Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

24 janvier 2023

Séries entières

Table des matières

Questions de cours

Séries entières

Exercice 1 - Développements en série entière classiques (solution ☞)

Citez les développements en série entière des fonctions suivantes (avec leur rayon de convergence)

1. e^x
2. $\cos(x)$
3. $(1+x)^\alpha$
4. $\dfrac{1}{1-x}$
5. $\ln(1-x)$
6. $\arctan(x)$

Remarque : La liste est volontairement longue, seuls trois d'entre eux seront proposés à l'élève

---

Exercice 2 - Rayon de convergence (solution ☞)

Définissez la notion de rayon de convergence d'une série entière grâce au lemme d'Abel (que vous démontrerez). Connaissez-vous d'autres manières de calculer le rayon de convergence d'une série entière ?

Exercice 3 - Disque de convergence et cercle d'incertitude (solution ☞)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < +\infty$. Montrez qu'elle converge normalement sur tous les disques fermés centrés en zéro et de rayon $0 < r < R$. Le résultat est-il vrai sur le disque fermé de centre zéro et de rayon R ? Donnez un exemple pour chaque cas possible sur le cercle d'incertitude.

Exercices

Séries entières

★☆☆ Exercice 4 - Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non DSE (solution ☞)

On définit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrez que f définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a un rayon de convergence infini, mais que quelque soit $R > 0$, la somme sur $]-R, R[$ ne coïncide pas avec f.

★☆☆ Exercice 5 - Un DSE chacun (solution ☞)

Donnez le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 x^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n(n+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}\cos(n\theta)$

★☆☆ Exercice 6 - Une inégalité classique (solution ☞)

Montrez que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

★★☆ Exercice 7 - Une méthode de l'équation différentielle (solution ☞)

On pose $f : x \in]-1, 1[\mapsto (\arcsin(x))^2$.

1. Montrez que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ (on ne cherchera pas l'expression des coefficients de sa série)
2. Trouvez une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f
3. En déduire une expression des coefficients du développement en série entière de f

---

★☆☆ Exercice 8 - Zéro zéro (solution ☞)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs non identiquement nulle. Montrez que la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

a un rayon de convergence au moins égal à 1, puis montrez que sa somme ne s'annule pas sur le disque unité ouvert.

★★☆ Exercice 9 - Théorème d'Abel radial (solution)

1. Énoncez le théorème d'Abel radial (c'est du cours !)
2. Montrez qu'on peut se ramener au cas où $R = 1$
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrez que
$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n$$
4. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, en notant $S = \lim S_n$, que
$$f(x) - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n$$
5. Conclure (il s'agit de montrer que $f(x) \to S$)

★★★ Exercice 10 - Théorème d'Abel non tangentiel (solution)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence au moins un. On suppose que $\sum a_n$ converge et on note f la somme de la série sur le disque unité ouvert. Si $\theta_0 \in [0, \pi/2[$, on note

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], \ z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}$$

Le but de l'exercice est de montrer que

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

1. Représentez Δ_{θ_0} sur un dessin
2. À l'aide d'une transformation d'Abel, montrez que
$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$
où $S = \lim S_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$

3. Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ vérifie $|z-1| \leq \cos(\theta_0)$, montrez que

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$, montrez qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ et une constante $0 < \alpha \leq \cos(\theta_0)$ tels que pour tout $n \geq N$ et $|1-z| \leq \alpha$, on ait

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)}\right)$$

5. Conclure

Corrections

Solution 1 - Développements en série entière classiques (☞ exercice)

1. Rayon de convergence infini. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$
2. Rayon de convergence infini. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
3. Rayon de convergence 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$, infini sinon. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$
4. Rayon de convergence 1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série géométrique)
5. Rayon de convergence 1. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ (en intégrant le DSE de la fonction précédente)
6. Rayon de convergence infini. $\arctan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (en intégrant le DSE de $(1+x^2)^{-1}$)

Solution 2 - Rayon de convergence (☞ exercice)

On énonce d'abord le lemme d'Abel :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(a_n x^n)_n$ est bornée. Alors

1. Pour tout $|y| < |x|$, la série numérique $\sum a_n y^n$ converge absolument
2. Pour tout $0 \leq r < |x|$, la série de fonction $y \mapsto \sum a_n y^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre x et de rayon r.

