Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

7 mars 2023

Intégration sur un intervalle quelconque
Théorèmes de Lebesgue

Table des matières

Questions de cours

Intégration

Exercice 1 - Théorème d'intégration terme à terme (solution ☞)

Énoncez le théorème d'intégration terme à terme dans le cas positif et le cas intégrable. Donnez un contre-exemple au théorème dans le cas intégrable si on n'a pas la convergence de la série $\sum \int_I |f_n|$.

Exercice 2 - Théorème de convergence dominée (solution ☞)

Énoncez le théorème de convergence dominée dans le cas d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis donnez un contre-exemple au théorème en l'absence de domination.

Exercice 3 - Intégration des relations de comparaison (solution ☞)

Énoncez le théorème d'intégration des relations de comparaison, et démontrez le cas où $f = o(g)$ et g intégrable.

Exercices

Intégration

★★☆ Exercice 4 - Fonction Γ d'Euler (solution ☞)

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrez que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Calculez $\Gamma(1)$. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$

Indication : On pourra redémontrer que $(1 - t/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t}$

4. En déduire la formule d'EULER :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

★⯪☆ Exercice 5 - Limite de $\int_0^1 f(x/\sqrt{n})^n dx$ (solution)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f'' < 0$. Explicitez la limite de la suite :

$$u_n = \int_0^1 \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n dx$$

★⯪☆ Exercice 6 - Intégrale et série géométrique (solution)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montez que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Puis que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)} dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Remarque : S'il le faut, on admettra que $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$

★⯪☆ Exercice 7 - Comportement de f en l'infini si elle est intégrable (solution)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

1. Est-ce que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$?
2. Si f converge en $+\infty$, montrer que c'est nécessairement vers 0.
3. Si on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, a-t-on $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$?

4. Si on suppose cette fois-ci que f est uniformément continue, a-t-on $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$?

Remarque : Pour rappel, une fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, si $|x-y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

★⯪☆ Exercice 8 - Queue de la gaussienne (solution 👉)

Montrez que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est intégrable en $+\infty$ puis donnez un équivalent en $+\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

<u>Indication :</u> *On pourra faire une IPP*

★⯪☆ Exercice 9 - Intégrales de Wallis (solution 👉)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

1. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est bien définie et calculez W_0 et W_1.
2. Montrez que pour tout $n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2}\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 1}$$

4. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$0 \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$$

et en déduire que

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis la formule de Wallis :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$$

5. En déduire que

$$W_{2n} \sim W_{2n+1} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

puis que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Corrections

Solution 1 - Théorème d'intégration terme à terme (☞ exercice)

- Cas positif : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ positives, continues par morceaux et intégrables, si la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme f est continue par morceaux, alors dans $[0,+\infty]$:

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

- Cas intégrable : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux et intégrables. Si la série $\sum f_n$ converge simplement et sa somme f est continue par morceaux. Si la série $\sum \int_I |f_n|$ converge, alors f est intégrable, â série $\sum \int_I f_n$ converge et on a l'égalité :

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Si on retire l'hypothèse $\sum \int_I |f_n|$ converge dans le second cas, le résultat est faux. Prenons par exemple une bosse glissante anti-symétrique à l'infini : $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x) - \mathbf{1}_{[-n,-n-1]}(x)$. Alors $\sum f_n$ converge simplement vers $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}$, mais f n'est pas intégrable tandis que $\sum \int_{\mathbb{R}} f_n = 0$.

Solution 2 - Théorème de convergence dominée (☞ exercice)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si

1. $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux
2. Il existe g une fonction positive, continue par morceaux et intégrable telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors f est intégrable, et : $\int_I |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Dans le cas où il n'y a pas domination, le théorème est faux. Prenons par exemple une bosse glissante à l'infini : $f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1]}(x)$. Alors $(f_n)_n$ converge simplement vers zéro, mais $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tandis que $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0$.

