Colles MP*

Jad ABOU YASSIN

21 mars 2023

Calcul différentiel
Optimisation

Table des matières

Questions de cours

Calcul différentiel

Exercice 1 - Différentielle et multilinéarité (solution)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to E$ et $g : U \to F$ deux fonctions différentiables en $x_0 \in U$ et $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrez que l'application

$$\begin{array}{rcc} U & \to & G \\ x & \mapsto & B(f(x), g(x)) \end{array}$$

est différentiable en x_0 et calculez sa différentielle en x_0. Généralisez ce résultat (sans le démontrer) aux applications multilinéaires.

Exercice 2 - Fonctions constantes sur un ouvert

Énoncez et démontrez le théorème de caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat peut-il se généraliser sur d'autres ouverts de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 - Application différentiable

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, qu'est-ce qu'une application différentiable définie sur U ? Est-ce que c'est équivalent à être dérivable en tout point selon tout vecteur ? Qu'est-ce qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme on travaille en dimension finie, toutes les applications différentiables sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercices

Calcul différentiel

Exercice 4 - Quelques calculs de primitives multivariées (solution)

1. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y$$

2. Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

★★☆ **Exercice 5 - Équation aux ondes (solution ☜)**

Après avoir montré que les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

sont les fonctions de la forme $f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$ pour φ, ψ deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$, résoudre l'équation aux ondes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

où c est une constante non nulle. On pourra faire les changements de variables $u = x + at$ et $v = x + bt$ avec a et b bien choisis.

★★☆ **Exercice 6 - Équation de transport (solution ☜)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. Cherchez toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. Cherchez toutes les solutions bornées de

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Optimisation

★★☆ **Exercice 7 - Fonctions convexes (solution ☜)**

Soit U un ouvert non vide convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U.

1. Montrez que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in U, \quad f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x)$$

2. On suppose f convexe. En déduire une caractérisation des minimums globaux de f en fonction de la différentielle de f. Ce résultat est-il vrai en général pour une fonction différentiable quelconque ?
3. On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrez que f est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est positive en tout point.
4. En déduire une condition suffisante sur f pour qu'elle admette un minimum global sur U. Comparez cette condition à une autre condition suffisante sur la recherche d'extremums locaux.

★★☆ Exercice 8 - Inégalité de Ky Fan (solution ☞)

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de spectre ordonnés respectifs

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \quad \text{et} \quad \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$$

On note D et Δ les matrices diagonales associées, et O_D et O_Δ les classes de similitudes orthogonales associées. En particulier, $A \in O_D$ et $B \in O_\Delta$. On cherche à démontrer l'inégalité de Ky Fan

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{n+1-i} \leq \mathrm{Tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

On pose dans toute la suite

$$\begin{array}{rccc} f: & O_D \times O_\Delta & \to & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(AB) \end{array}$$

1. Montrez que f est bornée et atteint ses bornes
2. Soit $A \in O_D$. Montrez que l'espace tangent à O_D en A contient toutes les matrices $[H, A]$ avec H antisymétrique.
3. Soit $(A, B) \in O_D \times O_\Delta$ en lequel f atteint une de ses bornes. Montrez que pour toute matrice antisymétrique H

$$\mathrm{Tr}(H(AB - BA)) = 0$$

puis en déduire que $AB = BA$

4. Conclure.

★☆☆ Exercice 9 - Un exercice en carton (solution ☞)

Une entreprise a besoin de produire en masse des cartons en forme de parallélépipède rectangle sans face supérieure d'un volume de $a \in \mathbb{R}_+^*$ et souhaite minimiser la quantité de matière première. Quelles doivent être les dimensions de ces boîtes ?

Corrections

Solution 1 - Différentielle et multilinéarité (☛ exercice)

On écrit les développements limités

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x - x_0)\,||x - x_0|| \quad \text{et} \quad g(x) = g(x_0) + dg(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_2(x - x_0)\,||x - x_0||$$

Par bilinéarité, on obtient neuf termes dans l'expression de $B(f(x), g(x))$

- Le terme constant : $B(f(x_0), g(x_0))$
- Deux termes d'ordre 1 : $B(f(x_0), dg(x_0)(x - x_0)) + B(df(x_0)(x - x_0), g(x_0))$
- Cinq termes de la forme $B(\varepsilon_1(x - x_0), cste)\,||x - x_0||$ ou $B(cste, \varepsilon_2(x - x_0))\,||x - x_0||$
- Un dernier terme : $B(\varepsilon_1(x - x_0), \varepsilon_2(x - x_0))\,||x - x_0||^2$

