Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

7 février 2023

Polynômes et réduction

Table des matières

Questions de cours

Polynômes et réduction

Exercice 1 - Polynôme minimal (solution ☞)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Définissez le polynôme minimal de u (montrez l'existence et l'unicité). Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, par quoi peut-on majorer le degré de π_u ?

Si on a une matrice diagonale par blocs, quel est son polynôme minimal par rapport à ceux des blocs diagonaux ?

Exercice 2 - Lemme de décomposition des noyaux (solution ☞)

Énoncez et démontrez le lemme de décomposition des noyaux.

Exercice 3 - Un premier pas vers Jordan et Dunford (solution ☞)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Montrez qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur et de même coefficient sur la diagonale.

Exercices

Polynômes et réduction

★⯪☆ Exercice 4 - Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (solution ☞)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Calculez la matrice de u dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ en fonction de l'écriture de $u^n(x)$ dans cette base. En déduire χ_u
2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrez que $\chi_u(u) = 0$.
3. Montrez qu'en fait, $\pi_u = \chi_u$.

★☆☆ Exercice 5 - Matrices symétriques et nilpotentes (solution)

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + {}^tA$ soit nilpotente ? Et si ${}^tAA$ est nilpotente ?

Exercice 6 - Une petite réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ (solution)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $A^n = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.

Exercice 7 - Multiplication à gauche (solution)

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $L_A(B) = AB$.

1. Montrez que $L : A \mapsto L_A$ définit une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, et qu'il s'agit d'un morphisme d'algèbres injectif. Est-elle surjective ?
2. Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\pi_A = \pi_{L_A}$. A-t-on $\chi_A = \chi_{L_A}$?
3. Montrez que A est diagonalisable (resp. nilpotente) si et seulement si L_A est diagonalisable (resp. nilpotente)

Exercice 8 - Diagonale de a sur un parterre de b (solution)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in K^* \times K$, on définit la matrice suivante :

$$A_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

- Méthode 1 : (sans polynôme d'endomorphismes)
  1. On suppose dans un premier temps que $a = b$. Montrez que $\dim(E_0(A_n(a,a))) = n - 1$ et que $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) = 1$.
  2. En déduire que $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X - na)$, puis que $A_n(a,a)$ est diagonalisable. Explicitez les matrices de passage.
  3. On revient dans le cas général a, b quelconques. Calculez les sous-espaces propres de $A_n(a,b)$ et montrez que $\chi_{A_n(a,b)} = (X - (a - b))^{n-1}(X - (a + (n-1)b))$. À quelle condition sur a et b $A_n(a,b)$ est-elle inversible ?

4. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable et diagonalisez explicitement $A_n(a,b)$, puis en déduire une formule explicite pour $A_n(a,b)^k$, si $k \in \mathbb{N}$.

- Méthode 2 : (avec polynômes d'endomorphismes)
  1. Faire les deux premières questions de l'exercice 9
  2. En déduire que $A_n(a,b)$ est diagonalisable et calculez ses valeurs propres. À quelle condition $A_n(a,b)$ est-elle inversible ?
  3. Quel est le polynôme minimal de $A_n(a,b)$?

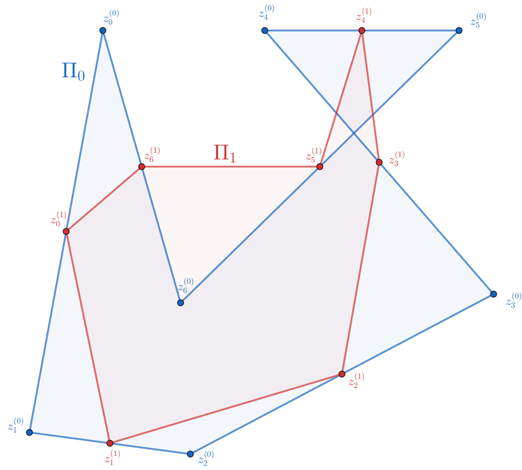
★★☆ Exercice 9 - Matrices circulantes et suite de polygones (solution)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On note A la matrice suivante, qu'on appelle matrice circulante associée à $(a_1, \dots, a_n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice circulante associée à $(0,1,0,\dots,0)$. Calculez J^k pour $k \in [\![0,n]\!]$. En déduire χ_J. En déduire que J est diagonalisable de valeurs propres $\sigma(J) = \{e^{\frac{2i\pi k}{n}} \; ; \; 0 \leq k \leq n-1\}$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
2. Montrez que $A = P(J)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. En déduire que A est diagonalisable de valeurs propres $P(\omega^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$
3. Application 1 : **Exercice 8 - Diagonale de a sur un parterre de b** (Méthode 2)
4. Application 2 : **Suite de polygones**. Soit $\Pi = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ un polygone. On indice les sommets par des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte à avoir $z_n = z_0$. On pose la suite de polygone suivante :