Solution 3 - Intégration des relations de comparaison (☛ exercice)

Théorème *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et g une fonction positive continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors :*

- *Si g est intégrable :*
  - ▷ *Si $f = o(g)$, alors f est intégrable et $\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$*
  - ▷ *Si $f = O(g)$, alors f est intégrable et $\int_x^{+\infty} f = O\left(\int_x^{+\infty} g\right)$*
  - ▷ *Si $f \sim g$, alors f est intégrable et $\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g$*
- *Si g n'est pas intégrable :*
  - ▷ *Si $f = o(g)$, alors $\int_0^x f = o\left(\int_0^x g\right)$*
  - ▷ *Si $f = O(g)$, alors $\int_0^x f = O\left(\int_0^x g\right)$*
  - ▷ *Si $f \sim g$, alors f n'est pas intégrable et $\int_0^x f \sim \int_0^x g$*

Preuve du tout premier cas On a une fonction continue par morceaux positive $h(x)$ qui tend vers 0 en l'infini telle que $|f(x)| = h(x)g(x)$ pour tout x. Ainsi, à partir d'un certain rang, on a $|f(x)| \leq g(x)$ donc f est intégrable. De plus, on a :

$$|\int_x^{+\infty} f(x)dx| \leq \int_x^{+\infty} h(x)g(x)dx \leq \underbrace{\sup_{[x,+\infty]}(h)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} \int_x^{+\infty} g(x)dx$$

Donc $\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$

Solution 4 - Fonction Γ d'Euler (☛ exercice)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la règle du $t^\alpha f(t)$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$. De plus, comme $x - 1 > -1$, elle est intégrable en zéro. Donc $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\Gamma(1) = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt \underset{IPP}{=} \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 0 + x\Gamma(x)$$

On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$. Pour $n = 0$, c'est vrai. Et si $n \in \mathbb{N}$, alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \underset{HR}{=} n(n-1)! = n!$.

3. On réécrit $I_n(x)$ comme une intégrale de 0 à $+\infty$ en ajoutant une indicatrice :

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbf{1}_{\{[0,n]\}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}}_{f_n(t)} dt$$

On a $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (convergence simple), et

$$|f_n(t)| \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) t^{x-1} \leq \exp\left(n\left(-\frac{t}{n}\right)\right) t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable, d'où la domination. Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \Gamma(x)$$

4. Calculons explicitement $I_n(x)$:

$$I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = \int_0^1 (1-u)^n n^{x-1}u^{x-1}ndu = n^x \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du}_{J_n(x)}$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $J_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Pour $n = 0$, on a $J_0(x) = \int_0^1 u^{x-1}du = 1/x$. Si on suppose vrai le résultat pour J_{n-1}, on a :

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du \\
&= \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^n \frac{u^x}{x}du \\
&= \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^x du \\
&= \frac{n}{x}J_{n-1}(x+1) \\
&= \frac{n(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $I_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$

Remarque : Cette formule permet d'étendre la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, qui en fait une fonction holomorphe

Solution 5 - Limite de $\int_0^1 f(x/\sqrt{n})^n dx$ (☞ exercice)

On a pour tout $y \in [0,1]$ les formules de Taylor suivantes :

- Taylor-Young :

$$f(y) = f(0) + yf'(0) + \frac{y^2}{2}f''(0) + o(y^2) = 1 + \frac{y^2}{2}f''(0) + o(y^2)$$

- Taylor-Lagrange :

$$\exists z \in [0,y], \quad f(y) = f(0) + yf'(0) + \frac{y^2}{2}f''(z) = 1 + \frac{y^2}{2}f''(z)$$

Ainsi, en notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$, on a :

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \exp\left(n\ln\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{x^2}{2n}f''(0) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(\frac{x^2}{2n}f''(0) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x^2}{2}f''(0) + o(1)\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(f''(0)\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$, on a $z \in [0,1]$ tel que :

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \exp\left(n\ln\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{x^2}{2n}f''(z)\right)\right) \\
&\leq \exp\left(n\frac{x^2}{2n}f''(z)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x^2}{2}f''(z)\right) \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Or, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$. Par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\int_0^1 \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^{f''(0)\frac{x^2}{2}} dx$$

Solution 6 - Intégrale et série géométrique (☞ exercice)

- Si $t>0$, on a la somme géométrique

$$\frac{1}{1-e^{-bt}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbt}$$

Donc :

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+nb)t} dt$$

Si nous parvenons à justifier la permutation somme/intégrale, on obtiendra :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(a+nb)t} dt$$

Or, si $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} te^{-(a+nb)t} dt = \left[\frac{-1}{a+nb} te^{-(a+nb)t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-1}{a+nb} e^{-(a+nb)t} dt = 0 + \frac{1}{(a+nb)^2}$$