On utilise ensuite le fait que E, F et G soient de dimension finie. L'application bilinéaire B est alors continue et vérifie l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad ||B(x, y)||_G \leq C\,||x||_E\,||y||_F$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} &||B(f(x), g(x)) - B(f(x_0), g(x_0)) - (B(f(x_0), dg(x_0)(x - x_0)) + B(df(x_0)(x - x_0), g(x_0)))|| \\ &\qquad \leq M\,(||\varepsilon_1(x - x_0)||_E\,||\varepsilon_2(x - x_0)||_F + ||\varepsilon_1(x - x_0)||_E + ||\varepsilon_2(x - x_0)||_F)\,||x - x_0|| \end{aligned}$$

où M est une constante ne dépendant que de x_0 et si x est assez proche de x_0. Le membre de droite est alors un $o(||x - x_0||)$. Ainsi,

$$d(B(f, g))(x_0)(x) = B(f(x_0), dg(x_0)(x)) + B(df(x_0)(x), g(x_0))$$

On comprend pourquoi on ne cherchera pas à démontrer le cas multilinéaire...

Solution 4 - Quelques calculs de primitives multivariées (☛ exercice)

1. Procédons par analyse-synthèse : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant ce système. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, posons $g_y : x \mapsto f(x, y)$. Alors g_y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$g_y'(x) = xy^2$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_y(x) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$$

où $C(y)$ est une constante ne dépendant que de y. Comme les fonctions f et $(x,y)\mapsto x^2y^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant maintenant par rapport à y, on obtient que

$$x^2y = x^2y + C'(y)$$

donc C est une fonction constante, à la valeur qu'on note $A\in\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+A$$

Synthèse : On vérifie que les fonctions de la forme obtenue précédemment sont bien solutions du système, et c'est le cas

2. Procédons par analyse-synthèse : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant ce système. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, posons $g_y : x\mapsto f(x,y)$. Alors g_y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$g_y'(x)=x^2y$$

donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g_y(x)=\frac{1}{3}x^3y+C(y)$$

où $C(y)$ est une constante ne dépendant que de y. Comme les fonctions f et $(x,y)\mapsto x^3y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant maintenant par rapport à y, on obtient que

$$xy^2=\frac{1}{3}x^3+C'(y)$$

ainsi, la fonction $x\mapsto xy^2-1/3x^3-C'(y)$ est constante égale à zéro, mais c'est une fonction polynômiale, donc $1/3=0$: c'est absurde. Ainsi, ce système n'a pas de solutions.

Solution 5 - Équation aux ondes (☛ exercice)

Procédons par analyse-synthèse. Soit f une telle fonction. Alors par le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x,y)-f(x,0)=\int_0^y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

or, pour tout $y\in\mathbb{R}$, l'application

$$x\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

est de dérivée nulle, donc est constante. Ainsi, le terme

$$\int_0^y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

ne dépend pas de x, on le note $\psi(y)$. On note aussi $\varphi(x) = f(x,0)$. Ce sont toutes les deux des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et on a bien

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

Réciproquement, pour la synthèse, de telles fonctions vérifient bien l'équation. Sachant ceci, et en utilisant l'indication de l'énoncé pour le changement de variable, on pose $F(u,v) = f(x,y)$ avec $u = x + ta$ et $y = x + tb$. Par fonction composées, on a donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + b^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{cases}$$

L'équation des ondes devient alors

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

On choisit alors $a = c$ et $b = -c$ pour tomber sur l'équation de la question préliminaire (pratique !)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

dont les solutions sont $F(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$ pour des fonctions φ, ψ de classe $\mathcal{C}^1$. Finalement, les solutions générales de l'équation aux ondes sont les fonctions de la forme

$$f(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

Solution 6 - Équation de transport (☞ exercice)

1. On effectue le changement de variable $u = x + \lambda y$ et $v = x + \mu y$, et on décidera des constantes à choisir ensuite pour que ça nous arrange. On pose alors $F(u,v) = f(x,y)$, et par dérivation des fonctions composée on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial F}{\partial u} + \mu\frac{\partial F}{\partial v}$$

Notre équation s'écrit alors

$$(a+b\lambda)\frac{\partial F}{\partial u}+(a+b\mu)\frac{\partial F}{\partial v}=0$$

On choisit maintenant $\lambda = a/b$ et $\mu = -a/b$. Le changement de variable qu'on fait est alors bien bijectif, et on a alors

$$2a\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

Donc l'application $u \mapsto F(u,v)$ est constante pour tout v, et donc F est de la forme $F(u,v) = \varphi(v)$ où v est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et donc $f(x,y) = \varphi(x - a/by)$

Réciproquement, si f est une telle fonction pour un φ de classe $\mathcal{C}^1$, alors on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(x-a/by) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{a}{b}\varphi'(x-a/by)$$

de sorte que f vérifie bien l'EDP.