Le lemme d'Abel se démontre simplement en considérant un majorant M de la suite $(a_n x^n)_n$ et l'inégalité

$$|a_n y^n| = \left|\frac{y}{x}\right|^n |a_n||x|^n \leq \left|\frac{y}{x}\right|^n M$$

On définit alors le rayon de convergence d'une série entière comme étant

$$R = \sup\{r \geq 0 \; ; \; \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

Solution 3 - Disque de convergence et cercle d'incertitude (☛ exercice)

TODO

- Diverge sur tout le cercle d'incertitude : $a_n = 1$
- Converge en certains points, diverge en d'autres : $a_n = 1/n$ (harmonique en 1, alternée en -1)
- Converge en tout points du cercle d'incertitude : $a_n = 1/n^2$ (convergence absolue)

Solution 4 - Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non DSE (☛ exercice)

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P, Q deux polynômes tels que

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-1/x}$$

Par croissance comparée, on a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Ainsi, la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

a bien un rayon de convergence infini (c'est la série entière nulle !), mais f n'est pas identiquement nulle au voisinage de zéro.

Solution 5 - Un DSE chacun (☛ exercice)

1. Par la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence est 1. Pour calculer la somme, on part de la somme d'une série géométrique de raison $x \in]-1, 1[$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Et on dérive :

$$x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \quad \text{et} \quad x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^n$$

Ainsi, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

2. Par la règle de D'ALEMBERT, le rayon de convergence est 1. Pour calculer la somme, on part d'une décomposition en éléments simple

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

Si f est la somme de la série entière sur $]-1,1[$, alors par ce qui précède :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{2} - \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{2} + \frac{\ln(1-x)}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4}$$

3. Comme $|\cos(n\theta)| \leq 1$ et que la série entière de terme général $1/n!$ a un rayon de convergence infini, alors cette série entière a un rayon de convergence infini. On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{i\theta n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-i\theta n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^{i\theta})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^{-i\theta})^n}{n!}\right) = \frac{e^{xe^{i\theta}} + e^{xe^{-i\theta}}}{2}$$

Solution 6 - Une inégalité classique (☞ exercice)

On a l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ainsi, la fonction cosh est développable en série entière en 0 et de rayon infini. On a en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

La fonction $x \mapsto \cosh(x) - \exp(x^2/2)$ est donc développable en série entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) - \exp(x^2/2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{2n!}\right)x^{2n}$$

Les coefficients étant tous négatifs (car $(2n)! \geq 2n!$), on obtient que cette fonction est négative sur $\mathbb{R}$, d'où l'inégalité.

Solution 7 - Une méthode de l'équation différentielle (☞ exercice)

1. La fonction arcsinus est développable en série entière sur $]-1,1[$ par le cours, donc son carré aussi par produit de Cauchy
2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-1,1[$ (car DSE). On a pour tout $x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{donc} \quad \left(1-x^2\right)\left(f'(x)\right)^2 = 4\left(\arcsin(x)\right)^2 = 4f(x)$$

En dérivant cette égalité, on obtient que

$$2\left(1-x^2\right)f'(x)f''(x) - 2x\left(f'(x)\right)^2 = 4f'(x) \quad \text{donc} \quad \left(1-x^2\right)f''(x) - xf'(x) = 2$$

3. Par le théorème de dérivation terme à terme, l'équation différentielle précédente s'écrit, si $\sum a_n x^n$ est le DSE de f sur $]-1,1[$:

