Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

17 janvier 2023

Suites et séries de fonctions

Table des matières

Questions de cours

Suites et séries de fonctions

Exercice 1 - Modes de convergence (solution)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur une partie d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Définissez les notions de convergence normale, absolue, uniforme et simple. Y a-t-il des implications entre ces différents modes de convergences ? Essayez de donner autant que possible des contre-exemples.

Exercice 2 - Séries de fonctions et régularité (solution)

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Quelles hypothèse doit-on faire sur cette série pour qu'elle converge vers une limite de classe $\mathcal{C}^k$? Comment peut-on calculer les dérivées premières, $\dots$, k-ièmes de la somme ? Donnez un exemple de série de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément sur un segment de $\mathbb{R}$ mais dont la somme n'est même pas dérivable.

Exercice 3 - Approximation par des fonctions en escalier (solution)

Soit $f : [0,1] \to E$ une fonction continue par morceaux à valeurs dans un espace vectoriel normé E. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi : [0,1] \to E$ en escalier telle que $||f - \varphi||_\infty < \varepsilon$.

Le résultat reste-t-il vrai si on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to E$?

Exercices

Suites et séries de fonctions

★☆☆ Exercice 4 - Intégrales itérées (solution)

Version EVN ★☆☆

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On définit $L : E \to E$ par

$$\forall f \in E, \quad L(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x f(t)dt$$

1. Montrez que $L \in \mathcal{L}_c(E)$.
2. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $||L^n||_{op} \leq 2^{-(n-1)}$.

3. En déduire que pour tout $f \in E$, la suite définie par $f_0 = f$ et $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ converge uniformément vers zéro.

Version suite de fonctions ★⯪☆

Soit f une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$. Montrez que la suite définie par

$$\begin{cases} f_0 = f \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt \end{cases}$$

converge uniformément vers zéro.

★★☆ Exercice 5 - Limite uniforme de polynômes (solution)

1. Énoncez le théorème d'approximation de WEIERSTRASS. Ce théorème est-il vrai si on considère une fonction définie sur $\mathbb{R}$ entier ?
2. Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Le but de l'exercice est de démontrer que f est polynômiale. Montrez d'abord qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, il existe une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que $P_{n+1} = c_n + P_n$.
3. En déduire qu'il existe un rang $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$, il existe une constante $s_n \in \mathbb{R}$ telle que $f = s_n + P_N$. En déduire que f est polynômiale.
4. Application : montrez (sans utiliser l'exercice) que la fonction exponentielle n'est pas polynômiale, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1 + x/n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$. En déduire que cette convergence (simple) ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

   Remarque : En fait, on vient de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ mais fermé dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

★★⯪ Exercice 6 - Continue mais non-dérivable sur un ensemble dense (solution)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n}$$

1. Montrez que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de dérivation terme à terme ? Montrez que si la série dérivée converge simplement, alors la limite n'est pas continue en zéro.

3. Montrez que f n'est pas dérivable en 0. Plus généralement, montrez que f n'est pas dérivable pour tout $x \in 2\mathbb{Z}$
4. Montrez que f n'est pas dérivable pour tout x dyadique.

Remarque : La fonction f est un avatar de fonction « continue partout mais nulle part dérivable », dont l'existence a été un véritable choc pour beaucoup de mathématiciens. On peut montrer, mais c'est très difficile, que f n'est nulle part dérivable. Il s'agit d'une fonction de WEIERSTRASS*, qui sont des fonctions de la forme $\sum a^k \cos(b^k x)$ où $ab \geq 1$ et $0 < a < b$. Ces fonctions sont continues partout mais nulle part dérivables.*

★★☆ Exercice 7 - Convergence simple de fonctions convexes (solution)

Soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a,b]$.

1. On suppose que les f_n sont toutes L-lipschitziennes. Montrez que la convergence est uniforme. Est-ce que supposer simplement ces fonctions lipschitziennes suffit ?
2. On suppose maintenant que les f_n sont toutes convexes. Montrez qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de $]a,b[$.