Ainsi, on aura :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}$$

Justifions maintenant la permutation somme/intégrale en utilisant le théorème d'intégration terme à terme. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $t\in\mathbb{R}_+ \mapsto te^{-(a+nb)t}$ est positive, continue et intégrable. De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} te^{-(a+nb)t}$$

vers $\dfrac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}$ (série géométrique), et cette limite est une fonction continue de t. Ainsi, on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(a+nb)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(a+nb)t} dt$$

- On applique ce qui précède pour $a = 1$ et $b = 1$. On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

  Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

- On applique ce qui précède pour $a = 1$ et $b = 2$. On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-2t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

  Or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

  Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

  De plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-2t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{sh}(t)} dt$$

  Donc finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Solution 7 - Comportement de f en l'infini si elle est intégrable (☛ exercice)

1. Non. On prend f affine par morceaux telle que $f(n) = 1$, $f(n + \frac{1}{n^2}) = f(n - \frac{1}{n^2}) = 0$. Alors f est positive et $\int_{\mathbb{R}_+} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$ (la valeur n'a aucun intérêt, c'est juste pour la culture), donc f est intégrable. Mais f ne tend pas vers 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$
2. Soit $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si $l \neq 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $|f(x)| > l/2 > 0$. Mais alors, $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt = +\infty$, donc f n'est pas intégrable.
3. On applique le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^{+\infty} f'(t)dt - \int_x^{+\infty} f'(t)dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| f(x) - f(0) - \int_0^{+\infty} f'(t)dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |f'(t)|dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc f converge en $+\infty$. Par la question précédente, elle converge forcément vers zéro.

4. Supposons par l'absurde que f ne converge pas vers 0 en $+\infty$. Cela signifie qu'il existe un réel $m > 0$ et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tels que :

   - $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} - y_n \geq 1$
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(y_n)| \geq m$

   Soit $0 < \varepsilon < m$, et $1/2 > \eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f associé à ε. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]y_n - \eta, y_n + \eta[$, $|f(x) - f(y_n)| < \varepsilon$. En particulier, $|f(x)| > m - \varepsilon$. On note $\alpha > 0$ ce minorant. De plus, par notre choix de η, les intervalles $]y_n - \eta, y_n + \eta[$ sont deux à deux disjoints. Finalement :

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|dt \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{y_n-\eta}^{y_n+\eta} |f(t)|dt \geq \sum_{n=0}^{+\infty} 2\eta\alpha = +\infty$$

   C'est absurde car on a supposé f intégrable. Donc f converge vers 0.

Solution 8 - Queue de la gaussienne (☞ exercice)

On a $t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée, donc par la règle du « $x^\alpha f(x)$ », cette fonction est bien intégrable en $+\infty$.

On a :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_x^{+\infty} \frac{-t}{-t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{-t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Or :

$$\frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

Par intégration des relations de comparaison, comme la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est positive et intégrable :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)$$

Ainsi :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \underset{+\infty}{=} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} + o\left(\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

Donc :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

Solution 9 - Intégrales de Wallis (☞ exercice)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^n$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc W_n est bien définie. On a $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$

2. On fait une IPP :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\sin(t)dt = \left[-\sin^{n-1}(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)dt =$$

Donc $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$

3. Récurrence sur n (à savoir rédiger correctement, la présentation suivante peut passer le jour de l'oral mais à condition que vous sachiez parfaitement la faire proprement si on vous le demande.)

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}W_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2}$$

De même pour W_{2n+1}.

4. Si $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{2n+1}(x) \leq \sin^{2n}(x) \leq \sin^{2n-1}(x)$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on a $0 \leq W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$. En fait, toutes ces quantités sont strictement positives (car ni la fonction sinus, ni ses puissances, ne sont identiquement nulles sur $[0, \pi/2]$), on peut donc diviser par W_{2n+1} :

$$1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

(la dernière égalité vient de l'expression de W_{2n+1} qu'on a obtenue précédemment.) Par encadrement, on obtient que :

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis la formule de Wallis en écrivant l'expression de chaque terme qu'on a obtenue précédemment :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 1}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$$

5. La formule de Wallis donne que :

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Le membre de gauche est égal à $\frac{2}{\pi}W_{2n}$, donc $W_{2n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Comme le quotient W_{2n}/W_{2n+1} tend vers 1, alors $W_{2n+1} \sim W_{2n}$.
En particulier, $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n)}}$ et $W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$, donc $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$