# Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

14 mars 2023

**Variables aléatoires discrètes**

## Table des matières

# Questions de cours

## Variables aléatoires discrètes

### Exercice 1 - Espérance de variables aléatoires discrètes positives (solution ☞)

Définissez l'espérance d'une variable aléatoire discrète positive lorsque cela est possible. Montrez la formule

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Donnez l'espérance d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, binomiale de paramètres $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ et géométrique de paramètre $p \in ]0,1]$

---

### Exercice 2 - Variance de variables aléatoires discrètes (solution ☞)

Définissez la notion de variance d'une variable aléatoire discrète. Une variable aléatoire admet-elle toujours une variance ? Donnez des exemples de lois qui admettent une variance, qui admette une espérance mais pas de variance, et qui n'admettent ni espérance ni variance. Que dire d'une variable aléatoire de variance nulle ? Application : Exercice 6 ☞

---

### Exercice 3 - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (solution ☞)

Énoncez et démontrez les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
Application : on lance une pièce 1000 fois (on n'a que ça à faire), et on tombe 600 fois sur « pile ». Peut-on raisonnablement penser que la pièce est truquée ?

---

# Exercices

## Variables aléatoires discrètes

### ★☆☆ Exercice 4 - Quotient de variables aléatoires de même loi (solution ☞)

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes et de même loi. Montrez que

$$\mathbb{E}(X/Y) \geq 1$$

---

### ★☆☆ Exercice 5 - Inverse d'une loi géométrique (solution)

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. Calculez $\mathbb{E}(1/X)$.

---

### ★☆☆ Exercice 6 - Être auto-indépendant (solution)

Soit $X$ une variable aléatoire discrète telle que $X$ soit indépendante d'elle-même. Montrez que $X$ est presque-sûrement constante.

---

### ★★☆ Exercice 7 - Dés pipés (solution)

1. Soient $a < b \in \mathbb{N}$. Calculez $G_X$ si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.
2. Montrez que le polynôme $1 + t + \cdots + t^{2n}$ peut être factorisé sur $\mathbb{R}$ en deux polynômes de degré $n$ si et seulement si $n$ est pair.
3. Dans le cas où $n$ est pair, montrer qu'au moins l'un des facteurs possède un coefficient négatif.
4. Est-il possible de piper deux dés à $n \geq 2$ faces (par exemple, à 6 faces) tels que la variable aléatoire indiquant la somme obtenue suive une loi uniforme sur $\llbracket 2, 2n \rrbracket$ ?

---

### ★½☆ Exercice 8 - Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (solution)

Soit $n \geq 2$. Montrez qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.

*Indication :* *On pourra prendre $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ une famille de* Rademacher *indépendantes et calculer* $\mathbb{E}(\det(A)^2)$ *où $A$ est la matrice aléatoire $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$*

---

### ★½☆ Exercice 9 - Sommes aléatoires (solution)

Soient $(X_n)_n$ une suite de VAIID à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $N$ une autre VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de tous les $X_i$. On cherche à comprendre la somme aléatoire

$$S = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

On note $S_n$ la somme partielle d'ordre $n$ et , pour simplifier les notations, on note $X = X_1$ de sorte que pour tout $n$, $X_i \sim X$.

1. Montrez que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $G_S(t) = G_N(G_X(t))$
2. En déduire que si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $S \sim \mathcal{P}(p\lambda)$
3. On suppose que $N$ et $X$ sont d'espérance finie. Montrez que $S$ est également d'espérance finie, puis montrez la formule de WALD

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$$

---

## ★★☆ Exercice 10 - Théorème d'approximation de WEIERSTRASS (solution)

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On appelle la fonction $B_n(f)$ le $n$-ième polynôme de BERNSTEIN de $f$. Démontrez le théorème de BERNSTEIN :

**Théorème (BERNSTEIN)** *La suite de fonction $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[0, 1]$*

Indications : Après avoir exprimé $B_n(f)(x)$ comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire, on pourra utiliser l'uniforme continuité de $f$ pour majorer indépendamment de $x$ la quantité

$$|B_n(f)(x) - f(x)|$$

---

## ★☆☆ Exercice 11 - Matrices aléatoires

Soient $X, Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. On pose la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & X+Y-1 \\ 0 & Y-1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que $A$ soit inversible ? Que $A$ soit nulle ?
2. Déterminez la loi du rang de $A$
3. Quelle est la probabilité que $A$ soit diagonalisable ?

