Le module de permutation M^λ

Jad Abou Yassin, Jérôme Milot
Encadrant : Salim Rostam

ENS Rennes

Novembre 2020

Introduction

Le but est de présenter le module M^λ. Celui-ci sert pour trouver les représentations irréductibles du groupes des permutations S_n, également appelées modules de Spetch.

<u>Référence :</u>

B. E. SAGAN, *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions* (second edition). Graduate Texts in Mathematics, Springer (2001)

Sommaire

Partitions d'un entier

Definition (Partition)

Soit $n \in \mathbb{N}$, une partition de n est un l-uplet $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{N}^{*l}$ ordonné par ordre décroissant tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$.
On note alors $\lambda \vdash n$.

On représente une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ par un tableau de l lignes où la i-ème ligne (en partant du bas) possède λ_i éléments. On appelle cette représentation un *diagramme de Ferrers*. Par exemple, $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ qui est une partition de 9 est représenté par :

$$\begin{array}{lll} \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Si $\mu \in \mathbb{N}^l$, on note $\mu! = \mu_1! \dots \mu_l!$ et $|\mu| = \mu_1 + \cdots + \mu_l$.

Sous-groupes de Young

Definition (Sous-groupe de Young)

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$. Alors le sous-groupe de Young de S_n correspondant à λ est :

$$\begin{aligned} S_\lambda &= S_{[\![1,\lambda_1]\!]} \times S_{[\![\lambda_1+1,\lambda_1+\lambda_2]\!]} \times \cdots \times S_{[\![\lambda_1+\cdots+\lambda_{l-1}+1,n]\!]} \\ &\simeq S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_l} \end{aligned}$$

Par exemple, si $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ est une partition de 9, le sous-groupe de Young de S_9 associé à λ est :

$$S_{(3,3,2,1)} = S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5,6\}} \times S_{\{7,8\}} \times S_{\{9\}} \approx S_3 \times S_3 \times S_2 \times S_1$$

Définition de V^λ

Definition

Soit $(\pi_1, \ldots, \pi_l)$ une transversale pour le sous-groupe de Young S_λ. On définit

$$V^\lambda := \mathbb{C}[\pi_1 S_\lambda, \ldots, \pi_l S_\lambda]$$

Remarque

Certains verront dans un prochain groupe de lecture que V^λ est le module de la représentation induite $1 \uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$, ce qui en fait un module intuitif de S_n. Il se trouve que la notion de représentation induite est très utilisée pour construire des représentations en général.

Tableaux de Young

Definition (Tableau de Young)

Soit $\lambda \vdash n$. Un tableau de Young de forme λ, ou un λ-tableau, est un tableau t^λ obtenu en remplaçant les points dans le diagramme de Ferrers par les nombres $\{1, \ldots, n\}$ de manière bijective.

Remarque

Il y a donc $n!$ λ-tableaux différents pour un $\lambda \vdash n$ fixé.

Par exemple, si $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ est une partition de 9, le tableau suivant est un λ-tableau :

$$\begin{array}{ccc} 3 & & \\ 1 & 4 & \\ 5 & 9 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{array}$$

Tabloïdes

Definition (Tabloïde)

On dit que deux λ-tableaux t_1 et t_2 sont équivalents en ligne, et on note $t_1 \sim t_2$, lorsque pour tout $1 \leq i \leq l$, la i-ème ligne de t_1 contient les mêmes éléments que la i-ème ligne de t_2.
La relation binaire $\sim$ est alors une relation d'équivalence, et on appelle un tabloïde de forme λ, ou un λ-tabloïde, une classe d'équivalence de $\sim$.

On représente un λ-tabloïde comme un λ-tableau, mais avec des lignes horizontales entre chaque ligne. L'ordre des éléments dans chaque ligne n'a donc plus d'importance.
Par exemple, si $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ est une partition de 9, le tableau suivant est un λ-tabloïde :

$$\begin{array}{ccc} \hline 3 & & \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline 5 & 9 & 2 \\ \hline 6 & 8 & 7 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ccc} \hline 3 & & \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline 5 & 2 & 9 \\ \hline 7 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Action de S_n sur les λ-tabloïdes

S_n agit naturellement sur les λ-tableaux par l'action suivante : Si $t = (t_{i,j})$ est un λ-tableau et $\sigma \in S_n$, alors $\sigma t = (\sigma(t_{i,j}))$. Par exemple, si $n = 3$, on a :

$$(1\,2\,3)\ \begin{array}{ll} 3 & \\ 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{ll} 1 & \\ 2 & 3 \end{array}$$

On a donc une action induite sur l'ensemble des λ-tabloïdes définie par : $\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$. Cette action est bien définie (ne dépend pas du représentant choisi) car

$$t \sim t_1 \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_\lambda,\, t = \sigma t_1 \tag{$*$}$$

Sur l'ensemble des λ-tabloïdes, on a la loi de composition induite de celle sur les λ-tableaux (ie celle de S_n) : $\{t_1\} \circ \{t_2\} = \{t_1 \circ t_2\}$. C'est bien défini par $(*)$:

$$\{t \circ t_2\} = \{\sigma t_1 \circ t_2\} = \sigma\{t_1 \circ t_2\} = \{t_1 \circ t_2\}$$

G-module

Definition (G-module)

Un G-module est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V tel qu'il existe $\rho : G \mapsto GL(V)$ un morphisme de groupes. De manière équivalente, V est un G-module si G agit linéairement sur V. On appelle alors ρ une représentation de G.

