

Groupes de tresses d'Artin-Tits

Rapport de stage de deuxième année
ENS Rennes

ABOU YASSIN Jad

Encadrant : Thomas GOBET

Laboratoire de Mathématiques et de Physique Théorique, Institut Denis Poisson,
Tours

Mai-Juin 2021

Résumé

La notion de tresse a formellement été introduite par ARTIN dans les années 1920 dans le cadre de la théorie des nœuds. Depuis, il s'agit d'un sujet de recherche à part entière dont l'étude est très riche. Nous allons étudier qu'une facette de la théorie des groupes de tresses, en commençant par la définition originale d'Artin pour laquelle nous verrons différentes façons de réaliser ce groupe, chacune apportant un point de vue et des outils différents nous permettant de très bien le comprendre. Ensuite, nous généraliserons les groupes de tresses grâce à d'autres structures, les groupes de Coxeter et les groupes de Garside. Nous verrons que dans une sous-famille particulière de ces groupes de tresses généralisés, qu'on appelle les groupes de tresses d'Artin-Tits, une grande partie des résultats obtenus sur le groupe de tresses original d'Artin est toujours vraie. À ce jour, il reste encore beaucoup de questions ouvertes sur les groupes de tresses d'Artin-Tits dans le cas général, nous en discuterons également.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Groupe de tresses d'Artin | 1 |
| 1.1 | Définition géométrique | 1 |
| 1.1.1 | Tresses géométriques | 1 |
| 1.1.2 | Diagramme de tresses | 2 |
| 1.2 | Définition algébrique | 4 |
| 1.3 | Centre, torsion, problème du mot, | 5 |
| 1.4 | Autres réalisations de B_n | 6 |
| 1.4.1 | En tant que groupe fondamental d'un espace de configuration | 6 |
| 1.4.2 | En tant que groupe d'automorphismes du groupe libre | 6 |
| 2 | Groupes de Coxeter | 7 |
| 2.1 | Systèmes de Coxeter | 8 |
| 2.2 | Caractérisation des groupes de Coxeter | 9 |
| 2.3 | Groupes de Coxeter finis | 10 |
| 3 | Théorie de Garside | 11 |
| 3.1 | Monoïdes atomiques | 11 |
| 3.1.1 | Le problème du mot | 12 |
| 3.1.2 | Monoïdes pré-Garside | 13 |
| 3.1.3 | Groupe des fractions d'un monoïde pré-Garside | 14 |
| 3.2 | Monoïdes de Garside | 15 |
| 3.2.1 | Définition | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Groupes et monoïdes de tresses d'Artin-Tits | 16 |
| 4.1 | Définition | 16 |
| 4.2 | Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits | 18 |
| 4.2.1 | Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits de type A_n | 19 |
| 4.2.2 | Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits de type $I_2(m)$ | 20 |
| 5 | Étude d'un groupe de tresses non sphérique : $B(\widetilde{A}_n)$ | 22 |
| 6 | Annexes | i |
| 6.1 | Définition d'un monoïde de Garside | i |
| 6.2 | Méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier | i |
| 6.2.1 | Méthode de réécriture | i |
| 6.2.2 | Détermination d'une «bonne» partie génératrice de H | ii |
| 6.2.3 | Méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier | ii |
| 6.2.4 | Comment l'appliquer en pratique? | iii |

1 Groupe de tresses d'Artin

Dans cette partie, nous allons introduire le groupe de tresses d'Artin en commençant par leur définition géométrique. Cette partie suit principalement le premier chapitre de [7], qui contient en particulier les démonstrations que j'ai omises.

1.1 Définition géométrique

1.1.1 Tresses géométriques

On note $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ et on appelle intervalle topologique tout espace topologique homéomorphe à I .

Définition 1 (Tresses géométriques). *Une tresse géométrique à n brins est un sous-ensemble b de $\mathbb{R}^2 \times I$ formé de n intervalles topologiques disjoints tels que :*

1. *La restriction de la projection $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ à chaque brin est un homéomorphisme*
2. $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$
3. $b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$

Moins formellement, il s'agit de n cordes disjointes dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times I$, partant des points $\{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$ (condition 2), qui montent strictement (condition 1) et arrivant sur les points $\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$ (condition 3).

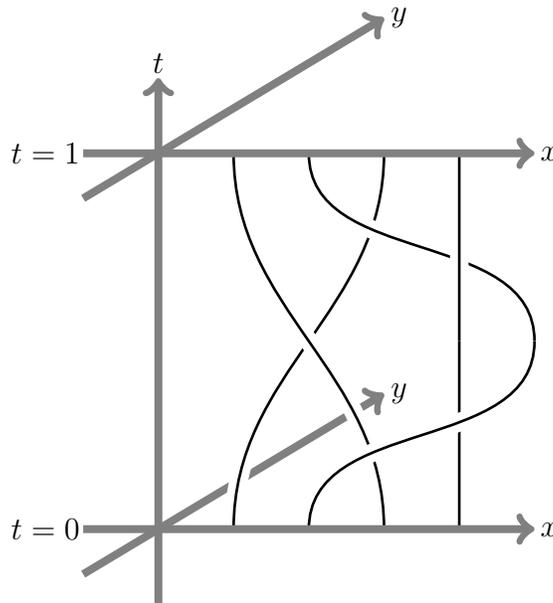


FIGURE 1 – Une tresse géométrique à 4 brins

On dit que deux tresses géométriques à n brins b et b' sont isotopes lorsqu'il existe une application continue $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ telle que $F(\cdot, 0) = \text{id}_b$, $F(\cdot, 1)(b) = b'$ et pour tout $s \in I$,

l'image de $F(\cdot, s)$ soit une tresse géométrique. On appelle alors isotopie de b vers b' l'application F (ou parfois l'ensemble des tresses géométriques $\{F_s(b)\}_{s \in I}$). Il est clair que la relation d'isotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tresses géométriques. On appelle alors tresses à n brins les classes d'équivalences pour la relation d'isotopie, et on note \mathcal{B}_n l'ensemble des tresses à n brins. Géométriquement, deux tresses sont isotopes si on peut déformer de manière continue l'une en l'autre de sorte à toujours avoir une tresse à chaque instant.

Étant données deux tresses géométriques b_1 et b_2 , on peut également définir la tresse concaténée $b_1 b_2$ comme étant la tresse géométrique $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x, y, t/2) \in b_1 \text{ ou } (x, y, (t-1)/2) \in b_2\}$. Il s'agit de la tresse géométrique obtenue en aplatisant verticalement les tresses b_1 et b_2 et en les collant bout à bout. Si b_1 est isotope à b'_1 et b_2 est isotope à b'_2 , alors $b_1 b_2$ est isotope à $b'_1 b'_2$ (il suffit d'appliquer les isotopies «une par une à double vitesse»). Ainsi, on dispose de la concaténation sur l'ensemble des tresses à n brins.

Enfin, on définit l'inverse d'une tresse β comme étant la tresse $\beta^{-1} = \{(x, y, 1-t) \mid (x, y, t) \in \beta\}$.

1.1.2 Diagramme de tresses

Afin de représenter les tresses à n brins, il est plus simple de se placer dans $\mathbb{R} \times I$ que dans $\mathbb{R}^2 \times I$. On utilise alors les diagrammes de tresses.

Définition 2 (Diagramme de tresses). *Un diagramme de tresses à n brins est un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$ composé de n intervalles topologiques (non nécessairement disjoints) tels que :*

1. *La restriction de la projection $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ à chaque brin est un homéomorphisme*
2. $\mathcal{D} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$
3. $\mathcal{D} \cap (\mathbb{R} \times \{1\}) = \{(1, 1), (2, 1), \dots, (n, 1)\}$
4. *Tout point de $\mathbb{R} \times I$ appartient à au plus deux brins, et si un point de $\mathbb{R} \times I$ appartient à deux brins, alors ces derniers se coupent transversalement, et l'un deux est marqué par une coupure au point d'intersection.*

Il s'agit en fait d'une tresse à n brins qu'on aurait projetée sur $\mathbb{R} \times I$, et qu'on aurait déformée (via une isotopie) pour qu'il n'y ait aucun croisement de trois brins ou plus. Le brin marqué par une coupure au point d'intersection représente alors le brin qui passait derrière l'autre brin dans la direction de projection. Cette représentation est très intuitive, nous l'avons en fait même déjà utilisée pour représenter la tresse géométrique de la figure 1.