$$\begin{cases} \Pi_0 = (z_0^{(0)}, \dots, z_{n-1}^{(0)}) = \Pi \\ \Pi_k = (z_0^{(k)}, \dots, z_{n-1}^{(k)}) = \left(\dfrac{z_0^{(k-1)} + z_1^{(k-1)}}{2}, \dots, \dfrac{z_{n-1}^{(k-1)} + z_n^{(k-1)}}{2} \right) \end{cases}$$



Montrez que la suite $(\Pi_n)_n$ converge vers $g(1,1,\dots,1)$ où $g \in \mathbb{C}$. Montrer qu'en fait, g est l'isobarycentre de Π, c'est-à-dire que

$$g = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} z_i$$

★★★ Exercice 10 - Réduction de Frobenius (solution)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul.

1. Soit $x \in E$. On pose $\pi_{u,x}$ l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal

$$\{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ P(u)(x) = 0\}$$

   Montrez que $\pi_{u,x} | \pi_u$, puis montrez qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\pi_{u,x} = \pi_u$. On dit qu'un tel vecteur est u-cyclique.

   __Indication :__ Utilisez le lemme de décomposition des noyaux

2. Soit x un vecteur u-cyclique, et $d = \deg(\pi_u)$. Montrez que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est une base de $\mathrm{Vect}(\{u^i(x)\ ;\ i \in \mathbb{N}\}) =: F$. Explicitez la matrice de $u_{|F}$ dans la base précédente. Quel est le polynôme minimal de $u_{|F}$? Et son polynôme caractéristique ?

3. On dit qu'un endomorphisme v est cyclique si $\pi_v = \chi_v$. Montrez que s'il existe toujours un supplémentaire de F stable par u, alors on a une décomposition de E en somme directe d'espaces stables par u

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$$

   où pour tout $1 \leq i \leq r-1$, $\pi_{u_{|F_{i+1}}} | \pi_{u_{|F_i}}$ et $u_{|F_i}$ est cyclique pour tout $1 \leq i \leq r$.

4. On prouve maintenant qu'il existe un supplémentaire de F stable par u. On note $(e_1, \dots, e_d)$ la famille libre $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ qu'on complète en $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $G = \{y \in E \; ; \; \forall i \in \mathbb{N}, \, e_d^* \circ u^i(y) = 0\} = \Gamma^\circ$ où $\Gamma = \{e_d^* \circ f \; ; \; f \in \mathcal{L}(E)\}$. Montrez que G est un sous-espace de E stable par u, puis que $F \oplus G = E$.

   Indication : Pour montrer que $F + G = E$, on pourra montrer que l'application $\mathbb{K}[u] \to \mathit{Vect}(\Gamma)$ définie par $P(u) \mapsto e_k^* \circ P(u)$ est surjective

Corrections

Solution 1 - Polynôme minimal (☛ exercice)

L'ensemble $I = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ P(u) = 0\}$ est le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$, c'est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Or, $\mathbb{K}[X]$ est principal donc il existe un polynôme π, unique à multiplication par un élément de $\mathbb{K}^*$ près, tel que $\pi\mathbb{K}[X] = I$. Or, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2, donc ce morphisme d'algèbres n'est pas injectif, donc I n'est pas l'idéal nul. Ainsi, π n'est pas le polynôme nul, et si on choisit π unitaire, alors ce dernier est unique. On le note π_u et on l'appelle le polynôme minimal de u.