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n(n-1)a_n x^{n-2}\right) - x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(na_n x^{n-1}\right) = 2$$

ce qui après simplification donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n\right)x^n = 2$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 2 au voisinage de zéro, on a

$$\begin{cases} 2a_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2, vérifiant $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 0$. Par récurrence, on obtient que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n} = \dfrac{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}{n(2n-1)!} \end{cases}$$

Solution 8 - Zéro zéro (☞ exercice)

La suite $(a_n)_n$ est positive et décroissante donc bornée, donc la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 par définition de celui-ci. On suppose par l'absurde qu'il existe

$z_0 \in D(0,1)$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n = 0$$

En multipliant par z_0, on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} z_0^n = 0$$

La différence des deux égalités précédentes donne

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})\, z_0^n = 0$$

En passant au module, on a les inégalités

$$a_0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n - a_{n-1}|\, |z_0|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n-1} - a_n)|z_0|^n < \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} - a_n = a_0 - \lim_{n \to +\infty} a_n \leq a_0$$

C'est absurde.

Solution 9 - Théorème d'Abel radial (☞ exercice)

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$ et de somme f sur son disque de convergence. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$f(x) \xrightarrow[x \in [0,R[\longrightarrow R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

2. On pose $b_n = a_n / R^n$. Alors par le théorème de Cauchy-Hadamard, le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{R^n}} = \frac{\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}}{R} = \frac{R}{R} = 1$$

   Et en notant $\overline{f}$ la somme sur le disque unité, on a $\overline{f} = f(\cdot/R)$, donc $\overline{f}$ est continue en 1 (sur $[0,1[$) de somme $\sum b_n$ si et seulement si f est continue en R (sur $[0,R[$) de somme $\sum a_n$. On peut donc se ramener au cas $R = 1$.

3. On effectue une transformation d'Abel (on convient que $S_{-1} = 0$)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{N}(S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} = S_N x^N + (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n\end{aligned} \tag{1}$$

4. Soit $x \in [0,1[$. Comme la suite $(S_N)_N$ converge (vers S), alors elle est bornée. En particulier, la suite $(S_N x^N)_N$ tend vers zéro. Ainsi, en passant à la limite dans (1), on obtient que

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

Or, $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1$ (somme d'une série géométrique). Ainsi

$$f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n$$

5. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S_n \longrightarrow S$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|S_n - S| \leq \varepsilon$. On découpe :

$$f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty}(S_n - S)x^n$$

Donc par inégalité triangulaire

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n + (1-x)\sum_{n=N+1}^{+\infty}\varepsilon x^n \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n + \varepsilon$$

Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [1-\delta, 1[$, $(1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n \leq \varepsilon$. Un tel δ existe bien car ce terme tend vers zéro quand x tend vers 1. Pour des tels N et δ, on a donc

$$|f(x) - S| \leq 2\varepsilon$$

Donc on a bien $f(x) \to S$, d'où le théorème d'Abel radial

Solution 10 - Théorème d'Abel non tangentiel (☞ exercice)

1. Il s'agit du secteur représenté en hachuré dans la figure 1

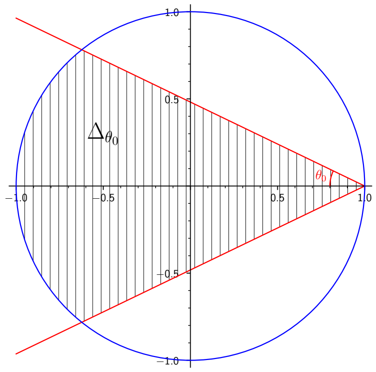

Figure 1 – Secteur Δ_{θ_0}

2. Idem que dans l'exercice 9
3. Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ est tel que $|z-1| \leq \cos(\theta_0)$, alors il existe $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ et $0 < \rho \leq \cos(\theta_0)$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ et $|z| < 1$. On a donc

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|R_n| \leq \varepsilon$. Par la question 2, on a :

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

On choisit alors $\alpha \leq \cos(\theta_0)$ tel que $\alpha \sum_0^N |R_n| \leq \varepsilon$. Dans ce cas, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

5. Ce qui précède étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$