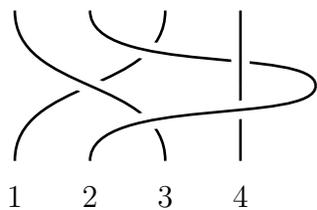


FIGURE 2 – Diagramme de tresses correspondant à la tresse géométrique de la figure 1

Proposition 1. *Muni de la loi de concaténation, \mathcal{B}_n est un groupe.*

Ce résultat s'obtient en considérant les tresses élémentaires σ_i^+ et σ_i^- suivantes :

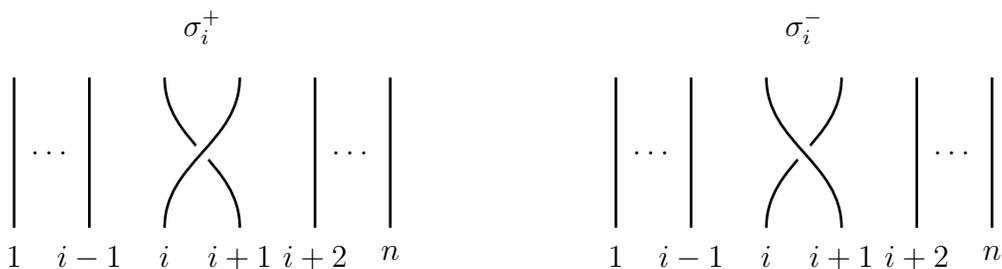


FIGURE 3 – Tresses élémentaires σ_i^+ et σ_i^-

Il est clair que $(\sigma_i^+)^{-1} = \sigma_i^-$. Il suffit donc de montrer que \mathcal{B}_n est engendré, en tant que monoïde, par les éléments $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+, \sigma_1^-, \dots, \sigma_{n-1}^-$. Pour ce faire, on considère une tresse $\sigma \in \mathcal{B}_n$ et un diagramme de tresses de σ . Ce dernier contient un nombre fini de croisements (car chaque brin est compact dans $\mathbb{R}^2 \times I$). En déformant ce diagramme de sorte à ne pas avoir deux croisements ayant la même ordonnée, on obtient directement que σ s'écrit comme produit des générateurs voulus en lisant les croisements de bas en haut et en composant les générateurs de droite à gauche « comme des fonctions ». Par exemple, la tresse à 4 brins de la figure 2 est la tresse $\sigma_2^- \sigma_3^+ \sigma_1^- \sigma_3^+ \sigma_2^+$.

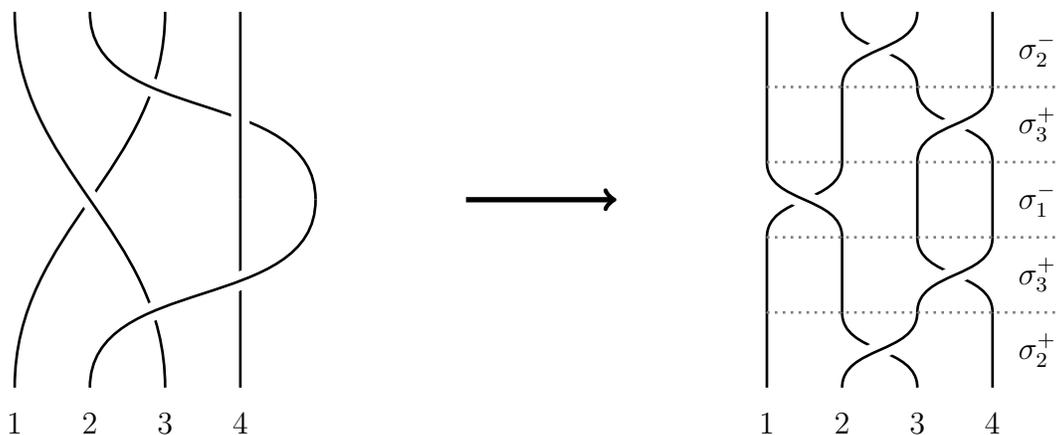


FIGURE 4 – Déformation de la tresse de la figure 2 afin de voir apparaître les générateurs de \mathcal{B}_n

1.2 Définition algébrique

Afin de pouvoir étudier le groupe de tresses avec des outils algébriques, nous allons en donner une définition purement algébrique. Il s'agit de la définition originale d'Artin.

Définition 3 (Groupe de tresses d'Artin). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe de tresse d'Artin à n brins, noté B_n , est le groupe défini par la présentation*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n - 2 \end{array} \right. \right\rangle$$

Les relations de cette présentation sont appelées relations de tresses.

Via cette définition, on obtient un morphisme surjectif $\pi_n : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, soit s_1, \dots, s_{n-1} les transpositions élémentaires de \mathfrak{S}_n , qui sont respectivement les transpositions $(1 \ 2), \dots, (n-1 \ n)$. Il existe donc un unique morphisme de groupes $\widetilde{\pi}_n$ du groupe libre F de générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ vers \mathfrak{S}_n tel que $\widetilde{\pi}_n(\sigma_i) = s_i$ si $1 \leq i \leq n - 1$. Or, les transpositions élémentaires vérifient les relations de tresses. Ainsi, $\ker(\widetilde{\pi}_n)$ contient le sous-groupe de F engendré par les relations de tresses. En passant au quotient, on obtient bien un morphisme surjectif de B_n vers \mathfrak{S}_n .

Remarque 1. *Ceci montre que si $n \geq 3$, alors B_n n'est pas abélien. On a de plus $B_1 = \{1\}$ (aucun générateur, aucune relation) et $B_2 \simeq \mathbb{Z}$ (un seul générateur, aucune relation).*

Définition 4. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in B_n$, on appelle la permutation induite de σ la permutation $\pi_n(\sigma)$*

Géométriquement, la permutation induite d'une tresse est la permutation qu'elle effectue sur les points de départ. Par exemple, la permutation induite de la tresse représentée en figure 2 est la transposition $(1 \ 3)$.

Bien évidemment, le groupe de tresses d'Artin et le groupe de tresses géométrique sont isomorphes :

Théorème 1. *Si $\varepsilon \in \{+, -\}$, il existe un unique morphisme de groupes $\varphi_\varepsilon : \sigma_i \in B_n \mapsto \sigma_i^\varepsilon \in \mathcal{B}_n$ et c'est un isomorphisme de groupes.*

L'existence, l'unicité et la surjectivité de ces morphismes sont assez claires, les σ_i^ε , à ε fixé, vérifient les relations de tresses donc on dispose bien d'un unique morphisme, et ce dernier est surjectif car on a vu que les σ_i^ε engendrent \mathcal{B}_n . L'injectivité est plus difficile à démontrer et repose sur des outils que nous n'avons pas introduits. Une preuve complète de ce résultat est faite dans [7], partie 1.2. Par convention, on identifiera \mathcal{B}_n et B_n via φ_+ .

Un exemple d'application de ce théorème est le fait qu'on dispose d'un morphisme injectif $\iota_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ tel que $\iota_n(\sigma_i) = \sigma_i$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$. L'injectivité de ce morphisme de

groupes n'est pas triviale à démontrer algébriquement, mais elle l'est géométriquement¹ : il s'agit simplement de l'ajout d'un brin, indépendant des autres. L'injectivité découle directement du fait qu'une isotopie entre deux tresses géométriques $\iota_n(\beta_1)$ et $\iota_n(\beta_2)$ à $n+1$ brins induit une isotopie entre β_1 et β_2 en se restreignant aux n premiers brins.

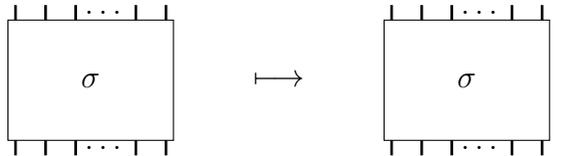


FIGURE 5 – Injection $\iota_n : B_n \hookrightarrow B_{n+1}$

Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement ι et π au lieu de ι_n et π_n .

1.3 Centre, torsion, problème du mot, ...

Plusieurs questions naturelles se posent lors de l'étude d'un groupe défini par une présentation : est-il trivial ? Quel est son centre ? Y a-t-il une solution au problème du mot ? Est-il sans torsion ? ... De manière générale, il est extrêmement difficile de répondre à ces questions. Dans le cas du groupe de tresses d'Artin, nous disposons d'un grand nombre d'outils afin de mieux comprendre ce groupe et il est possible de répondre à toutes ces questions. Cependant, nous allons seulement citer ces résultats pour l'instant, nous en donnerons des démonstrations plus tard lors de l'étude des groupes de tresses généralisés. Des démonstrations de ces résultats dans le cas spécifique de B_n sont faites dans le premier chapitre de [7].

Non trivialité du groupe de tresses Si $n \geq 2$, B_n n'est pas le groupe trivial (fort heureusement !). En effet, $B_2 \simeq \mathbb{Z}$ et on a les injections $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$. Ainsi, si $n \geq 2$, B_n est un groupe infini.

Centre de B_n ? Si $n \geq 2$, le centre de B_n est un groupe monogène d'ordre infini engendré par la tresse Δ_n^2 où

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n$$

Torsion de B_n ? Le groupe de tresses d'Artin est sans torsion, c'est-à-dire que tout élément non trivial est d'ordre infini dans B_n . Ceci peut se démontrer via la description de B_n en tant que groupe fondamental d'un certain espace topologique et avec des outils plus avancés de topologie algébrique. Nous en discuterons brièvement plus tard.

1. On touche ici un point important : pouvoir réaliser B_n de différentes manières nous donnera accès à de nombreux résultats difficilement accessibles avec la simple définition par présentation de groupes

Problème du mot On dit qu'un groupe défini par présentation admet une solution au problème du mot lorsqu'il existe un algorithme qui, étant donné un mot sur l'alphabet des générateurs, permet de déterminer en temps fini si ce dernier est l'élément neutre. Le problème du mot pour une présentation de groupe, même finie, est un problème indécidable en général. Nous verrons que la description du groupe de tresses d'Artin comme groupe d'automorphisme du groupe libre à n éléments en donne une solution simple. Nous verrons une autre solution au problème du mot dans un cadre plus général lors de l'étude des groupes de Garside. En fait, il existe à ce jour plus d'une dizaine de solutions différentes au problème du mot dans B_n , et ceci est dû au fait que nous avons beaucoup de façons de voir et de comprendre ce groupe.