Le théorème de Cayley-Hamilton nous dit que $\deg(\pi_u) \leq n$, mais on a quand même une majoration du degré du polynôme minimal sans ce théorème. En effet, la famille $(id, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ de $\mathcal{L}(E)$ est de cardinal $n^2 + 1$ dans un espace de dimension n^2, elle est donc liée. Ainsi, il existe un polynôme P de degré au plus n^2 tel que $P(u) = 0$, donc multiple de π_u. Ainsi, $\deg(\pi_u) \leq n^2$.

Si A est une matrice diagonale par blocs $A_1, \dots, A_r$, alors $\pi_A = \mathrm{ppcm}(\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_r})$. En effet, $P(A) = 0$ si et seulement si (calcul par blocs) $P(A_i) = 0$ pour tout i, donc si et seulement si $\pi_{A_i} | P$ pour tout i, donc si et seulement si $\mathrm{ppcm}(\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_r}) | P$.

Solution 2 - Lemme de décomposition des noyaux (☛ exercice)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On écrit

$$P = \prod_{i=1}^{r} P_i$$

où les P_i sont premiers entre eux deux à deux. Alors on a :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(u))$$

Démontrons le théorème. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $P = P_1 P_2$. On utilise une relation de Bézout entre P_1 et P_2 qui sont premiers entre eux. On a Q_1, Q_2 des polynômes tels que $1 = P_1 Q_1 + P_2 Q_2$. Si $x = y + z \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$, alors clairement $x \in \ker(P(u))$ car $P(u)(x) = P_1(P_2(u)(z)) + P_2(P_1(u)(y)) = 0 + 0 = 0$.

Réciproquement, si $x \in \ker(P(u))$, alors la relation de Bézout précédente donne $id = P_1(u)Q_1(u) + P_2(u)Q_2(u)$, donc $x = Q_1(u)P_1(u)(x) + Q_2(u)P_2(u)(x) = y + z$. Or, $P_2(u)(y) = Q_1(u)P(u)(x) = 0$ et $P_1(u)(z) = Q_2(u)P(u)(x) = 0$. Donc $x \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

Il reste à voir que cette somme est directe : si $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$, alors par la relation de Bézout, $x = Q_1(u)P_1(u)(x) + Q_2(u)P_2(u)(x) = 0$. D'où le lemme de décomposition des noyaux.

Solution 3 - Un premier pas vers Jordan et Dunford (☞ exercice)

Comme χ_u est scindé, alors par le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a une décomposition de E en sous-espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker((u - \lambda_i id)^{m_i})$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u et m_i des entiers strictement positifs.

Sur chaque $\ker((u - \lambda_i id)^{m_i})$, qu'on note $E^{\lambda_i}(u)$ et qu'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i, la restriction de u est somme d'une homothétie de rapport λ_i et d'un endomorphisme nilpotent. On a donc une base de $E^{\lambda_i}(u)$ dans laquelle la matrice de la restriction de u est de la forme $\lambda_i I_{n_i} + N_i$ où N_i est une matrice nilpotente. Ainsi, en concaténant ces bases, on a la matrice de u :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r I_{n_r} + N_r \end{pmatrix}$$

Solution 4 - Théorème de Cayley-Hamilton dans le cas cyclique (☞ exercice)

1. Si $i \in [\![0, n-2]\!]$, on a $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$, et $u(u^{n-1}(x)) = u^n(x) \in E$ s'écrit

$$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$$

La matrice de u dans cette base est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a alors, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_u & = & \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & X-a_{n-1} \end{vmatrix} \\
& = & (X-a_{n-1})X^{n-1} + (-1)(-a_{n-2})(-1)X^{n-2} + (-a_{n-3})(-1)^2X^{n-3} + \dots \\
& & \dots + (-1)^{n+2}(-a_1)(-1)^{n-2}X + (-1)^{n+1}(-a_0)(-1)^{n-1} \\
& = & X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0
\end{array}$$