★☆☆ Exercice 8 - Moments nuls à tout ordre (solution)

Soit f une fonction continue $[a,b] \to \mathbb{R}$. Montrez que si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b f(t) t^n dt = 0$$

alors $f = 0$. Le résultat reste-t-il vrai si on considère la condition précédente seulement pour $n \geq N$? ($N \in \mathbb{N}$ fixé)

Corrections

Solution 1 - Modes de convergence (☞ exercice)

- Convergence normale : $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$ converge
- Convergence absolue : $\forall x \in E,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n(x)||$ converge
- Convergence uniforme : la suite $\left(\sum_{n=0}^N f_n\right)_N$ converge uniformément
- Convergence simple : $\forall x \in E$, la suite $\left(\sum_{n=0}^N f_n(x)\right)_N$ converge

On a les implications

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{CVA} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{CVN} & & & & \text{CVS} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{CVU} & & \end{array}$$

et aucune autre n'est vraie. En prenant les fonctions constantes $f_n = (-1)^n/n$, on voit que la convergence uniforme (critère des séries alternées) n'implique pas la convergence absolue. En prenant $f_n = x^{n+1} - x^n$, on voit que la série de terme général f_n converge absolument mais pas uniformément sur $[0,1]$ (les sommes partielles sont les fonctions $x^{N+1} - 1$ qui ne convergent pas uniformément sur $[0,1]$). En prenant $f_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}$, on voit que ni la convergence absolue, ni la convergence uniforme (ni même les deux en même temps !) n'impliquent la convergence normale.

Solution 2 - Séries de fonctions et régularité (☞ exercice)

Il s'agit du théorème de dérivation terme à terme : On suppose que les séries $\sum_n f_n$, …, $\sum_n f_n^{(k-1)}$ convergent simplement vers des limites notées g_0, …, g_{k-1}, et que la série $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction notée g_k. Alors les séries $\sum_n f_n, \ldots, \sum_n f_n^{(k-1)}$ convergent uniformément vers g_0, …, g_{k-1}, g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a pour tout $i \in [\![0,k]\!]$

$$\frac{d^i}{dt^i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) = g_i = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

Comme contre-exemple, on peut prendre les fonctions

$$\forall t \in [-1,1], \quad f_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^4}}$$

Remarque : Ici, la puissance quatrième de n permet seulement d'accélérer la convergence (d'ordre $1/n^2$) pour le graphe suivant

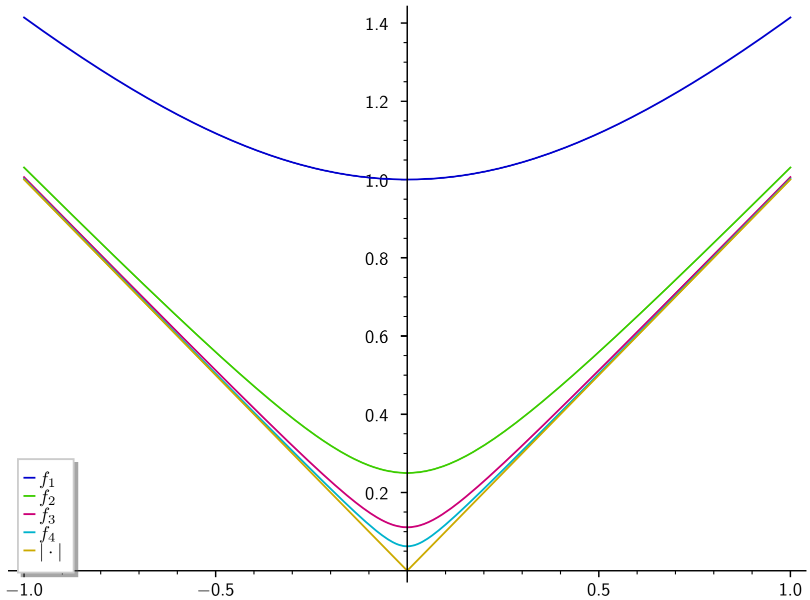

FIGURE 1 – Premiers termes de la suite $(f_n)_n$ et la limite

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la valeur absolue mais celle-ci n'est pas dérivable en zéro. Pourtant, les f_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Pour transformer ce contre-exemple de suites de fonctions en un contre-exemple de séries de fonctions, on peut considérer la série télescopique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n+1} - f_n$$

en posant $f_0 \equiv 0$ la fonction nulle. Les sommes partielles de cette série sont les f_n, et donc cette série converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1,1]$ qui n'est pas dérivable en zéro.