Bien évidemment, on sait bien plus de choses sur le groupe de tresses d'Artin. Ce qui nous intéresse dans ce rapport sont les questions qui ne sont pas encore résolues dans le cadre général que nous traiterons. Une liste (non exhaustive) de telles questions encore ouvertes dans le cas général mais connues pour le groupe d'Artin se trouve ici [5].

1.4 Autres réalisations de B_n

1.4.1 En tant que groupe fondamental d'un espace de configuration

Le groupe de tresses B_n peut également être vu comme un groupe fondamental d'un certain espace topologique. Ce détour par la topologie algébrique permet de fournir de nombreux résultats sur B_n . Si M est un espace topologique, on appelle l'ensemble $\mathcal{F}_n(M) = \{(u_1, \dots, u_n) \in M^n \mid u_i \neq u_j \text{ si } i \neq j\}$ l'espace de configuration de n -uplets ordonnés de M .

On peut démontrer que, si $M = \mathbb{R}^2$, alors le groupe fondamental de $\mathcal{F}_n(M)$ est un sous-groupe de B_n , noté P_n et appelé le sous-groupe des tresses pures. Il s'agit du noyau du morphisme $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ et c'est un sous-groupe qui joue un rôle très important dans l'étude de B_n .

On obtient alors B_n comme étant le groupe fondamental de l'espace $\mathcal{C}_n(\mathbb{R}^2) = \mathcal{F}_n/\mathfrak{S}_n$, qu'on appelle *espace de configuration de n -uplets non ordonnés de \mathbb{R}^2* .

Remarque 2. *On peut d'ores et déjà voir comment une généralisation du groupe de tresses peut s'obtenir. Il est vrai qu'il est possible de les généraliser en prenant d'autres espaces que \mathbb{R}^2 mais nous n'aborderons pas les choses sous cet angle dans ce travail.*

1.4.2 En tant que groupe d'automorphismes du groupe libre

On va maintenant voir B_n comme un groupe d'automorphismes sur le groupe libre à n générateurs.

Définition 5. *On dit qu'un automorphisme φ du groupe libre F_n de générateurs x_1, \dots, x_n est un automorphisme de tresses lorsqu'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

- (i) Il existe une permutation $\mu \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $\varphi(x_k)$ soit conjugué à $x_{\mu(k)}$ dans F_n
- (ii) $\varphi(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

Par exemple, les automorphismes suivants sont des automorphismes de tresses

$$\tilde{\sigma}_i(x_k) = \begin{cases} x_{k+1} & \text{Si } k = i \\ x_k^{-1} x_{k-1} x_k & \text{Si } k = i + 1 \\ x_k & \text{Sinon} \end{cases} \quad \tilde{\sigma}_i^{-1}(x_k) = \begin{cases} x_k x_{k+1} x_k^{-1} & \text{Si } k = i \\ x_{k-1} & \text{Si } k = i + 1 \\ x_k & \text{Sinon} \end{cases}$$

On note \tilde{B}_n l'ensemble de tous les automorphismes de tresses de F_n . On montre aisément qu'il s'agit d'un groupe muni de la composition. En fait, ce groupe est isomorphe à B_n

Théorème 2. *L'application $\sigma_i \mapsto \tilde{\sigma}_i$ définit un isomorphisme de groupes entre B_n et \tilde{B}_n .*

Réaliser B_n comme un groupe d'automorphismes du groupe libre nous donne immédiatement une solution au *problème du mot*. En effet, vérifier qu'une tresse β est triviale revient, par ce théorème, à montrer que $\tilde{\beta} = \text{id}_{F_n}$, ce qui se vérifie simplement en calculant les $\tilde{\beta}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Nous allons maintenant généraliser la notion du groupe de tresses. De la même manière que B_n est intimement lié à \mathfrak{S}_n , nous allons définir des groupes de tresses généralisés avec une présentation de la forme similaire provenant de présentations de groupes de Coxeter. Cependant, cette famille bien plus générale de groupes est également plus difficile à comprendre, et un grand nombre de résultats connus sur B_n ne le sont pas dans le cas général des groupes de tresses. Cependant, il existe une famille de groupes de tresses généralisés, appelés groupes de tresses sphériques, pour laquelle nous avons des outils, en particulier la théorie de Garside, afin de répondre aux questions que nous avons évoquées : problème du mot, calcul du centre et torsion. Nous verrons pour conclure le cas d'un groupe de tresses non sphérique particulier afin de donner une idée des différentes pistes pour aborder ces questions dans le cas des groupes de tresses non sphériques.

2 Groupes de Coxeter

Dans cette partie, nous allons présenter les groupes de Coxeter. Il s'agit d'une famille de groupes dont les applications sont extrêmement variées, l'une d'elles nous permettra de définir des groupes de tresses généralisés, dits d'Artin-Tits. Cette partie reprend les résultats du livre [6] et des notes de cours de [9].

2.1 Systèmes de Coxeter

Définition 6 (Système de Coxeter). Soit W un groupe et $S \subset W$ un sous-ensemble de W . On note, si $s \neq s' \in S$, $m(s, s') \geq 2$ l'ordre de ss' dans W , éventuellement infini. On dit que (W, S) est un système de Coxeter, et que W est un groupe de Coxeter, si W admet une présentation :

$$W = \left\langle s \in S \left| \begin{array}{ll} s^2 = 1 & \text{Pour tout } s \in S \\ (ss')^{m(s,s')} = 1 & \text{Pour tout } s, s' \in S \text{ tels que } m(s, s') < +\infty \end{array} \right. \right\rangle$$

On appelle les relations de la forme $(ss')^{m(s,s')} = 1$ des relations de Coxeter.

Par exemple, les groupes symétriques sont des groupes de Coxeter. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$, alors on peut vérifier que

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{Si } 1 \leq i \leq n-1 \\ (s_i s_{i+1})^3 = 1 & \text{Si } 1 \leq i \leq n-2 \\ (s_i s_j)^2 = 1 & \text{Si } |i-j| > 1 \end{array} \right. \right\rangle$$

En général, on se donne un ensemble de générateurs S ainsi qu'une matrice (éventuellement infinie) $(m(s, s'))_{s \neq s' \in S}$ ou un graphe Γ non orienté de sommets étiquetés par les éléments de S et dont l'arête reliant les sommets s et s' est pondérée par $m(s, s')$. Un tel graphe est appelé *graphe de Coxeter-Dynkin* ou plus simplement graphe de Coxeter. Afin d'alléger les notations, on ne représente pas les arêtes de poids par 2 et on ne marque pas la valeur du poids si elle vaut 3. On note alors le groupe de Coxeter associé W_Γ .

Par exemple, le graphe de Coxeter associé à la présentation de \mathfrak{S}_n précédente est le graphe à $n-1$ sommets :

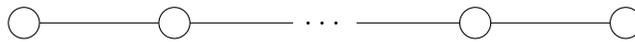


FIGURE 6 – Graphe de Coxeter de \mathfrak{S}_n

Un autre exemple élémentaire de groupe de Coxeter sont les groupes diédraux. Ce sont les groupes de Coxeter associés aux graphes de la forme suivante pour $n \geq 2$:

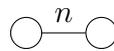


FIGURE 7 – Graphe de Coxeter de D_{2n}

Un outil important pour la suite sera la notion de longueur d'un élément de W .

Définition 7 (Longueur). On appelle la longueur d'un mot w sur l'alphabet S , et on le note $l(w)$, le plus petit entier r tel qu'il existe $s_1, \dots, s_r \in S$ tels que $w = s_1 \dots s_r$ en tant qu'éléments de W . Par convention, $l(1) = 0$.

On appelle toute écriture de w en $l(w)$ lettres une écriture réduite de w .

Bien évidemment, les longueurs de deux mots sur l'alphabet S représentant le même élément de W sont identiques, on parle alors de la longueur d'un élément de W comme la longueur d'une écriture de w . Il est immédiat de vérifier que la fonction longueur ainsi définie vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 2 (Propriétés de la fonction longueur). *La fonction longueur vérifie, pour tout $w, w' \in W$ et $s \in S$*

$$(i) \quad l(w) = l(w^{-1})$$

$$(ii) \quad l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$$

$$(iii) \quad l(ww') \leq l(w) + l(w')$$

$$(iv) \quad l(ww') \geq l(w) - l(w')$$

$$(v) \quad l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1$$

Enfin, on appelle *réflexions de W* les W -conjugués d'éléments de S , et on note R ce sous-ensemble de W .

2.2 Caractérisation des groupes de Coxeter

Nous allons évoquer un théorème central dans l'étude des groupes de Coxeter, dont une démonstration est faite dans [9] (équivalence (i) \Leftrightarrow (iii)) et dans [6] (équivalence (i) \Leftrightarrow (ii)).