2. Un endomorphisme étant entièrement déterminé par son image sur une base, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\chi_u(u)(u^i(x)) = 0$. D'abord, on a

$$\chi_u(u)(x) = u^n(x) - a_{n-1}u^{n-1}(x) - \dots - a_1u(x) - a_0x = 0$$

par définition des a_i. Ensuite, si $i > 0$,

$$\chi_u(u)(u^i(x)) = (\chi_u(u) \circ u^i)(x) = (u^i \circ \chi_u(u))(x) = u^i(\chi_u(u)(x)) = u^i(0) = 0$$

Donc $\chi_u(u)$ est bien l'endomorphisme nul.

3. Comme la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre, alors pour tout polynôme non nul P de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $P(u)(x) \neq 0$. Ainsi, pour tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$, $P(u) \neq 0$. Donc le polynôme minimal de u est au moins de degré n. Mais χ_u est un polynôme annulateur de u de degré n. Les deux étant unitaires, et par unicité du polynôme minimal, $\pi_u = \chi_u$.

Solution 5 - Matrices symétriques et nilpotentes (☛ exercice)

$A + {}^tA$ est une matrice symétrique. Par le théorème spectral, elle est diagonalisable. Or, une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle (car ses valeurs propres sont toutes nulles). Donc $A = -{}^tA$, donc A est anti-symétrique. Pour ${}^tAA$, qui est aussi symétrique, on obtient que ${}^tAA = 0$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$0 = {}^tX{}^tAAX = \langle AX, AX \rangle = ||AX||_2^2$$

Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $AX = 0$. Donc $A = 0$.

Solution 6 - Une petite réduction dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ (☛ exercice)

Le polynôme $X^n - 1$ annule A, donc $\pi_A | X^n - 1$. Or, $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, et c'est un polynôme à coefficients réel donc ses racines sont conjuguées. Ainsi, on a les décompositions en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^{2n} - 1 = \underbrace{(X-1)(X+1)}_{X^2-1} \prod_{k=1}^{n-1} X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{2n}\right) + 1 \quad \text{et} \quad X^{2n+1} - 1 = (X-1) \prod_{k=1}^{n} X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1$$

Si π_A est un facteur de degré 1, alors $A = \pm I_2$ donc $A^{12} = I_2$. Sinon, π_A est un facteur de degré 2, c'est donc soit $(X-1)(X+1)$, soit un polynôme de la forme

$$X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1$$

Dans le premier cas, A possède deux valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable semblable à $\mathrm{diag}(1, -1)$ et donc A^2 est semblable à I_2, donc $A^2 = I_2$ donc $A^{12} = I_2$. Dans le second cas, on a par le théorème de Cayley-Hamilton que $\pi_A = \chi_A$ car ils sont de même degré. Or, $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$, donc

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

Ainsi, la liste des valeurs possibles de $2k\pi/n$ est finie :

$$\frac{2k\pi}{n} \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

On note $\omega = \exp(i\theta)$ avec θ un élément de l'ensemble précédent, celui correspondant à A. Alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car son polynôme minimal est $(X - \omega)(X - \overline{\omega})$ qui est scindé à racines simples, et donc A est semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice $\mathrm{diag}(\omega, \overline{\omega})$. Or, $\omega^{12} = 1$ car $12\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $A^{12} = I_2$.

Solution 7 - Multiplication à gauche (☛ exercice)

1. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $L_A : B \mapsto AB$ est bien linéaire par linéarité de la multiplication matricielle, donc on a bien $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. De plus, toujours par linéarité de la multiplication matricielle, on a $L_{\lambda A + B} = \lambda L_A + L_B$. Enfin, par associativité de la multiplication matricielle, on a $L_{AB} = L_A L_B$. Donc L est bien un morphisme d'algèbres. Finalement, on a $L_A = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AB = 0$, ce

qui signifie que $A = 0$ (prendre $B = I_n$). Donc L est injective. Elle n'est pas surjective car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = n^2$ tandis que $\dim(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))) = n^4$.

