - Connexité par arcs de la sphère unité (solution ☜)**
Soit E un espace vectoriel normé de dimension au moins 2, et éventuellement infinie. Montrez que

la sphère unité est connexe par arcs.

★★☆ Exercice 6 - Connexité dans les espaces de matrices (solution ☞)

1. Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Est-ce que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ?
   <u>Indication :</u> On pourra considérer l'application polynomiale $t \in \mathbb{C} \mapsto \det(tB + (1-t)A)$
3. Montrez que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. On admet que les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$. Quelles sont les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$?

Transition

★⯪☆ Exercice 7 - Exponentielle matricielle

On se place dans l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{C})$ muni de la norme euclidienne. On admet qu'il s'agit d'une norme d'algèbre. On considère la série de fonctions $M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(M \mapsto \frac{M^k}{k!} \right)$$

1. Montrez que cette série converge normalement sur tout compact de $M_n(\mathbb{C})$
2. On note exp la limite sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrez que la fonction exp est continue. Calculez $\exp(0_n)$ et $\exp(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$.
3. Montrez que si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$
4. Montrez que $\sigma(\exp(A)) = \exp(\sigma(A))$.
5. Montrez que pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(M) \in \mathbb{C}[M]$.
6. Montrez que si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. En considérant les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrez que cette égalité n'est pas vraie dans le cas général
7. En déduire que $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$
8. On suppose que exp est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$. Montrez que toute matrice inversible complexe admet une racine k-ième pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

9. Si $\theta \in \mathbb{R}$, calculez
$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Remarque : Je ne prévois pas de poser toutes les questions, il y en a beaucoup et c'est fait exprès

---

Suites et séries de fonctions

Exercice 8 - Intégrales itérées (solution)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On définit $L : E \to E$ par
$$\forall f \in E, \quad L(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrez que $L \in \mathcal{L}_c(E)$.
2. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $||L^n||_{op} \leq 2^{-(n-1)}$.
3. En déduire que pour tout $f \in E$, la suite définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ converge uniformément vers zéro.

Exercice 9 - Bernstein et dérivées (solution)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ le n-ième polynôme de Bernstein de f :
$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On admet le résultat suivant :

Théorème (Bernstein) *La suite de fonction $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur* $[0,1]$.

Dans cet exercice, on démontre un fait remarquable. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors la suite $(B_n(f)')_n$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

1. Montrez que dans le cas général, si une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ f, alors la suite $(f'_n)_n$ ne converge pas nécessairement vers f'.

2. Montrez que :

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(f)'(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(t)dt$$

3. En utilisant l'uniforme continuité de f', montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in [0,1]$, on ait :

$$|B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| \leq \varepsilon$$

4. En utilisant le théorème de Bernstein, en déduire que la suite $(B_n(f)')_n$ converge uniformément vers f' sur $[0,1]$

★★☆ Exercice 10 - Limite uniforme de polynômes (solution)

1. Connaissez-vous le théorème d'approximation de Weierstrass ? Si oui, énoncez-le.
2. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Le but de l'exercice est de démontrer que f est polynômiale. Montrez d'abord qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que $P_{n+1} = c_n + P_n$.
3. En déduire qu'il existe un rang $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, il existe une constante $s_n \in \mathbb{R}$ telle que $f = s_n + P_N$. En déduire que f est polynômiale.
4. Application : montrez (sans utiliser l'exercice) que la fonction exponentielle n'est pas polynômiale, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 + x/n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$. En déduire que cette convergence (simple) ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

Solutions des exercices

Solution 1 - Application linéaire continue (☞ exercice)

Le sens réciproque est immédiat, car dans ce cas f est lipschitzienne donc continue. On montre le sens direct par contraposée : on suppose que f n'est pas lipschitzienne. Ainsi, il existe une suite de vecteurs $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $||x_n|| = 1$ et $||f(x_n)|| > n$ (négation de la lipschitzianité). On pose pour tout n, $y_n = x_n/n$. Alors $(y_n)_n$ tend vers zéro (car $||y_n|| = 1/n$) et $||f(y_n)|| > 1$ donc la suite $(f(y_n))_n$ ne tend pas vers zéro. Donc f n'est pas continue en 0.

Solution 2 - Théorème des valeurs intermédiaires (☞ exercice)

Soit X une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors l'image de f est un intervalle. En particulier, si $a < b \in f(X)$, alors $[a, b] \in f(X)$.

Preuve : L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. En effet, soit $f(x), f(y) \in f(X)$. Comme X est connexe par arcs, alors il existe $\gamma : [0, 1] \to X$ un chemin continu reliant x à y. Alors $f \circ \gamma$ est un chemin continu reliant $f(x)$ à $f(y)$ dans $f(X)$. Donc $f(X)$ est connexe par arcs.

Application : La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0, 1]$ et négative en 0, positive en 1. Donc par le TVI elle admet un point fixe.