# Corrections

### Solution 1 - Espérance de variables aléatoires discrètes positives (☛ exercice)

Si $X$ est une variable aléatoire discrète positive, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

On obtient la seconde formule en écrivant $n = \sum_{k=1}^{n} 1$ et en permutant les sommes (ce qui est possible car tout est positif). Enfin, on a

- $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = p$
- $X \sim \mathcal{B}(n, p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$
- $X \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 1/p$

---

### Solution 2 - Variance de variables aléatoires discrètes (☛ exercice)

Soit $X$ une variable aléatoire discrète. On dit que $X$ admet une variance si la variable aléatoire $X^2$ admet une espérance, et on définit alors

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Une variable aléatoire finie admet toujours une variance, une variable aléatoire $X$ de loi $\mathbb{P}(X = n) = 1/(n^3 a)$ où $a = \zeta(3)$ admet une espérance (qui vaut $\zeta(2)/\zeta(3)$) mais pas de variance. Une variable aléatoire $X$ de loi $\mathbb{P}(X = n) = 1/(n^2 b)$ où $b = \zeta(2)$ n'admet pas d'espérance, donc pas de variance.

Une variable aléatoire est de variance nulle si et seulement si elle est presque sûrement constante. En effet, par définition de la variance, l'espérance de la variable aléatoire positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est nulle, donc cette variable aléatoire est presque sûrement nulle, donc $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement.

---

### Solution 3 - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (☛ exercice)

**Inégalité de Markov** Soit $X$ une variable aléatoire réelle d'espérance finie et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\alpha > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

**Démonstrations** On a :

$$a\mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$$

En passant à l'espérance et par croissance de celle-ci, on obtient l'inégalité de Markov. Pour l'inégalité de BT, on applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$, qui est d'espérance finie égale à la variance de $X$. On obtient alors :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

**Application** Si la pièce n'est pas truquée, on peut la modéliser comme une somme de 1000 variables aléatoires de Bernoulli de paramètre 1/2. La somme $S$ suit alors une loi binomiale de paramètres $(1000, 1/2)$. Ainsi, $\mathbb{E}(S) = 500$ et $\mathbb{V}(S) = 250$. Par l'inégalité de BT, on a :

$$\mathbb{P}(|S - 500| = 100) \leq \mathbb{P}(|S - 500| \geq 100) \leq \frac{250}{10000} = 2.5\%$$

Ainsi, on peut quand même raisonnablement penser que la pièce est truquée... (surtout que ces inégalités sont très peu fines !)

---

**Solution 4 - Quotient de variables aléatoires de même loi (☞ exercice)**

On utilise le fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Par croissance de l'espérance, on a alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right) \leq \mathbb{E}(2) = 2$$

Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes et de même loi, alors $X/Y$ suit la même loi que $Y/X$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$2\mathbb{E}(X/Y) \geq 2$$

D'où le résultat.

---

**Solution 5 - Inverse d'une loi géométrique (☛ exercice)**

Par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(1/X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p}{1-p} \ln(p)$$

---

**Solution 6 - Être auto-indépendant (☛ exercice)**

Deux solutions sont proposées, selon les programmes de colle :

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = x, X = x) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(X = x)$ par indépendance. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) \in \{0, 1\}$. Comme $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, alors

  $$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$$

  Ainsi, il existe un unique $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 1$, donc $X$ est presque sûrement constante.
- On a $\mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X)$ et, comme $X$ est indépendante d'elle-même, $\mathbb{V}(2X) = 2\mathbb{V}(X)$. Donc $\mathbb{V}(X) = 0$ et donc $X$ est presque sûrement constante.

---

**Solution 7 - Dés pipés (☛ exercice)**

1. On a

   $$\mathbb{P}(X = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} & \text{si } a \leq n \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Ainsi,

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X = \sum_{n=a}^{b} \frac{t^n}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1} \sum_{n=a}^{b} t^n$$

2. On a

   $$\sum_{k=0}^{2n} t^k = \frac{1-t^{2n+1}}{1-t}$$

   Ainsi, ce polynôme est scindé à racines simples de racines $\mathbb{U}_{2n+1} \setminus \{1\}$, qui contient $n$ paires de complexes conjugués (car ne contient pas 1 ni $-1$) formant des facteurs irréductibles réels de degré 2 chacun. Si $n$ est pair, alors on considère deux polynômes comportant chacun $n/2$

de ces facteurs de degré 2. Si $n$ est impair, alors on ne peut pas avoir une telle factorisation (en terme de racines, il y aura nécessairement une racine d'un des facteurs telle que son conjugué ne soit pas racine de ce facteur).