2. On le fait par double divisibilité. Comme L est un morphisme d'algèbres, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(L_A) = L_{P(A)}$. Ainsi, on a

$$\pi_A(L_A) = L_{\pi_A(A)} = L_{0_n} = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))}$$

donc $\pi_{L_A} | \pi_A$. Réciproquement, on a

$$L_{\pi_{L_A}(A)} = \pi_{L_A}(L_A) = 0$$

par injectivité de L, on obtient que $\pi_{L_A}(A) = 0$, donc $\pi_A | \pi_{L_A}$. Ces deux polynômes étant unitaires, ils sont égaux. Donc $\pi_A = \pi_{L_A}$.

On n'a pas l'égalité des polynômes caractéristiques car χ_A est de degré n tandis que χ_{L_A} est de degré n^2.

3. Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples, et une matrice **complexe** est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0, donc si et seulement si son polynôme minimal est une puissance de X. Ce qui précède donne alors les équivalences recherchées.

Solution 8 - Diagonale de a sur un parterre de b (☛ exercice)

- Méthode 1 :
  1. On remarque que les vecteurs :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de $A_n(a, a)$ associés à la valeur propre 0. De plus, ils forment une famille libre de K^n. Donc $\dim(E_0(A_n(a, a))) \geq n - 1$. Or, on remarque également que le vecteur $X_1 = {}^t(1, \ldots, 1)$ est vecteur propre de $A_n(a, a)$ pour la valeur propre na. Donc $\dim(E_{na}(A_n(a, a))) \geq 1$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de $A_n(a, a)$ est au plus $n = \dim(K^n)$, alors 0 et na sont les seules valeurs propres de $A_n(a,a)$ et on a égalité : $\dim(E_0(A_n(a,a))) = n-1$ et $\dim(E_{na}(A_n(a,a))) = 1$.

Remarque : Ici, j'utilise beaucoup de « on remarque que », mais il faut voir que c'est effectivement le cas : multiplier à droite par un vecteur colonne revient à effectuer la combinaison linéaire des colonnes de la matrice associée aux coefficients du vecteur. Ainsi, on voit aisément que sommer toutes les colonnes, c'est-à-dire multiplier la matrice par ${}^t(1,\dots,1)$, renvoie un vecteur proportionnel à ${}^t(1,\dots,1)$ par exemple.

2. La dimension algébrique d'une valeur propre étant supérieure à sa dimension géométrique, on a $X^{n-1}(X-na)|\chi_{A_n(a,a)}$. Or, $\chi_{A_n(a,a)}$ est un polynôme unitaire de degré n, de même pour $X^{n-1}(X-na)$. Donc on a égalité : $\chi_{A_n(a,a)} = X^{n-1}(X-na)$.

   Ainsi, la dimension algébrique et la dimension géométrique des valeurs propres de $A_n(a,a)$ coïncident, donc $A_n(a,a)$ est diagonalisable, semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(na,0,\dots,0)$ dans la base $(X_1,\dots,X_n)$. Ainsi, on a $PA_n(a,a)P^{-1} = D$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -(n-1) & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

   Pour obtenir P^{-1}, on peut par exemple écrire les vecteurs de la base canonique dans la base $(X_1,\dots,X_n)$ (ce n'est pas difficile).

3. On a $A_n(a,b) = (a-b)I_n + A_n(b,b)$. Ainsi, λ est valeur propre de $A_n(b,b)$ si et seulement si $a-b+\lambda$ est valeur propre de $A_n(a,b)$.

   Remarque : Attention, c'est faux dans le cas général, les valeurs propres d'une somme de matrice n'est pas la somme des valeurs propres de ces matrices ! Ici, c'est vrai parce qu'on travaille avec une homothétie. De plus, les espaces propres sont les mêmes, plus précisément : $E_0(A_n(b,b))) = E_{a-b}(A_n(a,b))$ et $E_{nb}(A_n(b,b)) = E_{a+(n-1)b}(A_n(a,b))$. Donc $\chi_{A_n(a,b)} = (X-(a-b))^{n-1}(X-(a+(n-1)b))$.