Théorème 3 (Caractérisation des groupes de Coxeter). *Soit W un groupe engendré par un ensemble fini S d'involutions et $(m(s, s'))_{s \neq s' \in S}$ la famille des ordres des éléments ss' pour $s \neq s' \in S$. On a les équivalences*

(i) (W, S) est un système de Coxeter

(ii) (Condition d'échange forte) Pour tout $w \in W$, si $w = s_1 \dots s_k$ est une écriture de W dans l'alphabet S et si $r \in R$ est tel que $l(wr) \leq l(w)$, alors il existe $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $wr = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$

(iii) Pour tout $s \in S$ et $w \in W$, $l(ws) \neq l(w)$ et (W, S) vérifie le lemme de Matsumoto : Pour tout monoïde M et tout morphisme de monoïde $f : S^* \rightarrow M$ tel que pour tout $s \neq s' \in S$, $f(ss' \dots) = f(s's \dots)$ si $m(s, s') < +\infty$ (avec $m(s, s')$ termes dans chaque produit alterné), alors f est constante sur toutes les écritures réduites d'un mot de W .

Remarques :

1. Ici, la notation $s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_k$ correspond au mot $s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_k$, c'est à dire le mot $s_1 \dots s_k$ auquel on aurait retiré le terme s_i .

2. Il existe une version faible du point (ii), appelée *condition d'échange (faible)*, qui prend les éléments r non pas dans R mais dans S , mais qui exige que les écritures de w choisies soient réduites. Ces deux conditions sont en fait équivalentes.
3. Le lemme de Matsumoto nous dit que dans un groupe de Coxeter, il est possible de passer d'une écriture réduite d'un mot à une autre uniquement en utilisant les relations de Coxeter.

2.3 Groupes de Coxeter finis

On s'intéresse maintenant aux groupes de Coxeter finis, qui vont nous donner une famille plus restreinte de groupes de tresses généralisés, mais pour lesquels nous aurons beaucoup de résultats car nous verrons qu'ils s'agiront de groupes de Garside. Nous allons évoquer deux résultats fondamentaux sur les groupes de Coxeter finis : l'existence d'un élément de longueur maximale ainsi qu'une classification des groupes de Coxeter finis irréductibles.

Définition 8 (Groupe de Coxeter irréductible). *On dit qu'un groupe de Coxeter associé à un graphe Γ est irréductible lorsque Γ est connexe.*

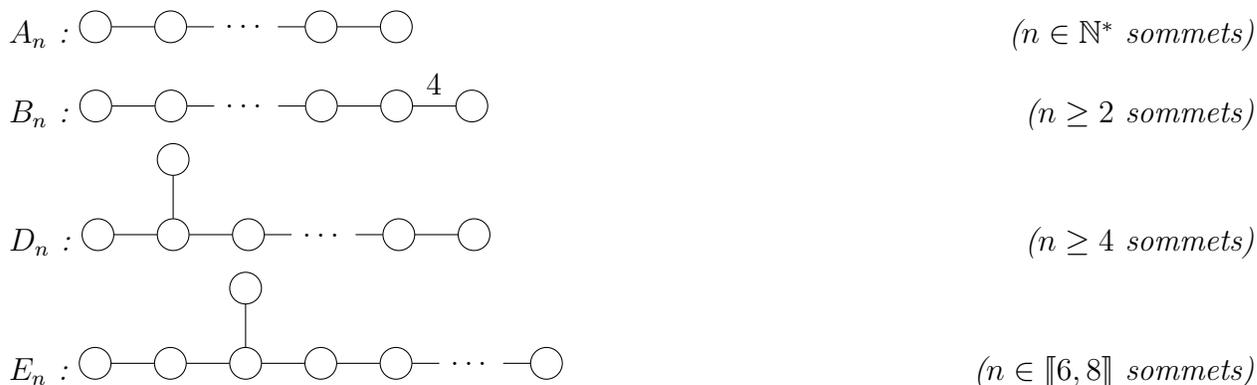
Si Γ n'est pas connexe, alors on a $B_\Gamma = B_{\Gamma_1} \times \cdots \times B_{\Gamma_k}$ si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sont les composantes connexes de Γ . Ainsi, l'étude des groupes de Coxeter se ramène à l'étude des groupes de Coxeter irréductibles.

Proposition 3 (Élément de longueur maximale). *Soit (W, S) un système de Coxeter. Pour tout élément $w_0 \in W$, il y a équivalence entre :*

- (i) Pour tout $s \in S$, $l(w_0s) < l(w_0)$
- (ii) Pour tout $w \in W$, $l(w_0w) = l(w_0) - l(w)$
- (iii) w_0 est de longueur maximale

Dans le cas où il existe un w_0 vérifiant ces conditions, il est unique, c'est une involution et W est un groupe fini. Réciproquement, si W est un groupe fini, alors un tel élément w_0 existe.

Théorème 4 (Classification des groupes de Coxeter finis irréductibles). *Les groupes de Coxeter finis irréductibles sont exactement les groupes de Coxeter associés aux graphes*



$$F_4 : \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \overset{4}{\text{---}} \bigcirc \text{---} \bigcirc$$

$$G_2 : \text{---} \bigcirc \overset{6}{\text{---}} \bigcirc$$

$$H_3 : \text{---} \bigcirc \overset{5}{\text{---}} \bigcirc \text{---} \bigcirc \quad H_4 : \text{---} \bigcirc \overset{5}{\text{---}} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc$$

$$I_2(e) : \text{---} \bigcirc \overset{e}{\text{---}} \bigcirc \quad (e = 5 \text{ ou } e \geq 7)$$

Remarque : $I_2(e)$ est bien défini pour $e = 3, 4, 6$, il s'agit de respectivement A_2 , B_2 et G_2 . La liste du théorème est une liste d'éléments distincts.

Une démonstration de ce théorème est faite dans [9], et se repose sur le lien particulier entre les groupes de Coxeter et les groupes de réflexions réels.

3 Théorie de Garside

Nous allons définir une famille particulière de monoïdes, qui nous donnera une famille particulière de groupes, qui possède de très bonnes propriétés et qui contiennent les groupes de tresses généralisés que nous verrons plus tard. La théorie de Garside a été mise au point par P. DEHORNOY et L. PARIS à la fin des années 1990 afin de généraliser les constructions et résultats que GARSIDE avait obtenus à la fin des années 1970 sur le groupe de tresses d'Artin. Cette partie suit majoritairement le chapitre 6 de [7].

3.1 Monoïdes atomiques

Dans un monoïde M , les relations de divisibilité à gauche \preceq et de divisibilité à droite \succeq ne sont pas des relations d'ordre en général. Par exemple s'il existe un élément $x \in M \setminus \{1\}$ inversible, on a alors $1 \preceq x$ et $x \preceq 1$ mais $x \neq 1$.

Il existe néanmoins une famille de monoïdes dans lesquels ces relations sont des relations d'ordre, il s'agit des monoïdes atomiques. Si $a \in M \setminus \{1\}$, on définit la *norme* de a comme étant :

$$\|a\| = \sup\{r \in \mathbb{N} \mid \exists a_1, \dots, a_r \in M \setminus \{1\}, a = a_1 \dots a_r\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Et on pose $\|1\| = 0$. On a alors $\|ab\| \geq \|a\| + \|b\|$ et $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Définition 9. Un élément $a \in M$ est dit *atome* de M si $\|a\| = 1$. Un monoïde M est dit *atomique* lorsque tout élément est de norme finie.

Par exemple, le monoïde (\mathbb{N}^*, \times) est atomique et ses atomes sont les nombres premiers.

Nous allons travailler principalement sur des monoïdes définis par présentation lorsque nous généraliserons les groupes de tresses. De manière similaire aux groupes définis par présentation, il s'agit d'un quotient du monoïde libre par une relation d'équivalence.

Définition 10 (Présentation d'un monoïde). *Soit X un ensemble et R un sous-ensemble de $X^* \times X^*$. Soit \sim la plus petite relation d'équivalence sur X^* contenant tous les éléments $(w_1rw_2, w_1r'w_2)$ où $w_1, w_2 \in X^*$ et $r, r' \in R$. Posons $M = X^*/\sim$ l'ensemble des classes pour \sim . Il est clair qu'il existe une unique structure de monoïde sur M de sorte que la projection $P : X^* \rightarrow M$ soit un morphisme de monoïdes. On dit alors que $\langle X \mid R \rangle$ est une présentation de monoïde de M , que X sont les générateurs et R les relations.*

Il est clair que l'ensemble $P(X) \subset M$ engendre M (au sens où tout élément de M s'écrit comme un produit fini d'éléments de $P(X)$). Si $(r, r') \in R$, on a $P(r) = P(r')$ et cet élément de M est appelé un *relateur*.

Dans la suite, on écrira $r = r'$ au lieu de $(r, r') \in R$ et on identifiera x et $P(x)$. Voici quelques définitions et résultats importants pour la suite.

Définition 11.