3. On suppose que $1+t+\cdots+t^{2n} = PQ$ avec $P$ et $Q$ des polynômes réels de degré $n$. On écrit

$$\begin{cases} P = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \\ Q = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0 \end{cases}$$

On a $a_n = b_n = a_0 = b_0 = 1$ (car $P$ et $Q$ sont produits de polynômes de la forme $t^2+\lambda t+1$). Calculons le coefficient de degré $n$ du produit $PQ$ :

$$1 = a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = 2 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1}$$

Ainsi, il y a nécessairement un des termes $a_i b_{n-i}$ qui est strictement négatif pour un certain $1 \leq i \leq n-1$, et donc $P$ ou $Q$ possède un coefficient strictement négatif.

4. Soit $X$ la loi du premier dé pipé et $Y$ la loi du second dé pipé. Comme les dés sont indépendants (ce sont deux objets physiques n'ayant aucune influence l'un sur l'autre), alors les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes. En particulier, on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Comme $G_X(0) = 0 = G_Y(0)$, alors $t|G_X$ et $t|G_Y$, de sorte qu'on ait l'égalité

$$\frac{1}{2n-1}\sum_{k=0}^{2n-2} t^k = \frac{G_X}{t}\frac{G_Y}{t}$$

Les polynômes $G_X$ et $G_Y$ étant de degré $n$ chacun, alors les polynômes $G_X/t$ et $G_Y/t$ sont de degré $n-1$. Si $n-1$ est pair, alors par la question précédente, l'un des polynômes $G_X/t$ ou $G_Y/t$ admet un coefficient strictement négatif, et n'est donc pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire, ce qui est absurde. Si $n-1$ est impair, alors par la question encore avant, le polynôme $1+t+\cdots+t^{2n-2}$ ne peut pas être factorisé en deux polynômes réels de degrés $n-1$, ce qui est absurde également.

Finalement, aucun cas n'est possible, donc il n'est pas possible de truquer deux dés pour que la loi de la somme suive une loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$.

---

**Solution 8 - Une méthode probabiliste sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (☛ exercice)**

Soient $\varepsilon_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ des variables aléatoires de Rademacher deux à deux indépendantes, c'est-à-dire uniformes sur $\{-1, 1\}$. On pose $A = (\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ la matrice aléatoire correspondante. On calcule :

$$\mathbb{E}\left[\det(A)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,\sigma(i)}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,\sigma(i)}\varepsilon_{i,\tau(i)}\right]$$

Par linéarité de l'espérance, on est ramené à calculer les

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,\sigma(i)}\varepsilon_{i,\tau(i)}\right]$$

pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Or, par indépendance des $\varepsilon_{i,j}$, si $\sigma \neq \tau$, alors il existe $i$ tel que $(i, \sigma(i)) \neq (i, \tau(i))$. En particulier, $\varepsilon_{i,\sigma(i)}$ est indépendant du produit des autres termes, et on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,\sigma(i)}\varepsilon_{i,\tau(i)}\right] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,\sigma(i)}\right]\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,\tau(i)}\prod_{1\leq j\neq i\leq n}\varepsilon_{j,\sigma(j)}\varepsilon_{j,\tau(j)}\right] = 0$$

Ainsi, les termes restants dans la somme définissant $\mathbb{E}[\det(A)^2]$ sont ceux où $\sigma = \tau$, et on a alors :

$$\mathbb{E}\left[\det(A)^2\right] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)^2\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_{i,\sigma(i)}^2\right] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} 1 = n!$$

Or, la matrice constituée uniquement de 1 est de déterminant nul (car $n \geq 2$). Donc $\mathbb{P}(\det(A)^2 = 0) > 0$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Alors il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $\det(M)^2 > n!$. En effet, par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}[\det(A)^2] = \sum_{M\in\mathcal{A}}\det(M)^2\mathbb{P}(A = M) = \frac{1}{|\mathcal{A}|}\sum_{M\in\mathcal{A}}\det(M)^2$$

Si tous les $\det(M)^2$ pour $M \in \mathcal{A}$ étaient inférieurs ou égaux à $n!$, comme pour un $M$ particulier (la matrice composée uniquement de 1) a un déterminant nul, on aurait l'inégalité stricte $\mathbb{E}[\det(M)^2] < n!$, ce qui est absurde.

Donc il existe $M \in \mathcal{A}$ telle que $|\det(M)| > \sqrt{n!}$.