Solution 3 - Approximation par des fonctions en escalier (☞ exercice)

Quitte à considérer une subdivision de $[0,1]$ pour laquelle la restriction de f à chacun des sous-segments est continue, on peut supposer que f est continue sur $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est compact, le théorème de HAINE nous donne que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et δ le module d'uniforme continuité de f pour ε. On subdivise alors $[0,1]$ de manière uniforme et de pas $< 1/\delta$. On note $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = 1$ cette subdivision. On pose alors φ en escalier de la façon suivante

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varphi_{|[a_i,a_{i+1}[} \equiv f(a_i)$$

On a alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $x \in [a_i, a_{i+1}[$

$$||f(x) - \varphi(x)|| = ||f(x) - f(a_i)|| < \varepsilon$$

En passant au sup, on a bien $||f-\varphi||_\infty < \varepsilon$.

Si f n'est pas définie sur un compact, le résultat est faux. Une fonction en escalier étant toujours bornée, il est par exemple impossible d'approximer des fonctions non bornées comme l'identité.

Solution 4 - Intégrales itérées (☞ exercice)

1. L est bien linéaire par linéarité de l'intégrale. De plus, elle est continue cas pour tout $x \in [0,1]$:
$$|L(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^x ||f||_\infty dt = x||f||_\infty \leq 1$$
donc $||L||_{op} \leq 1$
2. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $x \in [0,1]$, $|L^n(f)(x)| \leq \frac{x}{2^{n-1}}\, ||f||_\infty$. On a fait l'initialisation à la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang n. On a :
$$\forall x \in [0,1], \quad |L^{n+1}(f)(x)| = \left|\int_0^x L^n(f)(t)dt\right| \leq \int_0^x |L^n(f)(t)|dt \leq \int_0^x \frac{x}{2^{n-1}}||f||_\infty dt = \frac{x^2}{2^n}||f||_\infty$$
D'où la récurrence. Ainsi, on a $||L^{n+1}(f)||_\infty \leq ||f||_\infty\, 2^{-n}$, d'où le résultat voulu.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = L^n(f)$. Par ce qui précède, $||L^n(f)||_\infty \to 0$. Donc la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Solution 5 - Limite uniforme de polynômes (☞ exercice)

1. Le théorème d'approximation de Weierstrass est le suivant : soit f une fonction continue de $[a,b] \to \mathbb{R}$, alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   Ce théorème est faux si on prend une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Par exemple, si f est constante sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers l'infini en $-\infty$, alors pour tout polynôme P, on a $||P-f||_\infty = +\infty$ (distinguer les cas P constant et P non constant)
2. Comme $(P_n)_n$ converge uniformément vers f, alors la suite $(||P_n - f||_\infty)_n$, qui est a priori à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, est à valeurs dans $\mathbb{R}$ à partir d'un certain rang N. Si $n \geq N$, on a :
$$||P_{n+1} - P_n||_\infty \leq ||P_{n+1} - f||_\infty + ||f - P_n||_\infty < +\infty$$
Donc le polynôme $P_{n+1} - P_n$ est borné sur $\mathbb{R}$, il est donc constant. Il existe une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que $P_{n+1} = c_n + P_n$

3. Par une récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \geq N$, $P_n = c_{n-1} + \cdots + c_N + P_N$. On note alors $s_n = c_{n-1} + \cdots + c_N$. Comme $(P_n)_n$ converge uniformément vers f, alors on a :

$$||s_n + P_N - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En particulier, comme la convergence uniforme implique la convergence simple, on a (par exemple en 0) :

$$|s_n + P_N(0) - f(0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc la suite $(s_n)_n$ converge vers une limite s (en fait vers $f(0) - P_n(0)$ mais ce n'est pas utile). Ainsi, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on a :

$$||s_n + P_N - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||s + P_N - f||_\infty$$

Par unicité de la limite, $||s + P_N - f||_\infty = 0$, donc $f = s + P_N$ est bien polynômiale.