- Une présentation de monoïde $\langle X \mid R \rangle$ est dite *finie* si X et R sont finis
- Une présentation de monoïde $\langle X \mid R \rangle$ d'un monoïde M est dite *pondérée* s'il existe un morphisme de monoïdes $p : M \rightarrow \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$, $p(x) \geq 1$. On appelle p le *poids* de M .
- Une présentation de monoïde $\langle X \mid R \rangle$ d'un monoïde M est dite *équilibrée en longueur* si la fonction longueur l sur le monoïde libre X^* vérifie $l(r) = l(r')$ pour tout $(r, r') \in R$. Comme $l(x) = 1$ pour tout $x \in X$, alors l induit un poids canonique sur M .

En particulier, toutes les présentations de monoïdes équilibrées en longueur sont pondérées, mais la réciproque est fautive en général. Par exemple, $\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$ est pondérée mais pas équilibrée en longueur².

Lemme 1. *Si un monoïde M admet une présentation de monoïde $\langle X \mid R \rangle$ pondérée, alors M est atomique et tous ses atomes sont dans X .*

Si de plus $\langle X \mid R \rangle$ est équilibrée en longueur, alors les atomes sont exactement les éléments de X et $\|\cdot\| = l$ sur M où l est la fonction poids canonique sur M .

3.1.1 Le problème du mot

Définition 12 (Problème du mot). *Le problème du mot pour une présentation de monoïde $\langle X \mid R \rangle$ est le suivant : étant donnés deux mots $w, w' \in X^*$, représentant des éléments a et a' de $M = \langle X \mid R \rangle$, déterminer si $a = a'$.*

2. Vue en tant que présentation de groupes, il s'agit d'une autre présentation de B_3 . La présentation usuelle de B_3 est cependant équilibrée en longueur.

Dans le cas où $\langle X | R \rangle$ est une présentation finie pondérée, on a une solution simple à ce problème.

Résolution du problème du mot dans un monoïde admettant une présentation pondérée finie : Soit $p : M \rightarrow \mathbb{N}$ un poids sur $M = \langle X | R \rangle$. Comme pour tout $x \in X$ on a $p(x) \geq 1$, alors le poids de tout élément non trivial $a \in M$ représenté par un mot $w \in X^*$ est supérieur à la longueur de w . Posons alors $W(a) \subset X^*$ l'ensemble des mots représentant a , c'est donc en particulier un ensemble de mots de longueur $\leq p(a)$, et comme X est fini, c'est un ensemble fini.

Afin d'obtenir tous les éléments de $W(a)$, on part d'un mot w représentant a et on applique toutes les substitutions de la forme $w_1 r w_2 \leftrightarrow w_1 r' w_2$ où $(r, r') \in R$, puis on applique toutes ces substitutions à tous les nouveaux mots obtenus, et ainsi de suite. Comme $W(a)$ et R sont finis, cette procédure l'est également.

On conclut en remarquant que deux éléments $a, a' \in M$ sont égaux si et seulement si $W(a) = W(a')$. Ceci donne une solution au problème du mot dans un monoïde admettant une présentation pondérée finie.

3.1.2 Monoïdes pré-Garside

Définition 13 (Monoïde pré-Garside). *Un monoïde M est pré-Garside s'il existe un élément $\Delta \in M$ tel que Δ et l'ensemble Σ de ses diviseurs à gauche vérifient les conditions suivantes :*

- (a) Σ est fini, engendre M et coïncide avec l'ensemble des diviseurs à droite de Δ
- (b) Pour tout $a, b \in M$, si $a\Delta = b\Delta$ ou si $\Delta a = \Delta b$, alors $a = b$.

Un tel élément Δ est appelé un élément de Garside de M

Il est clair que Σ est stable par divisibilité à gauche et à droite et qu'il contient 1 et Δ .

Quelques exemples :

1. Tout élément non nul du monoïde $(\mathbb{N}, +)$ est un élément de Garside de \mathbb{N}
2. Le monoïde (\mathbb{N}^*, \times) ne possède aucun élément de Garside

Lemme 2 (Propriétés des monoïdes pré-Garside). *Soit (M, Δ) un monoïde pré-Garside. Notons Σ l'ensemble des diviseurs de Δ . On a :*

- (i) Pour tout $a, b, c \in \Sigma$, si $ab = ac$ ou $ba = ca$, alors $b = c$
- (ii) Il existe une permutation $\delta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ telle que pour tout $a \in \Sigma$, $\Delta a = \delta(a)\Delta$
- (iii) Soit N l'ordre de δ dans \mathfrak{S}_Σ , alors pour tout $a \in M$ on a : $a\Delta^N = \Delta^N a$
- (iv) Pour tout $a \in M$, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $a \preceq \Delta^r$ et $\Delta^r \succeq a$

Ce théorème nous servira entre autres à calculer les centres de groupes de tresses généralisés.

3.1.3 Groupe des fractions d'un monoïde pré-Garside

Définition 14 (Morphisme universel). *On dit qu'un morphisme de monoïde $i : M \rightarrow G$ est universel si G est un groupe et si pour tout morphisme de monoïdes $f : M \rightarrow G'$ où G' est un groupe, il existe un unique morphisme de groupes $g : G \rightarrow G'$ tel que $f = g \circ i$.*

Tout monoïde admet un morphisme universel vers un groupe. En effet, soit $\langle X \mid R \rangle$ une présentation de M . Alors cette même présentation vue en tant que présentation de groupes donne un groupe G tel que $id : M \rightarrow G$ soit un morphisme universel.

Par définition du morphisme universel, G est unique à isomorphisme près.

Définition 15 (Groupe de fractions). *On appelle G le groupe de fractions de M , et on le note G_M .*

Soit (M, Δ) un monoïde pré-Garside régulier à gauche. On va construire explicitement son groupe de fractions.

Soit N l'ordre de la permutation δ défini dans le lemme 2. On sait que Δ^N est dans le centre de M . Posons (H, \cdot) le monoïde produit de (M, \cdot) et $(\mathbb{N}, +)$, c'est à dire que pour tout $(a, p), (b, q) \in H$, $(a, p)(b, q) = (ab, p + q)$ et l'élément neutre de H est $(1, 0)$.

Définissons sur H la relation \sim par : $(a, p) \sim (b, q) \Leftrightarrow \Delta^{qN}a = \Delta^{pN}b$. Par exemple, $(\Delta^N, 1) \sim (1, 0)$. Montrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur H . La réflexivité et la symétrie sont évidentes, montrons la transitivité. Soient $(a, p), (b, q), (c, r) \in H$ tel que $(a, p) \sim (b, q)$ et $(b, q) \sim (c, r)$. On a donc $\Delta^{qN}a = \Delta^{pN}b$ et $\Delta^{rN}b = \Delta^{qN}c$. Ainsi :

$$\Delta^{rN}\Delta^{qN}a = \Delta^{rN}\Delta^{pN}b = \Delta^{pN}\Delta^{rN}b = \Delta^{pN}\Delta^{qN}c = \Delta^{qN}\Delta^{pN}c$$

Or, M est simplifiable à gauche. Donc $\Delta^{qN}a = \Delta^{pN}c$, donc $(a, p) \sim (c, r)$

On pose alors $G = H/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences pour \sim et $\pi : H \rightarrow G$ la projection. Comme Δ^N est dans le centre de M , alors il existe une unique structure de monoïde sur G telle que la projection π soit un morphisme de monoïdes. On obtient également un morphisme de monoïdes $i : M \rightarrow G$ défini par $i(a) = \pi(a, 0)$ pour tout $a \in M$. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 5. *Soit (M, Δ) un monoïde pré-Garside régulier à gauche. On a :*

- (i) *Le monoïde G construit ci-dessus est un groupe et il s'agit du groupe de fractions de M . De plus, le morphisme de monoïdes $i : M \rightarrow G$ est injectif*
- (ii) *Tout élément de G s'écrit sous la forme $i(\Delta)^s i(a)$ où $s \in \mathbb{Z}$ et $a \in M$*

Dans la suite, on identifiera les éléments d'un monoïde pré-Garside régulier à gauche M avec leurs images dans G_M , de sorte que M soit un sous-ensemble de G_M .

Dans le cas où le monoïde M est atomique, on peut préciser le second point du théorème 5.

Proposition 4. *Soit (M, Δ) un monoïde pré-Garside non trivial, régulier à gauche et atomique. Alors tout élément du groupe de fractions G_M de M s'écrit de manière unique de la forme $\Delta^s b$ où $s \in \mathbb{Z}$ et $b \in M$ est tel que Δ n'est pas un diviseur à gauche de b*

Ceci donne donc une solution au problème du mot dans le groupe des fractions d'un monoïde pré-Garside atomique et régulier à gauche. En effet, $\Delta^s b = 1$ si et seulement si $s = 0$ et $b = 1$, on se ramène donc au problème du mot dans M que nous avons déjà résolu dans 3.1.1.

3.2 Monoïdes de Garside

3.2.1 Définition

Soit (M, Δ) un monoïde pré-Garside et Σ l'ensemble des diviseurs (à gauche ou à droite) de Δ . Comme Σ engendre M , tous les atomes de M sont dans Σ , c'est-à-dire que tous les atomes de M sont des diviseurs de Δ

Définition 16 (Monoïde de Garside). *On dit que (M, Δ) est un monoïde de Garside s'il est atomique et si pour tous atomes s, t de M , l'ensemble $\{a \in \Sigma \mid s \preceq a \text{ et } t \preceq a\}$ admet un élément minimal $\Delta_{s,t}$ (pour la relation d'ordre partielle \preceq)*

On dit que c'est un monoïde de Garside admissible si c'est un monoïde de Garside qui admet une présentation $\langle X \mid R \rangle$ telle que les générateurs et les relateurs soient dans Σ .