Solution 3 - Modes de convergence (☞ exercice)

- Convergence normale : $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$ converge
- Convergence absolue : $\forall x \in E,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n(x)||$ converge
- Convergence uniforme : la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)_N$ converge uniformément
- Convergence simple : $\forall x \in E$, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)_N$ converge

On a les implications
$$\begin{tikzcd} & \text{CVA} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{CVN} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{CVS} \\ & \text{CVU} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

et aucune autre n'est vraie. En prenant les fonctions constantes $f_n = (-1)^n/n$, on voit que la convergence uniforme (critère des séries alternées) n'implique pas la convergence absolue. En prenant $f_n = x^{n+1} - x^n$, on voit que la série de terme général f_n converge absolument mais pas uniformément sur $[0, 1]$ (les sommes partielles sont les fonctions $x^{N+1} - 1$ qui ne convergent pas uniformément sur $[0, 1[$). En prenant $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}$, on voit que ni la convergence absolue, ni la convergence uniforme (ni même les deux en même temps !) n'impliquent la convergence normale.

Solution 4 - $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ (☛ exercice)

Soient $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. On considère H l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^d$ orthogonal à $x - y$ et passant par $(x+y)/2$. On considère pour tout $z \in H$, le chemin γ_z défini par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma_z(t) = \begin{cases} 2tz + (1-2t)x & \text{si } t \leq 1/2 \\ (2t-1)y + 2(1-t)z & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

Soit $I_z = \gamma_z(]0,1[)$. Il est clair que si $z \neq z' \in H$, alors $I_z \cap I_{z'} = \emptyset$. On suppose par l'absurde que pour tout $z \in H$, il existe $q_z \in \mathbb{Q}^d$ tel que $q_z \in I_z$. On a donc une injection $H \hookrightarrow \mathbb{Q}^d$ $(z \mapsto q_z)$. Or, H est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$, donc de dimension ≥ 1 car $d \geq 2$. Ainsi, il est infini non dénombrable, ce qui est absurde. Donc il existe $z \in H$ tel que $I_z \cap \mathbb{Q}^d = \emptyset$, donc le chemin γ_z est à valeurs dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ et relie x à y. Donc $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ est connexe par arcs.

Solution 5 - Connexité par arcs de la sphère unité (☛ exercice)

Soient $x, y \in \mathbb{S}$. On suppose dans un premier temps que $y \notin \{x, -x\}$. Alors l'application $t \in [0,1] \mapsto ||ty + (1-t)x||$ ne s'annule pas et est continue. On considère alors le chemin

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{S} \\ & t & \mapsto & \dfrac{ty + (1-t)x}{||ty + (1-t)x||} \end{array} \tag{1}$$

qui est bien défini par ce qui précède, continue, à valeurs dans $\mathbb{S}$ et relie x à y.

Il reste à traiter le cas où $x = -y$. Comme E est de dimension ≥ 2, il existe $z \in \mathbb{S} \setminus \{x, -x\}$. Par ce qui précède, on peut relier x à z et z à $-x$

Solution 6 - Connexité dans les espaces de matrices (☛ exercice)

1. L'application $M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M) \in \mathbb{R}^*$ est continue et surjective. Or, $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe par arcs, donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Soient $A \neq B \in GL_n(\mathbb{C})$. L'application $\varphi : t \in \mathbb{C} \mapsto \det(tB + (1-t)A)$ est polynomiale, donc n'admet qu'un nombre fini de zéros. De plus, 0 et 1 n'annulent pas φ car $\det(A), \det(B) \in \mathbb{C}^*$. Or, $\mathbb{C}$ privé d'un ensemble fini de points est connexe par arcs (pourquoi ?). Ainsi, il existe un chemin γ reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $\det(\gamma(t)B + (1-\gamma(t))A) \neq 0$. En particulier, le chemin $\Gamma : t \mapsto \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ est un chemin reliant A à B dans $GL_n(\mathbb{C})$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Comme les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$, alors pour tout $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$, il existe $T_1(\lambda_1), \ldots, T_r(\lambda_r)$ et $T_1(\lambda_1'), \ldots, T_r(\lambda_r')$ des transvections telles que $A = T_1(\lambda_1) \ldots T_r(\lambda_r)$

et $B = T_1(\lambda_1') \dots T_r(\lambda_r')$. Alors le chemin

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ & t & \mapsto & T_1(t\lambda_1' + (1-t)\lambda_1) \dots T_r(t\lambda_r + (1-t)\lambda_r') \end{array}$$

est un chemin continu reliant A à B dans $SL_n(\mathbb{R})$, qui est donc connexe par arcs.

$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car tout chemin reliant une matrice de $GL_n(\mathbb{R})^+$ à une matrice de $GL_n(\mathbb{R})^-$ fournit un chemin reliant un élément de $\mathbb{R}_+^*$ à un élément de $\mathbb{R}_-^*$ dans $\mathbb{R}^*$, ce qui n'est pas possible. Montrons que $GL_n(\mathbb{R})^+$ et $GL_n(\mathbb{R})^-$ sont les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$. On le fait seulement pour $GL_n(\mathbb{R})^+$, c'est analogue pour l'autre.

Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})^+$. Alors $A = DU$ où $D = \operatorname{diag}(\det(A), 1, \dots, 1)$ et $U \in SL_n(\mathbb{R})$. On peut alors interpoler toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})^+$ en une autre matrice de $GL_n(\mathbb{R})^+$, d'où la connexité par arcs.

Solution 8 - Intégrales itérées (☛ exercice)

1. L est bien linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, elle est continue cas pour tout $x \in [0,1]$:
$$|L(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \le \int_0^x |f(t)|dt \le \int_0^x ||f||_\infty dt = x||f||_\infty \le 1$$
donc $||L||_{op} \le 1$

2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $x \in [0,1]$, $|L^n(f)(x)| \le \frac{x}{2^{n-1}} ||f||_\infty$. On a fait l'initialisation à la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang n. On a :
$$\forall x \in [0,1], \quad |L^{n+1}(f)(x)| = \left|\int_0^x L^n(f)(t)dt\right| \le \int_0^x |L^n(f)(t)|dt \le \int_0^x \frac{x}{2^{n-1}}||f||_\infty dt = \frac{x^2}{2^n}||f||_\infty$$
D'où la récurrence. Ainsi, on a $||L^{n+1}(f)||_\infty \le ||f||_\infty 2^{-n}$, d'où le résultat voulu.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = L^n(f)$. Par ce qui précède, $||L^n(f)||_\infty \to 0$. Donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Solution 9 - Bernstein et dérivées (☛ exercice)

1. L'idée est de prendre une suite de fonction dont les oscillations (donc les dérivées) deviennent hors de contrôle. Prenons par exemple $f_n(x) = \sin(n^2)/n$. Alors f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et $||f_n||_\infty = 1/n \to 0$ donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0. Mais $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$ ne converge uniformément vers aucune fonction (car $f_n(0) = n \to +\infty$).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned}
B_n(f)'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}\right)f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) - n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-k-1}x^k(1-x)^{n-k-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}f'(t)dt
\end{aligned}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f' est continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| \leq 1/N$, alors $|f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon$. Ainsi, si $n \geq N$ et $x \in [0,1]$, comme $f'(x) = n\int_{k/n}^{(k+1)/n} f'(x)dt$:

$$\begin{aligned}
|B_n(f)'(x) - B_{n-1}(f')(x)| &= \left|n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}f'(t)-f'(x)dt\right| \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f'(t)-f'(x)|dt \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\varepsilon dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}\varepsilon n\int_{k/n}^{(k+1)/n}1dt \\
&= \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

4. Cette majoration étant indépendante de x, on a $||B_n(f)' - B_{n-1}(f')||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, en utilisant le théorème de Bernstein, on a :

$$||B_n(f)' - f'||_\infty \leq ||B_n(f)' - B_{n-1}(f')||_\infty + ||B_{n-1}(f') - f'||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où la convergence uniforme de $(B_n(f)')_n$ vers f'.

Solution 10 - Limite uniforme de polynômes (☞ exercice)

1. Le théorème d'approximation de Weierstrass est le suivant : soit f une fonction continue de $[a, b] \to \mathbb{R}$, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
2. Comme $(P_n)_n$ converge uniformément vers f, alors la suite $(||P_n - f||_\infty)_n$, qui est a priori à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, est à valeurs dans $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang N. Si $n \geq N$, on a :
$$||P_{n+1} - P_n||_\infty \leq ||P_{n+1} - f||_\infty + ||f - P_n||_\infty < +\infty$$
Donc le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est borné sur $\mathbb{R}$, il est donc constant. Il existe une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que $P_{n+1} = c_n + P_n$
3. Par une récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \geq N$, $P_n = c_{n-1} + \cdots + c_N + P_N$. On note alors $s_n = c_{n-1} + \cdots + c_N$. Comme $(P_n)_n$ converge uniformément vers f, alors on a :
$$||s_n + P_N - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
En particulier, comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on a (par exemple en 0) :
$$|s_n + P_N(0) - f(0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Donc la suite $(s_n)_n$ converge vers une limite s (en fait vers $f(0) - P_n(0)$ mais ce n'est pas utile). Ainsi, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on a :
$$||s_n + P_N - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||s + P_N - f||_\infty$$
Par unicité de la limite, $||s + P_N - f||_\infty = 0$, donc $f = s + P_N$ est bien polynômiale.
4. Une fonction P polynômiale vérifie le fait suivant : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(n)} = 0$. Or, ce n'est pas vérifié par la fonction exponentielle, donc elle n'est pas polynômiale. Montrons la

formule classique $(1+x/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(x+o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$$

La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ par les questions précédentes, car les fonctions $x \mapsto (1+x/n)^n$ sont polynômiales mais l'exponentielle ne l'est pas.

Remarque : Par contre, la suite de fonction $(x \mapsto (1+x/n)^n \mathbf{1}_{[-n,n]}(x))_n$ *converge uniformément vers* f*, mais c'est un peu plus difficile à démontrer (il faut être plus précis dans les calculs et montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout compact).*