---

**Solution 9 - Sommes aléatoires (☞ exercice)**

1. On a par définition

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_S(t) = \mathbb{E}(t^S) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\mathbb{P}(S = n)$$

Calculons alors les $\mathbb{P}(S=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par indépendante de $N$ et des $X_n$, on a :

$$\mathbb{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k,\ S_k=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(S_k=n)$$

On a donc

$$\forall t \in [-1,1], \quad G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(S_k=n) \right) t^n$$

Cette famille (à $t$ fixé, indexée par $(n,k)$) est sommable, donc par permutation des sommes, on obtient

$$\forall t \in [-1,1], \quad G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k=n) t^n \right) \mathbb{P}(N=k) \right]$$

On reconnaît $G_{S_k}(t)$ dans la parenthèse, qui, comme les $X_n$ sont deux à deux indépendants et de même loi suivant $X$, est en fait égal à $(G_X(t))^k$. Ainsi, on a

$$\forall t \in [-1,1], \quad G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (G_X(t))^k \mathbb{P}(N=k) = G_N(G_X(t))$$

2. Par le cours (si ce n'est pas su, il faut savoir le redémontrer rapidement), on a

$$\forall t \in [-1,1], \quad \begin{cases} G_N(t) = e^{\lambda(t-1)} \\ G_X(t) = pt + (1-p) \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la formule précédente, on obtient que

$$\forall t \in [-1,1], \quad G_S(t) = \exp\left(\lambda\left(pt + 1 - p - 1\right)\right) = \exp\left(\lambda p\left(t-1\right)\right) = G_Z(t)$$

où $Z \sim \mathcal{P}(p\lambda)$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors $S \sim \mathcal{P}(p\lambda)$.

3. Comme $X$ et $N$ sont d'espérance finie, alors les fonctions $G_X$ et $G_S$ sont dérivables à gauche en 1. Pour pouvoir utiliser le théorème de composition des dérivées, il faut s'assurer que la fonction $G_X$ tend vers $1^-$ quand $t \to 1^-$. Ceci est le cas car $G_X$ est continue, à valeurs dans $[0,1]$ sur $\mathbb{R}$ et égale à 1 en 1. Ainsi, $G_S$ est dérivable en 1 à gauche et on a

$$G_S'(1) = G_X'(1) G_N'(G_X(1)) = \mathbb{E}(X) G_N'(1) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$$

Ceci signifie que $S$ est d'espérance finie égale à $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N)$, d'où l'égalité de WALD.

**Solution 10 - Théorème d'approximation de WEIERSTRASS (☛ exercice)**

Par le théorème de transfert, on reconnait que pour tout $x \in [0,1]$

$$B_n(f)(x) = \mathbb{E}\left(f(\left(\frac{X}{n}\right))\right)$$

où $X \sim \mathcal{B}(n,x)$. Fixons $x \in [0,1]$, on a

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

par inégalité triangulaire. Comme $f$ est continue sur $[0,1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, alors $f$ est uniformément continue sur $[0,1]$. Fixons alors $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in [0,1]$, si $|y-z| < \delta$ alors $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. On découpe alors notre espérance en deux :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_{\{|\frac{X}{n}-x|<\delta\}}\right) + \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{X}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_{\{|\frac{X}{n}-x|\geq\delta\}}\right)$$

On peut alors majorer le module du premier terme par $\varepsilon$, et on majore le module du second terme par $2\,||f||_\infty$. On obtient :

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \varepsilon\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{|\frac{X}{n}-x|<\delta\}}\right) + 2\,||f||_\infty\,\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{|\frac{X}{n}-x|\geq\delta\}}\right) \\ &= \varepsilon\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| < \delta\right) + 2\,||f||_\infty\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| \geq \delta\right)\end{aligned}$$

On majore la première probabilité par 1 (ce qu'on peut toujours faire). Il reste qu'à traiter la seconde probabilité. On remarque que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - x\right| \geq \delta\right) = \mathbb{P}\left(|X - nx| \geq n\delta\right)$$

Or, $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(n,x)$, donc $\mathbb{E}(X) = nx$. On peut donc appliqué l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV :

$$\mathbb{P}\left(|X - nx| \geq n\delta\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{n^2\delta^2} = \frac{nx(1-x)}{x^2\delta^2} = \frac{1}{4n\delta^2}$$

en utilisant la majoration classique $x(1-x) \leq 1/4$. Finalement, on obtient que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\,||f||_\infty\,\frac{1}{4n\delta^2}$$

Pour $n$ assez grand (plus précisément, pour $n \geq ||f||_\infty /(2\delta^2\varepsilon)$), on obtient que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

Cette majoration étant indépendante de $x$, on obtient alors que pour $n$ assez grand,

$$||B_n(f) - f||_\infty \leq 2\varepsilon$$

ce qui conclut la convergence uniforme de la suite des polynômes de Bernstein de $f$ vers $f$.