4. Une fonction P polynômiale vérifie le fait suivant : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(n)} = 0$. Or, ce n'est pas vérifié par la fonction exponentielle, donc elle n'est pas polynômiale. Montrons la formule classique $(1 + x/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(x + o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$$

La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ par les questions précédentes, car les fonctions $x \mapsto (1 + x/n)^n$ sont polynômiales mais l'exponentielle ne l'est pas.
Remarque : Par contre, la suite de fonction $(x \mapsto (1+x/n)^n \mathbf{1}_{[-n,n]}(x))_n$ converge uniformément vers f, mais c'est un peu plus difficile à démontrer (il faut être plus précis dans les calculs et montrer qu'il y a convergence uniforme sur tout compact).

Solution 6 - Continue mais non-dérivable sur un ensemble dense (☛ exercice)

1. La série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$, où $f_n = \dfrac{\cos(2^n \pi x)}{2^n}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, et il s'agit d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc f est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$

2. Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation terme à terme, il faut que la série des dérivées converge uniformément. Or, on montre que la limite (si elle existe), n'est pas continue. Ainsi, la série ne peut converger uniformément. Pour le faire, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$x_k = 2^{-k}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n'(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ -\pi & \text{si } k = n+1 \\ -\pi \sin(\pi 2^{n-k}) < 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc, en notant g la somme, on a $g(x_k) < -\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En considérant cette fois-ci la suite $y_k = -2^{-k}$, on obtient

$$f_n'(y_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ \pi & \text{si } k = n+1 \\ \pi \sin(\pi 2^{n-k}) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $g(y_k) > \pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ceci montre que g n'est pas continue en zéro, donc la convergence de la série (s'il y en a une) ne peut pas être uniforme.

3. On a $f(0) = 2$ (somme d'une série géométrique de raison $1/2$). Montrons que $(f(x) - 2)/x$ diverge quand $x \to 0$. Il suffit de le montrer pour une suite $(x_k)_k$ qui tend vers zéro, on pose alors $x_k = 2^{-k}$ comme précédemment. On a :

$$\frac{f(x_k) - 2}{x_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^{n-k}\pi) - 1}{2^{n-k}} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2^{n-k}\pi) - 1}{2^{n-k}}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos(2^{n-k}\pi) - 1 < 0$ et $\cos(\pi/2) - 1 = -1$. On a donc l'inégalité

$$\frac{f(x_k) - 2}{x_k} < -\frac{1}{2}$$

De même en considérant la suite $y_k = -2^{-k}$, on a

$$\frac{f(y_k) - 2}{y_k} > -\frac{1}{2}$$

Comme les suites $(x_k)_k$ et $(y_k)_k$ tendent vers zéro, alors f n'est pas dérivable en zéro. De plus, comme f est 2-périodique, alors f n'est pas dérivable en tout $x \in 2\mathbb{Z}$.

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\cos(2^n \pi x)}{2^n} = F_k(x) + \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

où F_k est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, si f n'est pas dérivable en $y \in \mathbb{R}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, f n'est pas dérivable en $2^{-k}y$. Comme f n'est pas dérivable sur $2\mathbb{Z}$, elle ne l'est pas non plus sur $\mathbb{Z}$ ($k = 1$), et donc elle ne l'est pas non plus sur les nombres dyadiques.

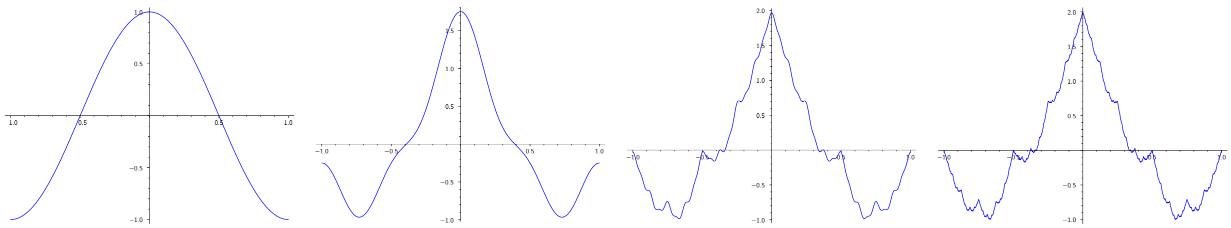

FIGURE 2 – Sommes partielles d'ordre 0, 2, 5 et 10

Solution 7 - Convergence simple de fonctions convexes (☞ exercice)