   Enfin, $A_n(a,b)$ est inversible si et seulement si $\chi_{A_n(a,b)}(0) \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq b$ et $a \neq (1-n)b$.

4. Ainsi, les multiplicités algébriques et géométriques des valeurs propres de $A_n(a,b)$ coïncident, donc $A_n(a,b)$ est diagonalisable. En fait, la même matrice P diagonalise $A_n(a,b)$, car elle commute avec $(a-b)I_n$. On a donc :

$$PA_n(a,b)P^{-1} = \mathrm{diag}(a+(n-1)b, a-b, \dots, a-b)$$

En particulier, si $k \in \mathbb{N}^*$, et en notant $\lambda_1 = a + (n-1)b$ et $\lambda_2 = a - b$, on a :

$$A_n(a,b)^k = P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_2^k)P = \cdots = \frac{1}{n}A_n(\lambda_1^k + (n-1)\lambda_2^k,\ \lambda_1^k - \lambda_2^k)$$

- Méthode 2 :
  1. On renvoie à la solution 9 ☜.
  2. $A_n(a,b)$ est une matrice circulante associée à la famille $(a, b, \dots, b)$, elle est donc diagonalisable par ce qui précède de valeurs propres $P(\omega)$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$ et $P = a + b(X + X^2 + \cdots + X^{n-1})$. On a :
     - ▷ Si $\omega = 1$, alors $P(\omega) = a + (n-1)b$
     - ▷ Si $\omega \neq 1$, alors $\omega^{n-1} = \omega^{-1} \neq 1$. Or, $P = a + bX\dfrac{X^{n-1}-1}{X-1}$, donc

     $$P(\omega) = a + b\omega\frac{\omega^{-1}-1}{\omega-1} = a + b\frac{1-\omega}{\omega-1} = a - b$$

     Ainsi, les valeurs propres de $A_n(a,b)$ sont $a + (n-1)b$ et $a - b$, et on a :

     $$A_n(a,b) \sim \mathrm{diag}(a + (n-1)b, a-b, \dots, a-b)$$

     La matrice $A_n(a,b)$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $A_n(a,b)$, donc elle est inversible si et seulement si $a \notin \{b, -(n-1)b\}$
  3. Comme $A_n(a,b)$ est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Par le théorème de Cayley-Hamilton, il divise $\chi_{A_n(a,b)} = (X - (a + (n-1)b))(X - (a-b))^{n-1}$, et comme les valeurs propres de $A_n(a,b)$ sont racines du polynôme minimal, alors il s'agit de $\pi_{A_n(a,b)} = (X - (a+(n-1)b))(X - (a-b))$.

Solution 9 - Matrices circulantes et suite de polygones (☞ exercice)

1. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a $Je_i = e_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (où $e_{n+1} = e_1$). Ainsi, $J^k e_i = e_{i+k}$ (encore une fois, « modulo n »), donc J^k est la matrice circulante associée à $e_k = (0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0)$. Ainsi, la famille $(J^0, \dots, J^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et on a que $J^n = I_n$, donc $X^n - 1$ est le polynôme minimal de J. Or, il est de degré n, donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_J = X^n - 1$. En particulier, J est diagonalisable de valeurs propres ω^k, $0 \leq k \leq n-1$ (racines n-ièmes de l'unité)

   Remarque : en fait, $J = {}^t C_{X^n-1}$ est une (transposée d'une) matrice compagnon du polynôme $X^n - 1$, *donc on a directement $\chi_J = X^n - 1 = \pi_j$ si on connait un peu les matrices compagnons, voir l'exercice 4*

2. On remarque que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(J)$. Les J^k sont tous diagonalisables via les mêmes matrices de passage (car $QJ^kQ^{-1} = (QJQ^{-1})^k$). On a alors :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad QJ^kQ^{-1} = \mathrm{diag}(\omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})$$

Donc en multipliant par a_k et en sommant :

$$QP(A)Q^{-1} = \mathrm{diag}(P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1}))$$

Donc $P(A)$ est diagonalisable de valeurs propres $P(\omega^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

3. Modélisons notre problème : on remarque que $\Pi_k = A\Pi_0$ où A est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

qui est la matrice circulante associée à la famille de taille n $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$. Par l'étude précédente sur les matrices circulantes, on obtient que les valeurs propres de A sont les $P(\omega^k)$ où $0 \leq k \leq n-1$ et $P = \dfrac{X+1}{2}$. On note $\mu_k = \dfrac{\omega^k + 1}{2}$. On a alors $A^k = Q\mathrm{diag}(\mu_0^k, \dots, \mu_{n-1}^k)Q^{-1}$ pour une certaine matrice inversible Q.