On appelle groupe de Garside (admissible) le groupe de fractions d'un monoïde de Garside (admissible).

Remarque : Ici, nous utilisons la même définition que dans [7] (en anglais, *comprehensive Garside monoid*), la définition usuelle d'un monoïde de Garside est aujourd'hui légèrement différente de celle-ci, et est présentée en annexe 6.1.

Dans un monoïde quelconque, les notions de PGCD et de PPCM pour les relations \preceq et \succeq ne sont pas toujours bien définies : on n'a en général ni existence, ni unicité.

Définition 17 (PGCD, PPCM dans un monoïde). *Soit $k \geq 1$ éléments a_1, \dots, a_k d'un monoïde M . On dit que $d \in M$ est un PGCD à gauche de a_1, \dots, a_k , si $d \preceq a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et si pour tout $d' \in M$ tel que $d' \preceq a_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $d' \preceq d$.*

On définit également le PPCM à droite de a_1, \dots, a_k , comme étant un élément $m \in M$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait $a_k \preceq m$ et si $m' \in M$ est également un multiple à droite de tous les a_i , on a $m \preceq m'$.

On définit de manière analogue les PGCD à droite et PPCM à gauche en remplaçant \preceq par \succeq .

Dans un monoïde atomique, on peut montrer que les PGCD et PPCM sont uniques s'ils existent. Dans un monoïde de Garside admissible, on a en fait existence et unicité des PGCD (à gauche et à droite) et des PPCM (à gauche et à droite).

Ceci permet de montrer que les groupes de Garside admissibles sont sans torsion (on le sait déjà pour les monoïdes de Garside car ils sont atomiques). En réalisant les groupes de tresses généralisés comme des groupes de Garside admissibles comme nous le ferons plus tard, ceci montre alors que les groupes de tresses généralisés sont sans torsion. La démonstration est inspirée de celle de Jean Michel dans [8], proposition 9.3.

Preuve : Soit (M, Δ) un monoïde de Garside admissible. On démontre d'abord qu'on peut étendre la relation d'ordre partielle \preceq à G_M de la manière suivante. Comme M est atomique, on a par la proposition 4 que tout élément de G_M s'écrit de manière unique $\Delta^s b$ où $s \in \mathbb{Z}$ et $b \in M$ dont Δ n'est pas un diviseur à gauche. On définit alors dans G_M la relation d'ordre partielle \preceq qui étend celle sur M définie par : $x \preceq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in M$. C'est bien une relation d'ordre sur G_M . En effet, la réflexivité et la transitivité sont claires, et l'anti-symétrie vient du fait que M ne contient aucun élément inversible (car atomique), donc si $x^{-1}y$ et $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$ sont dans M , alors $x = y$.

On définit alors un PPCM à droite de $\{\Delta^{s_1}a_1, \dots, \Delta^{s_k}a_k\}$ par, en notant $m = \min(s_1, \dots, s_k)$, $\Delta^m \text{PPCM}(\Delta^{s_1-m}a_1, \dots, \Delta^{s_k-m}a_k) = \Delta^m \Pi$ (où ici le PPCM est défini dans le monoïde car $s_i - m \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$). C'est bien un PPCM à droite. En effet, on a $\Delta^{s_i}a_i \preceq \Delta^m \Pi \Leftrightarrow a_i^{-1} \Delta^{m-s_i} \Pi \in M \Leftrightarrow \Delta^{s_i-m}a_i \preceq \Pi$, et s'il existe $c \in G_M$ tel que $\Delta^{s_i}a_i \preceq c$ pour tout i , alors $\Delta^{s_i-m}a_i \preceq \Delta^{-m}c$ pour tout i . Or, $\Delta^{-m}c \in M$. En effet, on a $a_i^{-1} \Delta^{-s_i}c \in M$ donc il existe $d \in M$ tel que $c = \Delta^{s_i}a_i d$. Donc, comme $s_i - m \geq 0$, on a $\Delta^{-m}c = \Delta^{s_i-m}a_i d \in M$. On a donc, dans M , $\Pi \preceq \Delta^{-m}c$. Donc dans G_M , on a $\Delta^m \Pi \preceq c$. Ainsi, $\Delta^m \Pi$ est bien le PPCM de $\{\Delta^{s_1}a_1, \dots, \Delta^{s_k}a_k\}$

Ainsi, si $x \in G_M$ est tel que $x^k = 1$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors en posant $c = \text{PPCM}(1, x, x^2, \dots, x^{k-1})$ un PPCM à droite, on obtient que $x^{-1}c$ est un PPCM à droite de l'ensemble $x^{-1}\{1, x, \dots, x^{k-1}\}$, qui est égal à l'ensemble $\{1, x, \dots, x^{k-1}\}$ car $x^p = 1$. Ainsi, par unicité du PPCM, on a $x^{-1}c = c$, c'est à dire que $x = 1$. Donc tout élément non trivial de G_M est d'ordre infini, c'est-à-dire que G_M est sans torsion.

4 Groupes et monoïdes de tresses d'Artin-Tits

Dans cette partie, nous allons généraliser la notion du groupe de tresses d'Artin en associant à chaque groupe de Coxeter un groupe de tresses, qui se trouvera être un groupe de Garside admissible dans certains cas. Cette partie s'appuie sur le chapitre 6 de [7].

4.1 Définition

Définition 18 (Groupe de tresses d'Artin-Tits). *Soit (W, S) un système de Coxeter avec S fini et de matrice $(m(s, s'))_{s \neq s' \in S}$. Le monoïde de tresses généralisé (ou monoïde d'Artin-Tits) sur W ,*

noté B_W^+ (ou B_Γ^+ si Γ est le graphe associé à (W, S)), est le monoïde défini par la présentation :

$$\left\langle s \in S \left| \underbrace{ss'ss' \dots}_{m(s,s') \text{ facteurs}} = \underbrace{s'ss's \dots}_{m(s,s') \text{ facteurs}} \quad \text{Pour tout } s \neq s' \in S \text{ tels que } m(s, s') < +\infty \right. \right\rangle$$

On appelle les éléments de B_W^+ des tresses positives.

On définit alors B_W , le groupe de tresses généralisé (ou groupe de tresses d'Artin-Tits) comme étant le groupe des fractions de B_W^+ , c'est-à-dire comme étant le groupe de même présentation que B_W^+ (vue en tant que présentation de groupes).

Remarque : Il s'agit bien d'une généralisation des monoïdes et groupes de tresses d'Artin en prenant uniquement des groupes de Coxeter associés aux graphes de la forme :



c'est-à-dire en prenant comme groupes de Coxeter sous-jacents les groupes symétriques \mathfrak{S}_n .

Cette présentation de B_W^+ est une présentation pondérée, finie et équilibrée en longueur. Ainsi, on dispose d'une solution au problème du mot dans B_W^+ . Comme B_W est le groupe de fractions de B_W^+ , cela donne alors une solution au problème du mot dans les groupes de tresses d'Artin-Tits de groupe de Coxeter ayant un graphe fini. De plus, B_W^+ est un monoïde atomique, dont les atomes sont les éléments de S et $\|\cdot\| = l$ où $l : B_W^+ \rightarrow \mathbb{N}$ est le morphisme de monoïdes défini par $l(s) = 1$ pour tout $s \in S$.

Par le lemme de Matsumoto, il existe une unique application $\rho : W \rightarrow B_W^+$ telle que pour toute écriture réduite $w = s_1 \dots s_r \in W$, on ait $\rho(w) = s_1 \dots s_r \in B_W^+$. Si $\pi : B_W^+ \rightarrow W$ est la projection, alors clairement on a $\pi \circ \rho = \text{id}_W$. Donc ρ est injective.

Définition 19 (Tresses réduites). *On définit alors l'ensemble des tresses réduites de B_W^+ comme étant $\rho(W) \subset B_W^+$, et on le note B_W^{red} .*

Par exemple, 1 ainsi que tous les générateurs $s \in S$ sont des éléments réduits de B_W^+ .

Si on note λ la fonction longueur sur W (pour rappel, $\lambda(w)$ est le plus petit entier r tel qu'il existe $s_1, \dots, s_r \in S$ tels que $w = s_1 \dots s_r$), alors on a l'inégalité $\lambda(\pi(a)) \leq l(a)$ pour tout $a \in B_W^+$.

Lemme 3 (Propriétés des tresses réduites).

- (a) Un élément $a \in B_W^+$ est réduit si et seulement si $\lambda(\pi(a)) = l(a)$
- (b) Tous les diviseurs à gauche et tous les diviseurs à droite d'une tresse réduite est réduit.
- (c) Pour tout $v, w \in W$, on a : $\rho(v)\rho(w) = \rho(vw) \Leftrightarrow \lambda(v) + \lambda(w) = \lambda(vw)$

Si de plus W est fini (on dit que le monoïde et le groupe de tresses d'Artin-Tits associés sont *sphériques*), alors on dispose d'un élément w_0 de longueur maximale. On pose $\Delta = \rho(w_0) \in B_W^+$. On a alors le résultat suivant.