2. On reprend exactement le même début que dans la question précédente jusqu'à la ligne

$$2a\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

qui devient

$$2a\frac{\partial F}{\partial u}=F$$

Cela signifie que pour tout v, l'application $u \mapsto F(u,v)$ est solution du problème de Cauchy

$$f' = \frac{1}{2a}f \quad \text{et} \quad f(0) = F(0,v)$$

et donc par unicité au problème de Cauchy, on a pour tout $u, v \in \mathbb{R}$

$$F(u,v) = \exp\left(\frac{u}{2a}\right)F(0,v)$$

Or, l'application F est bornée, donc $F(0,v) = 0$ pour tout v. Mais alors, on a $F(u,v) = 0$ pour tout u, v. Finalement f est la fonction nulle.

Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est solution de cette EDP.

Solution 7 - Fonctions convexes (☞ exercice)

1. Si f est convexe, alors pour tous $x, y \in U$ et $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$$

En particulier, pour tout $t > 0$, on a l'inégalité

$$\frac{f((1-t)x+ty)-f(x)}{t} \leq f(y)-f(x)$$

En faisant tendre t vers 0, par le théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient que

$$df(x)(y-x) \leq f(y)-f(x)$$

Réciproquement, si f vérifie l'égalité de l'énoncé en tous points $x, y \in U$, alors pour tout $t \in [0,1]$ et $z = (1-t)x+ty$, on a les inégalités

$$\begin{cases} df(z)(x-z) \leq f(x)-f(z) & (1) \\ df(z)(y-z) \leq f(y)-f(z) & (2) \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (1-t)(1)+t(2) &\Leftrightarrow df(z)((1-t)x+ty-z) \leq (1-t)f(x)+tf(y)-f(z) \\ &\Leftrightarrow df(z)(0) \leq (1-t)f(x)+tf(y)-f(z) \\ &\Leftrightarrow f(z) \leq (1-t)f(x)+tf(y) \end{aligned}$$

d'où la convexité de f

2. Si f admet un minimum global en $a \in U$, alors $df(a) = 0$ (c'est toujours vrai même si f n'est pas convexe). Réciproquement, si $df(a) = 0$, alors par la caractérisation des fonctions convexes précédente on obtient que

$$\forall y \in U, \quad 0 = df(a)(y-a) \leq f(y)-f(a)$$

donc a est bien un minimum global de f.

Si on ne suppose pas f convexe, ce résultat est faux. Les points $a \in U$ tels que $df(a) = 0$ sont les points critiques de f et peuvent être des minimums locaux, des maximums locaux, ou rien du tout (comme un point col ou un point selle). Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ admet pour point critique 0 mais ce n'est pas un extremum local.

3. Si f est convexe, alors par la première question on a pour tous $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que

$u + h \in U$

$$\forall t \in [0,1], \quad f(x+th) - f(x) - tdf(x)(h) \geq 0$$

or, par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, le membre de gauche est égal à

$$\frac{t^2}{2} d^2 f(x)(h,h) + o(t^2)$$

quand t tend vers zéro. En simplifiant par $t^2/2$ et en faisant tendre t vers zéro, on obtient que

$$d^2 f(x)(h,h) \geq 0$$

Réciproquement, si la hessienne de f est positive en tout point, alors la formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $x \in U$ et $x + h \in U$

$$f(x+h) - f(x) - df(x)(h) = \int_0^1 (1-t) d^2 f(x+th)(h,h) dt \geq 0$$

Par le critère de convexité de la question 1, f est convexe.

4. Ainsi, on en déduit la condition suffisante suivante : si f est de classe $\mathcal{C}^2$, de hessienne positive en tout point et telle qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.

   Ce résultat n'est ni plus fort, ni plus faible que celui du cours, qui dit que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, si $df(a) = 0$ et si $d^2 f(a)$ est une matrice symétrique définie positive, alors f admet un minimum local en a. (On suppose la hessienne définie positive et non pas juste positive, mais on le suppose qu'en un point et non pas partout, et on obtient un minimum local au lieu d'un minimum global)

Solution 8 - Inégalité de Ky Fan (☞ exercice)

1. Les classes de O_D et O_Δ sont les images de $O_n(\mathbb{R})$ par des applications continues, donc sont compactes. Leur produit l'est donc aussi, et f est donc une fonction continue sur un compact, donc elle est bornée et atteint ses bornes.