Or, si $k > 0$, $|\mu_k| < 1$, en effet, on a $|\mu_k| \leq 1$ par inégalité triangulaire, avec égalité si et seulement si ω^k est positivement colinéaire à 1, c'est-à-dire si et seulement si $\omega^k = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $k = 0$. Ainsi, on a

$$\mathrm{diag}(\mu_0^k, \dots, \mu_{n-1}^k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)$$

Donc la suite $(A^k)_k$ converge vers $A_\infty = Q\mathrm{diag}(1, 0, \dots, 0)Q^{-1}$ qui est une matrice de rang 1. Or, le vecteur $X = {}^t(1, 1, \dots, 1)$ vérifie $A^kX = X$ pour tout k, donc en passant à la limite, $A_\infty X = X$. Donc X est dans l'image de A_∞ qui est de rang 1, donc l'image de A_∞ est $\mathbb{C}X$. Ainsi, comme la suite $(A^k)_k$ converge, alors la suite $(\Pi_k)_k$ converge, car $\Pi_k = A^k\Pi_0$. On note Π_∞ la limite : $B\Pi_0 = \Pi_\infty$. Donc Π_∞ est dans l'image de B, donc il existe $g \in \mathbb{C}$ tel que $\Pi_\infty = {}^t(g, g, \dots, g)$.

Il reste à voir que g est l'isobarycentre de Π. Pour cela, on remarque que l'isobarycentre de

Π_k est le même que celui de Π_{k+1} :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{z_i^{(k)}+z_{i+1}^{(k)}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}z_i^{(k)}+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}z_{i+1}^{(k)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}z_i^{(k)}$$

De plus, l'application $(z_0,\dots,z_{n-1})\mapsto\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}z_i$ est continue, donc en passant à la limite, on obtient que l'isobarycentre de Π est égal à l'isobarycentre de $(g,g,\dots,g)$, qui vaut g.

Solution 10 - Réduction de Frobenius (☞ exercice)

1. On a $\pi_u(u)=0$ par définition du polynôme minimal de u, donc $\pi_u(u)(x)=0$, donc π_u est dans l'idéal engendré par $\pi_{u,x}$, d'où la divisibilité. Notons $\pi_u=\prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$ où les P_i sont deux à deux premiers entre eux et irréductibles, et les $m_i>0$. Par le lemme de décomposition des noyaux, on a une décomposition de E de la forme :

$$E=\bigoplus_{i=1}^r\ker(P_i^{m_i}(u))=\bigoplus_{i=1}^r E_i$$

   et chaque sous-espace est stable par u. Montrons que sur chaque E_i, il existe $x_i\in E_i$ tel que $P_i^{m_i}=\pi_{u_{|E_i}}=\pi_{u_{|E_i},x_i}$. Si c'était faux, alors pour tout $x\in E_i$, $\pi_{u_{|E_i},x}=P_i^{k(x)}$ où $k(x)<m_i$. Donc en particulier, pour tout $x\in E_i$, $P_i^{m_i-1}(u_{|E_i})(x)=0$, donc $P_i^{m_i-1}(u_{|E_i})=0$. C'est absurde car le polynôme minimal de $u_{|E_i}$ sur E_i est $P_i^{m_i}$. Donc il existe un vecteur $u_{|E_i}$-cyclique $x_i\in E_i$. On considère maintenant $x=x_1+\dots+x_r\in E$. Alors par stabilité de u sur chacun des E_i, on a

$$\begin{aligned}\forall P\in\mathbb{K}[X],\quad P(u)(x)&=P(u)(x_1)+\dots+P(u)(x_r)\\&=P(u)_{|E_1}(x_1)+\dots+P(u)_{|E_r}(x_r)\\&=P(u_{|E_1})(x_1)+\dots+P(u_{|E_r})(x_r)\end{aligned}$$