Lemme 4. *Un élément de B_W^+ est réduit si et seulement si c'est un diviseur à gauche ou à droite de Δ*

On peut alors démontrer le résultat fondamental suivant.

Théorème 6. *Si B_W^+ est un monoïde de tresses d'Artin-Tits sphérique et Δ défini comme précédemment, alors (B_W^+, Δ) est un monoïde de Garside admissible. En particulier, (B_W, Δ) est un groupe de Garside admissible.*

Ce théorème nous permet alors d'appliquer tous les résultats que nous avons vus sur les groupes de Garside admissibles aux groupes de tresses d'Artin-Tits sphériques. Ce résultat est d'autant plus important qu'un grand nombre de ces questions sont encore ouvertes sur les groupes de tresses d'Artin-Tits non sphériques.

Remarque : Il est possible de définir les groupes de tresses d'Artin-Tits en tant que groupe fondamental d'un certain espace. Dans le cas des groupes d'Artin-Tits sphériques, un résultat dû à E. BRIESKORN utilise une représentation des groupes de Coxeter en tant que groupes de réflexions réels ([7], 6.6.3). Dans le cas général, ce résultat est toujours vrai et est dû à VAN DER LEK ([10])

4.2 Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits

On a déjà vu que le centre des groupes de tresses d'Artin sont des groupes monogènes infinis. Plus précisément, on a vu que $Z(B_n) = \langle \Delta_n^2 \rangle$. La question sur la nature du centre des groupes de tresses d'Artin-Tits est encore une question ouverte dans le cas général. Dans le cas particulier des groupes de tresses d'Artin-Tits sphériques, on va démontrer le résultat suivant.

Proposition 5 (Centre des groupes de tresses sphériques). *Soit (W, S) un système de Coxeter irréductible fini, alors le centre de B_W est monogène infini.*

Il est conjecturé que dans les autres cas (groupe de tresses d'Artin-Tits non sphériques) le centre est toujours trivial [5].

Grâce aux résultats de théorie de Garside établis précédemment, nous allons démontrer ce théorème. Nous allons calculer explicitement les centres des groupes de tresses d'Artin-Tits de type A_n et $I_2(m)$. Dans les autres cas de la classification des groupes de Coxeter irréductibles, les démonstrations sont similaires³.

3. Il s'agit d'un exercice guidé donné par mon maître de stage. Ce résultat est cependant assez élémentaire donc de nombreuses démonstrations sont disponibles

Pour rappel, voici les graphes des groupes de Coxeter de type A_n et $I_2(m)$ qu'on a explicité dans la classification des groupes de Coxeter finis irréductibles (Théorème 4). Dans la suite, on notera $B(A_n)$ pour le groupe de tresses d'Artin-Tits associé à un graphe de Coxeter de type A_n , $B(B_n)$ pour le groupe de tresses d'Artin-Tits associé à un graphe de Coxeter de type B_n , etc.

$$A_n : \bigcirc - \bigcirc - \cdots - \bigcirc - \bigcirc \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ sommets})$$

$$I_2(m) : \bigcirc \overset{m}{-} \bigcirc \quad (m \geq 3)$$

4.2.1 Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits de type A_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $B(A_n) \simeq B_{n+1}$ (pour rappel, B_n a $n-1$ générateurs). Dans le cas du groupe de tresses d'Artin, on a $\Delta = \Delta_n = (\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 \in B_n$ comme défini dans la partie 1.3. Et (B_n, Δ_n) est un groupe de Garside admissible.

Lemme 5. *Les quatre propositions suivantes sont vérifiées*

- (1) Pour tout $x \in B_{n+1}$, il existe un unique $s \in \mathbb{Z}$ et un unique $b \in B_{n+1}^+$ tels que $x = \Delta^s b$ et $\Delta \not\preceq b$.
- (2) $\Delta^2 \in Z(B_{n+1})$
- (3) Le PPCM à gauche et le PPCM à droite de $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ est Δ
- (4) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_i \Delta = \Delta \sigma_{n+1-i}$

Supposons le lemme vrai. Nous allons montrer qu'alors $Z(B_{n+1}) = \langle \Delta^2 \rangle$. Par la seconde proposition du lemme, il suffit de montrer l'inclusion directe. Soit $x \in Z(B_{n+1})$. Par le premier point du lemme on dispose d'un unique $s \in \mathbb{Z}$ et $b \in B_{n+1}^+$ tels que $x = \Delta^s b$ et $\Delta \not\preceq b$. Si $b = 1$, alors $x = \Delta^s$. Par le quatrième point du lemme cela implique que s est pair (car les puissances impaires de Δ ne sont pas centrales), donc que $x \in \langle \Delta^2 \rangle$. On suppose maintenant que $b \neq 1$ et soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma_i \preceq b$. Deux cas se présentent alors :

- Si s est pair : Alors Δ^s et x sont dans le centre de B_{n+1} , donc b l'est également. Ainsi, si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est tel que $|i - j| = 1$, alors on a $\sigma_j \sigma_i b = b \sigma_j \sigma_i$. Donc $\sigma_j \preceq \sigma_j \sigma_i b$ et $\sigma_i \preceq \sigma_j \sigma_i b$, donc $\text{PPCM}(\sigma_i, \sigma_j) \preceq \sigma_j \sigma_i b$. Or, $\text{PPCM}(\sigma_i, \sigma_j) = \sigma_j \sigma_i \sigma_j$. En effet, si $\sigma_i \preceq c$ et $\sigma_j \preceq c$, alors on a $c = \sigma_i c_1 = \sigma_j c_m$. On a donc une suite de relations $R_{i_1}, \dots, R_{i_{m-1}}$ tels que :

$$\sigma_i c_1 \xrightarrow{R_{i_1}} \sigma_i c_2 \xrightarrow{R_{i_2}} \dots \xrightarrow{R_{i_{k-1}}} \sigma_i c_k \xrightarrow[\text{(*)}]{\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j} \sigma_j c_{k+1} \xrightarrow{R_{i_{k+1}}} \dots \xrightarrow{R_{i_{m-1}}} \sigma_j c_m$$

En particulier, on a donc $c = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \widetilde{c_{k+1}}$ par la transformation (*), donc $\sigma_j \sigma_i \sigma_j \preceq c$. Donc $\sigma_j \sigma_i \sigma_j$ est bien le PPCM (à gauche) de σ_i et σ_j . Ainsi, on a $\sigma_j \sigma_i \sigma_j \preceq \sigma_j \sigma_i b$, donc $\sigma_j \preceq b$.

De proche en proche (par une double récurrence finie), on obtient que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sigma_i \preceq b$. Donc, comme $\text{PPCM}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \Delta$ par le lemme, on obtient que $\Delta \preceq b$, c'est absurde. Donc s ne peut être pair.

- Si s est impair : Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|i-j| = 1$. On a : $\sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i}x = \sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i}\Delta^s b = \Delta^s \sigma_j \sigma_i b$ par les deuxième et quatrième points du lemme. Mais comme x est central, on a aussi que $\sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i}x = x\sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i} = \Delta^s b\sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i}$. Ainsi, on a $\sigma_j \sigma_i b = b\sigma_{n+1-j}\sigma_{n+1-i}$. On a donc $\sigma_j \preceq \sigma_j \sigma_i b$ et $\sigma_i \preceq \sigma_j \sigma_i b$, et de même que précédemment on tombe sur une contradiction.

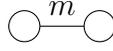
Ainsi, s est ni pair ni impair, ce qui est absurde. Donc $b = 1$ et on a vu alors que $x \in \langle \Delta^2 \rangle$. Donc $Z(B_{n+1}) = \langle \Delta^2 \rangle$.

Prouvons maintenant le lemme. Le premier point est vrai car on a vu que (B_{n+1}, Δ) est un groupe de Garside admissible. Le second point est une conséquence du quatrième point, qui n'est qu'une application successive des relations de tresses. Il ne reste qu'à montrer que Δ est le PPCM des atomes $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. C'est bien un multiple (à droite et à gauche) des atomes car $(B^+(A_n), \Delta)$ est un monoïde de Garside admissible. Pour montrer que c'est un PPCM, on va utiliser le fait que Δ est l'image de l'élément de longueur maximale de \mathfrak{S}_{n+1} par ρ . Un résultat de combinatoire des groupes de Coxeter donne que, dans le cas particulier de \mathfrak{S}_n , la longueur d'un élément $w \in \mathfrak{S}_n$ est égal à son nombre d'inversion, c'est-à-dire le nombre de (i, j) tels que $i < j$ et $w(i) > w(j)$ [3]. En particulier, la longueur maximale d'un mot de \mathfrak{S}_{n+1} est $n(n-1)/2$, et le mot $(s_1 \dots s_n)(s_1 \dots s_{n-1}) \dots (s_1 s_2)s_1$ est de longueur $n(n-1)/2$, et il est écrit avec $n(n-1)/2$ termes, donc il s'agit d'une écriture réduite du mot de longueur maximale dans \mathfrak{S}_{n+1} . Ainsi, son image par ρ dans le groupe d'Artin B_{n+1} est Δ . Montrons qu'il s'agit bien du PPCM : Soit Π le PPCM des σ_i . On a $\Pi \preceq \Delta$ car Δ est un multiple commun des σ_i . Or, tous les diviseurs de Δ sont dans l'image de ρ (lemme 4), donc il existe $u \in \mathfrak{S}_{n+1}$ tel que $\rho(u) = \Pi$. Mais alors comme Π est un multiple commun aux σ_i , on a que $\lambda(s_i u) = \lambda(u) - 1$ pour tout i . Donc u est un élément de longueur maximale. Par unicité de l'élément de longueur maximale dans un groupe de Coxeter fini, on a que $\Delta = \Pi$.