2. Soit $A = PD^tP \in O_D$. On pose γ un chemin dans $O_n(\mathbb{R})$ défini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de 0 tel que $\gamma(0) = P$. On pose ensuite $A(t) = P(t)D^tP(t)$. C'est un chemin dans O_D de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $A(0) = A$ et

$$A'(0) = P'(0)D^tP(0) + P(0)D^tP'(0) = HA + A^tH$$

où $H = P'(0)^t P(0)$. Il reste à voir que H est une matrice antisymétrique, ça provient du fait que l'application $t \mapsto P(t)^t P(t)$ est constante (dériver la relation)

Réciproquement, si H est une matrice antisymétrique, on choisit un chemin $P(t)$ dans $O_n(\mathbb{R})$ tel que $P(0) = P$ et $P'(0) = HP$ (par exemple, $P(t) = P + tHP$).

3. Soit H une matrice antisymétrique. Alors $[H, A] \in T_A O_D$ et $[H, B] \in T_B O_\Delta$, donc $(-[H, A], [H, B]) \in T_{(A,B)}(O_D \times O_\Delta)$. Si (A, B) est un extremum de f, c'est un point critique, donc on a

$$df(A, B)(-[H, A], [H, B]) = 0$$

Calculons la différentielle de f :

$$df(A, B)(H, K) = \mathrm{Tr}(AK - HB)$$

et ainsi, on a

$$\begin{aligned} 0 &= df(A, B)(-[H, A], [H, B]) \\ &= \mathrm{Tr}(A[H, B] - [H, A]B) \\ &= \mathrm{Tr}(AHB - ABH - HAB + AHB) \\ &= 2\mathrm{Tr}(AHB - HAB) \\ &= 2\mathrm{Tr}(HBA - HAB) \\ &= -2\mathrm{Tr}(H(AB - BA)) \end{aligned}$$

En particulier, la matrice $AB - BA$ est orthogonale à l'espace des matrices antisymétrique. Sauf que ${}^t(AB - BA) = -BA + AB = -(AB - BA)$ est une matrice antisymétrique. Elle est donc nulle. Donc $AB = BA$

4. Comme A et B commutent, alors ils ont les mêmes espaces propres. En particulier, l'ensemble des valeurs propres de AB appartient à l'ensemble d'ensembles :

$$\left\{ \{\lambda_i \mu_{\sigma(i)} \ ; \ 1 \leq i \leq n\} \ ; \ \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\}$$

et donc on a

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{\sigma(i)} \right) \leq \mathrm{Tr}(AB) \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{\sigma(i)} \right)$$

Il reste donc à voir que les min et max sont bien ceux qu'on veut. Pour cela, on remarque que si $i < j$ et $k < l$, alors

$$\lambda_i \mu_k + \lambda_j \mu_l \geq \lambda_i \mu_l + \lambda_j \mu_k$$

En effet, on a

$$\lambda_i\mu_k + \lambda_j\mu_l - \lambda_i\mu_l - \lambda_j\mu_k = \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\leq 0}\underbrace{(\mu_k - \mu_l)}_{0} \geq 0$$

donc le maximum est atteint pour $\sigma = \text{id}$. De même, le minimum est atteint pour $\sigma(i) = n+1-i$. D'où l'inégalité de Ky Fan

---

Solution 9 - Un exercice en carton (☞ exercice)

On note x, y, z les dimensions d'une telle boîte. Ces quantités sont strictement positives et sont liées par la relation $xyz = a$, donc $z = a/(xy)$. On cherche a minimiser l'aire du carton :

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = xy + \frac{2a}{x} + \frac{2a}{y} = g(x,y)$$

(pour rappel, il n'y a pas de face supérieure). Cherchons d'abord les points critiques, et donc calculons les dérivées partielles de g :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{2a}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{2a}{y^2}$$

Ainsi, g n'admet qu'un unique point critique qui est (α, α) où $\alpha = \sqrt[3]{2a}$ (car solution du système $y = 2ay^4$ et $x = 2ax^4$). Il reste à montrer que c'est un minimum global. On note $g(\alpha,\alpha) = A > 0$, donc il faut montrer que $g(x,y) \geq A$. Tout d'abord, on remarque que si x ou y sont strictement inférieurs à $2a/A$, alors $g(x,y) > A$. De plus, si x et y sont supérieurs à $2a/A$ et que x ou y est strictement supérieur à $A^2/(2a)$, alors $xy > A$ donc $g(x,y) > g(\alpha,\alpha)$. Finalement, on a

$$\inf\{g\ ;\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\} = \inf\{g\ ;\ (x,y) \in [2a/A, A^2/(2a)]^2\}$$

Mais sur le compact $[\frac{2a}{A}, \frac{A^2}{2a}]^2$, g est continue donc elle est bornée et atteint ses bornes, donc atteint cet inf qui est alors un minimum global de g. Comme g n'a qu'un seul point critique, ce minimum global est (α, α). Finalement, les dimensions à choisir sont

$$x = \sqrt[3]{2a} \quad y = \sqrt[3]{2a} \quad z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}$$