   Donc

$$P(u)(x)=0\ \Leftrightarrow\ \forall i\in[\![1,r]\!],\ P(u_{|E_i})(x_i)=0\ \Leftrightarrow\ \forall i\in[\![1,r]\!],\ P_i^{m_i}|P$$

   Donc $\pi_{u,x}=\pi_u$.

2. La famille est libre car sinon on aurait un relation de dépendance linéaire entre $(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x))$, donc un polynôme P de degré au plus $d-1$ non nul tel que $P(u)(x)=0$, ce qui contredit $\deg(\pi_{u,x})=d$. Cette famille est génératrice de $\mathrm{Vect}(u^i(x)\ ;\ i\in\mathbb{N})$ car $\mathrm{Vect}(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x))$ est stable par u puisque $u^d(x)\in\mathrm{Vect}(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x))$.

Dans cette base, on a $u_{|F}(u^i(x)) = u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$ pour tout $0 \leq i \leq d-2$, et $u_{|F}(u^{d-1}(x)) = u^d(x) = \sum_{i=0}^{d-1} -a_i u^i(d)$ si $\pi_u = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$. Donc dans cette base, on a :

$$\mathrm{Mat}(u|F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Comme la famille $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est libre, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $d-1$ n'annule pas $u_{|F}$ (car évalué en x, on n'obtient pas le vecteur nul). Donc $\deg(\pi_{u_{|F}}) \geq d$. Mais $\dim(F) = d = \deg(\chi_{u_{|F}})$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\pi_{u_{|F}} = \chi_{u_{|F}}$. De plus, le polynôme π_u annule $u_{|F}$ et est de degré d, donc on a $\pi_{u_{|F}} = \chi_{u_{|F}} = \pi_u$.

3. Soit G un supplémentaire de F stable par u (existe par hypothèse). On note $v = u_{|G}$. On a $\pi_u(v) = 0$, donc $\pi_v | \pi_u = \pi_{u_{|F}}$. On a donc $E = F \oplus G$ où F et G sont stables par u et $\pi_{u_{|G}} | \pi_{u_{|F}}$. On conclut par récurrence sur la dimension de E en appliquant l'hypothèse de récurrence à G et v. L'initialisation se fait dans le cas où u est cyclique sur E (la décomposition de E est alors $E = E$)

4. G est stable par u car si $y \in G$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $e_d^* \circ u^i(u(y)) = e_d^* \circ u^{i+1}(y) = 0$. Montrons dans premier temps que $F \cap G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap G$. Comme $y \in F$, alors y s'écrit dans la base $(e_1, \dots, e_d)$:

$$y = y_1 e_1 + \dots + y_d e_d$$

Comme $y \in G$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $e_d^* \circ u^i(y) = 0$. Pour $i = 0$, on obtient que $y_d = 0$. Pour $i = 1$, on obtient que $y_{d-1} = 0$, ..., pour $i = d-1$, on obtient que $y_1 = 0$. Donc $y = 0$.

Montrons maintenant que $F + G = E$. On le fait par un argument de dimension. On a $G = \Gamma^\circ = \mathrm{Vect}(\Gamma)^\circ$, donc $\dim(G) = n - \dim(\mathrm{Vect}(\Gamma))$. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[u] & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(\Gamma) \\ P(u) & \mapsto & e_d^* \circ P(u) \end{array}$$

Par définition de Γ et de son espace engendré, cette application est surjective. Donc $\dim(\mathrm{Vect}(\Gamma)) \leq \dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u) = d$. Donc $\dim(G) \geq n - d$, et ainsi $\dim(G) + \dim(F) \geq n$. Donc $F + G = E$ (car $F \cap G = \{0\}$). Donc F et G sont en somme directe.