1. Soit $\varepsilon > 0$. Découpons notre segment $[a, b]$ en petits segments de longueur $\leq \varepsilon$: on pose $a = a_0 < a_1 < \dots a_{N+1} = b$ avec $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$. L'idée est d'utiliser la L-lipschitziannité des f_n, et aussi de f (en passant à la limite dans l'inégalité de la L-lipschitziannité), pour contrôler ce qui se passe sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, pour rappel de longueur $\leq \varepsilon$, on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(a_i)|}_{\leq L|x-a_i|} + |f(a_i) - f_n(a_i)| + \underbrace{|f_n(a_i) - f_n(x)|}_{\leq L|x-a_i|}$$

   Si n est assez grand, de sorte que pour tout $1 \leq i \leq N+1$, $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leq \varepsilon$, alors on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq (2L+1)\varepsilon$$

   D'où la convergence uniforme en passant au sup.

   Si les f_n sont seulement supposées lipschitziennes, alors le résultat est faux. Par exemples, les fonctions $x \in [0, 1] \mapsto x^n$ sont n-lipschitziennes, mais elles convergent simplement vers $\mathbf{1}_{\{1\}}$ qui n'est pas continue, donc la convergence n'est pas uniforme.

2. Soit $[c, d] \subset]a, b[$. L'inégalité des pentes nous donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x < y \in [c, d]$

$$\frac{f_n(c) - f_n(a)}{c - a} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(b) - f_n(d)}{b - d}$$

   Or, les termes de gauche et de droite des inégalités définissent des suites convergentes car la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a, b]$. En particulier, ces suites sont bornées. On a donc un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x < y \in [c, d]$:

$$-M \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq M$$

   Ainsi, les fonctions f_n sont toutes M-lipschitziennes sur $[c, d]$. Par la question précédente, la

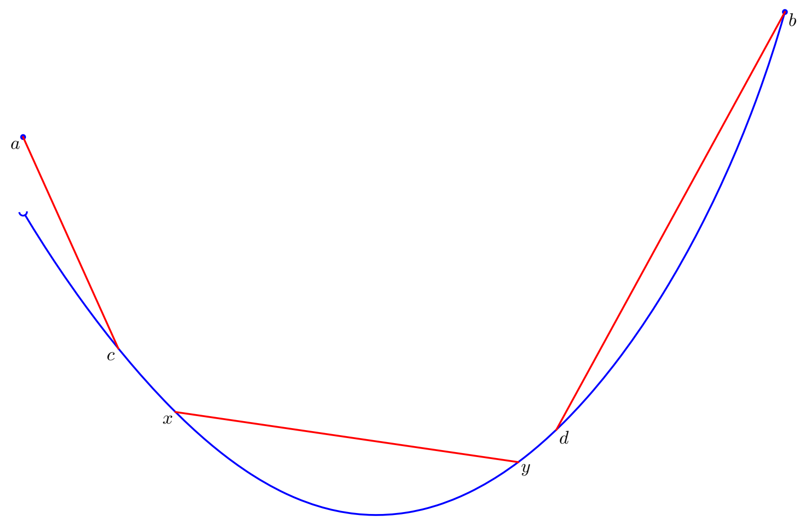

FIGURE 3 – Inégalité des pentes

suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[c, d]$.

Solution 8 - Moments nuls à tout ordre (☛ exercice)

Par linéarité de l'intégrale, la condition vérifiée par f équivaut à

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \int_a^b f(t)P(t)dt = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $||f - P||_\infty < \varepsilon$. Ainsi, f vérifie

$$\int_a^b f(t)^2dt = \int_a^b f(t)^2 - P(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)\left(f(t) - P(t)\right)dt$$

Ainsi, en passant au valeurs absolues

$$\left|\int_a^b f(t)^2dt\right| = \left|\int_a^b f(t)\left(f(t) - P(t)\right)dt\right| \leq (b-a)\,||f||_\infty\,\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)^2dt = 0$$

La fonction f^2 était positive et continue, ceci implique que $f = 0$. D'où le résultat.

Supposons maintenant que seuls les moments d'ordre $n \geq N$ sont nuls. On applique alors ce qui précède à la fonction continue $t \mapsto f(t)t^N$, qui est donc nulle sur $[a, b]$. On conclut par continuité : f est continue et identiquement nulle sur $[a, b] \setminus \{0\}$ qui est dense dans $[a, b]$, donc nulle sur $[a, b]$.