Si $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ est un ensemble fini, étant donné une action $G \curvearrowright S$, on peut construire un G-module en faisant agir linéairement G sur

$$\mathbb{C}[S] = \{c_1 s_1 + \cdots + c_n s_n \,|\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}\}$$

L'action de G sur $\mathbb{C}[S]$ étend celle de G sur S et s'obtient par linéarité.

G-module

Definition (Représentation de permutation)

- Le G-module $\mathbb{C}[S]$ s'appelle la représentation de permutation associée à S.
- On appelle S la base standard de $\mathbb{C}[S]$
- La dimension de $\mathbb{C}[S]$ est le cardinal de la base standard.

Definition (Morphisme de G-module)

Soient V et W deux G-modules. On appelle un morphisme de G-modules de V sur W toute application linéaire $\theta : V \to W$ telle que :

$$\forall g \in G, \forall v \in V, \quad \theta(gv) = g\theta(v)$$

Definition (Module cyclique)

Un G-module M est dit cyclique s'il existe $v \in M$ tel que $M = \mathbb{C}[Gv]$ où $Gv := \{gv | g \in G\}$. On dit également que M est engendré par v.

Définition de M^λ

Definition

Soit $\lambda \vdash n$. On définit le module de permutation correspondant à λ :

$$M^\lambda := \mathbb{C}[\{t_1\}, ..., \{t_k\}]$$

où $\{t_1\}, ..., \{t_k\}$ sont exactement tous les λ-tabloïdes.

Remarque

Puisqu'on considère uniquement les classes d'équivalence par rapport à la ligne, on peut changer leur ordre pour obtenir un autre module isomorphe à M^λ. Ainsi, on peut définir M^μ pour tout μ telle que $|\mu| = n$ même si ce n'est pas une partition (pas ordonnée par ordre décroissant).

Remarque

Il y a $\frac{n!}{\lambda!}$ λ-tabloïdes.

Definition (Caractère)

Soit $X : G \to GL_n(\mathbb{C})$ une représentation. On définit son caractère χ :

$$\chi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & Tr(X(g)) \end{array}$$

On appelle n le degré du caractère χ.

Représentations de S_n

Definition (Représentation triviale)

Une représentation triviale est une représentation de degré 1, i.e une représentation de $G \to \mathbb{C}$

Definition (Représentation naturelle)

La représentation naturelle de S_n, de degré n, est caractérisée par le fait que :

$$\forall \sigma \in S_n, \chi^{def}(\sigma) = \text{le nombre de points fixes de } \sigma.$$

Definition (Représentation régulière)

La représentation régulière est caractérisée par : $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Quelques exemples

- Si $\lambda = (n)$, on a $M^{(n)} = \mathbb{C}\left[\,\boxed{1 \quad 2 \quad \dots \quad n}\,\right]$
  On constate qu'il s'agit bien de la représentation triviale, puisque
  $\mathbb{C}\left[\,\boxed{1 \quad 2 \quad \dots \quad n}\,\right]$ est de dimension 1 ($=$ card $\left(\,\boxed{1 \quad 2 \quad \dots \quad n}\,\right)$)
  Donc pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\chi^{(1^n)}(\sigma) = Tr(1(\sigma)) = 1$.

Quelques exemples

- Si $\lambda = (1^n)$, chaque ligne de chaque tableau n'est composée que d'un seul élément. On a donc une bijection entre l'ensemble des λ-tabloïdes et S_n, d'où : $M^{(1^n)} \simeq \mathbb{C}\left[S_n\right]$ par :

$$\begin{array}{rccc} \theta : & M^{(1^n)} & \rightarrow & \mathbb{C}[S_n] \\ & \{t\} & \mapsto & t \end{array}$$

On a alors l'action : $X : S_n \rightarrow GL(\mathbb{C}[S_n]) \simeq GL_{n!}(\mathbb{C})$ définie par :

$$X(\sigma) = (\delta_{\sigma t_i, t_j})_{(i,j) \in [\![1, n!]\!]}$$

Ce sont des matrices de permutation. On obtient alors la représentation régulière, car, si $\sigma \neq id$

$$\chi^{(n)}(\sigma) = Tr(X(\sigma)) = 0$$

En effet, s'il existait $i \in [\![1, n!]\!]$ tel que $\sigma t_i = t_i$, alors $\sigma = id$.

Quelques exemples

- Si $\lambda = (n-1,1)$, chaque tabloïde est entièrement défini par la valeur de sa deuxième ligne ($S_\lambda = S_{n-1} \times S_{\{n\}}$) qui ne contient qu'un seul élément. On a donc une bijection entre l'ensemble des tabloïdes et $\{1, ..., n\}$, d'où $M^{(n-1,1)} \simeq \mathbb{C}\,[1, 2, \ldots, n]$ par :

$$\theta : \begin{array}{ccc} M^{(n-1,1)} & \to & \mathbb{C}[1, \ldots, n] \\ \begin{array}{|llllll|} \hline k & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & (k-1) & (k+1) & \ldots & n \\ \hline \end{array} & \mapsto & k \end{array}$$

On a alors l'action : $X : S_n \to GL(\mathbb{C}[1, \ldots, n]) \simeq GL_n(\mathbb{C})$ définie par : si $\sigma \in S_n$, alors $X(\sigma)$ est la matrice de permutation associée à σ.
On obtient alors la représentation naturelle, car $\chi^{(n-1,1)}(\sigma) = Tr(X(\sigma))$ est bien le nombre de points fixes de σ.

Quelques exemples

On note K_μ la classe d'équivalence de la partition μ dans S_n. Ainsi, on constate que :

- $K_{(1^n)}$ représente la classe d'équivalence des permutations n'ayant que des points fixes (donc que l'identité)
- $K_{(n-1,1)}$ représente la classe d'équivalence des permutations ayant exactement 1 seul point fixe
- $K_{(n)}$ représente la classe d'équivalence des permutations n'ayant aucun point fixe (les dérangements)

	$K_{(1^n)}$	$K_{(n-1,1)}$	$K_{(n)}$
$\chi^{(n)}$	1	1	1
$\chi^{(n-1,1)}$	n	1	0
$\chi^{(1^n)}$	$n!$	0	0

Cyclicité de M^λ

Proposition

Si $\lambda \vdash n$, alors M^λ est cyclique et engendré par n'importe quel λ-tabloïde. C'est-à-dire que, pour tout λ-tabloïde t^λ, on a $M^\lambda = \mathbb{C}[S_n\{t^\lambda\}]$.
De plus, on a $\dim M = \frac{n!}{\lambda!}$.

Preuve :
L'action de S_n sur l'ensemble des tableaux est transitive, elle l'est à fortiori sur l'ensemble des tabloïdes. Donc $S_n\{t\}$ correspond à l'ensemble des tabloïdes (et ce pour n'importe quel tabloïde $\{t\}$) d'où M^λ généré par n'importe lequel d'entre eux.
Finalement, on a vu qu'il y avait exactement $\frac{n!}{\lambda!}$ λ-tabloïdes, donc dim$M = \frac{n!}{\lambda!}$.

Lien entre les deux modules

Théorème

V^λ et M^λ sont isomorphes en tant que S_n-modules.

Preuve

On rappelle la définition du sous-groupe de Young :

$$S_\lambda = S_{[\![1,\lambda_1]\!]} \times S_{[\![\lambda_1+1,\lambda_1+\lambda_2]\!]} \times \cdots \times S_{[\![\lambda_1+\cdots+\lambda_{l-1}+1,n]\!]}$$

Représentons le λ-tabloïde canonique :

$$\{t^\lambda\} = \begin{array}{cccc}
\hline
1 & 2 & \ldots & \lambda_1 \\
\hline
\lambda_1+1 & \lambda_1+2 & \ldots & \lambda_1+\lambda_2 \\
\hline
 & \vdots & & \\
\hline
\lambda_1+\cdots+\lambda_{l-1}+1 & \lambda_1+\cdots+\lambda_{l-1}+2 & \ldots & n \\
\hline
\end{array}$$

On peut assimiler notre sous-groupe de Young au tabloïde canonique $\{t^\lambda\}$.

Lien entre les deux modules

Ainsi, si $\pi \in S_n$, on assimile la classe à gauche πS_λ avec $\pi\{t^\lambda\} = \{\pi t^\lambda\}$. Plus formellement, soit $(\pi_1, \ldots, \pi_l)$ une transversale, on rappelle que $V^\lambda = \mathbb{C}[\pi_1 S_\lambda, \ldots, \pi_l S_\lambda]$ et que M^λ est cyclique engendré par n'importe quel λ-tabloïde, donc en particulier engendré par $\{t^\lambda\}$. On a donc $M^\lambda = \mathbb{C}[\pi_1\{t^\lambda\}, \ldots, \pi_l\{t^\lambda\}]$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \theta : & V^\lambda & \to & M^\lambda \\ & \pi_i S_\lambda & \mapsto & \{\pi_i t^\lambda\} \end{array}$$

Cette application est bien un morphisme de S_n-modules. De plus, elle est injective : si x, y sont deux éléments distincts de V^λ, ils ont une écriture différente dans la base standard de V^λ. Ainsi, leur image par θ ont une écriture différente dans la base standard de M^λ, d'où l'injectivité.
La surjectivité provient également de l'envoi de la base standard sur l'autre.