Remarque 3. *Comment savoir que $\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$? Et comment le généraliser aux autres groupes de Coxeter ? Nous savons que $\Delta = \rho(w_0)$ où w_0 est l'élément de longueur maximale dans le groupe de Coxeter. Il existe toute une combinatoire dans les groupes de Coxeter permettant de calculer la longueur d'un élément en fonction de son action sur un certain ensemble, et celle-ci permet de trouver ce qui pourrait être un élément maximal. Par exemple dans le cas des groupes de Coxeter \mathfrak{S}_n , la longueur d'un élément est le nombre d'inversion d'une permutation. On sait alors que la permutation $i \mapsto n+1-i$ est de longueur maximale, il suffit alors de l'écrire avec les générateurs s_1, \dots, s_n et on obtient w_0 . De la combinatoire des groupes de Coxeter est faite dans [3], chapitre 8.*

4.2.2 Centre des groupes de tresses d'Artin-Tits de type $I_2(m)$

Si $m \geq 3$, les groupes de Coxeter de type $I_2(m)$ sont les groupes de Coxeter de graphe



Autrement dit, les groupes de tresses d'Artin-Tits de type $I_2(m)$ sont les groupes définis par la présentation :

$$\left\langle \sigma_1, \sigma_2 \left| \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \dots}_{m \text{ facteurs}} = \underbrace{\sigma_2 \sigma_1 \dots}_{m \text{ facteurs}} \right. \right\rangle$$

Tout d'abord, montrons que $(B^+(I_2(m)), \Delta)$ est un monoïde de Garside admissible si $\Delta = \sigma_1 \sigma_2 \dots$ (m facteurs). Le caractère atomique est clair (il est en fait même équilibré en longueur) et les diviseurs à gauche et à droite de Δ sont tous les produits alternés de σ_1 et σ_2 de m termes ou moins (c'est à dire $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \dots, \Delta\}$), et c'est bien une partie complète car elle contient les atomes ainsi que les relateurs. Il reste à montrer qu'il existe un élément minimal à l'ensemble $\{x \in B^+(I_2(m)) \mid \sigma_1 \preceq x \text{ et } \sigma_2 \preceq x\}$. En fait, c'est Δ . En effet, Δ est bien dedans, et si c est dans cet ensemble alors on a $c = \sigma_1 c' = \sigma_2 c''$. Comme il n'existe qu'une seule relation dans ce monoïde, nécessairement il existe une écriture de c commençant par Δ . Donc $\text{PPCM}(\sigma_1, \sigma_2) = \Delta$.

Montrons alors que si m est pair, $Z(B(I_2(m))) = \langle \Delta \rangle$ et si m est impair $Z(B(I_2(m))) = \langle \Delta^2 \rangle$.

- Cas où m est pair : Comme $m \geq 3$, on a $m = 2k$ où $k \geq 2$. On a $\sigma_1 \Delta = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_1)^k = (\sigma_1 \sigma_2)^k \sigma_1 = \Delta \sigma_1$. De même, on a $\sigma_2 \Delta = \Delta \sigma_2$. Donc $\langle \Delta \rangle \subset Z(B(I_2(m)))$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit x dans le centre. Comme $(B^+(I_2(m)), \Delta)$ est un monoïde de Garside admissible, il existe un unique $s \in \mathbb{Z}$ et $b \in B^+(I_2(m))$ tels que $x = \Delta^s b$ et $\Delta \not\preceq b$. Supposons par l'absurde que $b \neq 1$. On a donc $\sigma_1 \preceq b$ ou $\sigma_2 \preceq b$. Le problème étant symétrique, on peut supposer que $\sigma_1 \preceq b$. Comme x et Δ^s sont centraux, alors b est central aussi, donc $\sigma_2 \sigma_1 b = b \sigma_2 \sigma_1$, donc $\sigma_1 \preceq \sigma_2 \sigma_1 b$ et $\sigma_2 \preceq \sigma_2 \sigma_1 b$. Ainsi, $\Delta \preceq \sigma_2 \sigma_1 b$, donc $(\sigma_2 \sigma_1)^{k-1} \preceq b$. Comme $k \geq 2$, cela implique que $\sigma_2 \preceq b$. Comme on a supposé que $\sigma_1 \preceq b$, alors $\Delta \preceq b$. C'est absurde. Donc $b = 1$ et $x = \Delta^s \in \langle \Delta \rangle$.
- Cas où m est impair : Comme $m \geq 3$, on a $m = 2k + 1$ où $k \geq 1$. On a de plus $\sigma_1 \Delta = \Delta \sigma_2$ et $\sigma_2 \Delta = \Delta \sigma_1$. En particulier, on a $\langle \Delta^2 \rangle \subset Z(B(I_2(m)))$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x = \Delta^s b$ dans le centre de $B(I_2(m))$. On suppose que $b \neq 1$ et qu'alors $\sigma_1 \preceq b$. Si s est pair, alors b est central et on conclut de la même manière que dans le cas précédent (on a alors que $\sigma_2 \preceq b$ ce qui est absurde car alors $\Delta \preceq b$ car $k \geq 1$ et $\Delta = (\sigma_2 \sigma_1)^k \sigma_2$). Si s est impair, on a $\Delta^s b \sigma_1 \sigma_2 = x \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 x = \sigma_1 \sigma_2 \Delta^s b = \Delta^s \sigma_2 \sigma_1 b$. Donc par régularité, on a $b \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1 b$, ce qui signifie que $\sigma_1 \preceq \sigma_2 \sigma_1 b$ et $\sigma_2 \preceq \sigma_2 \sigma_1 b$. Donc de même, on obtient que $\Delta \preceq b$ ce qui est absurde. Donc $b = 1$ et $x = \Delta^s$, mais comme $\sigma_1 \Delta = \Delta \sigma_2$, alors x n'est pas dans le centre, ce qui est absurde. Donc s est pair et $b = 1$ donc $Z(B(I_2(m))) = \langle \Delta^2 \rangle$.

5 Étude d'un groupe de tresses non sphérique : $B(\widetilde{A}_n)$

La théorie de Garside est un outil extrêmement utile pour donner beaucoup de propriétés sur les groupes de tresses sphériques comme nous venons de le voir. Cependant, dans le cas général, beaucoup de questions sont encore ouvertes. Nous allons étudier un groupe de tresses non sphérique afin de montrer quelques idées pour aborder un tel groupe de tresses. Les résultats de cette partie proviennent d'un exercice guidé de mon maître de stage.

Le groupe de tresses $B(\widetilde{A}_n)$ est un groupe de tresses d'Artin-Tits associé à un groupe de Coxeter de type \widetilde{A}_n , c'est-à-dire de graphe :

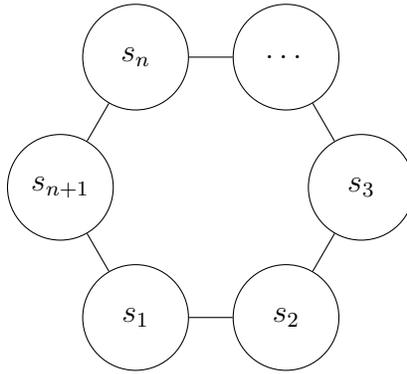


FIGURE 8 – Diagramme de Coxeter de type \widetilde{A}_n

Un groupe de Coxeter de type \widetilde{A}_n fait partie de la famille des groupes de Coxeter affines ([6], partie 6.5). Ceux-ci ne sont pas finis, mais ont la propriété de contenir un sous-groupe abélien normal tel que, en quotientant par ce sous-groupe, on obtienne un groupe fini. À l'instar des groupes de Coxeter sphériques, on en dispose également d'une classification [11].

Nous allons voir qu'il existe une solution au problème du mot dans $B(\widetilde{A}_n)$ et que ce groupe est sans torsion. En ce qui concerne le calcul du centre de $B(\widetilde{A}_n)$, qui est trivial, on renvoie à [2] et [1].

Le diagramme de Coxeter de type \widetilde{A}_{n-1} nous donne alors la présentation suivante de $B(\widetilde{A}_{n-1})$:

$$B(\widetilde{A}_{n-1}) = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{Si } |j - i| > 1 \text{ et } \{i, j\} \neq \{1, n\} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{Si } 1 \leq i \leq n \text{ où } \sigma_{n+1} = \sigma_1 \end{array} \right. \right\rangle$$

Nous pouvons représenter $B(\widetilde{A}_{n-1})$ comme un groupe de tresses à n brins sur un cylindre, c'est-à-dire qu'il est possible de croiser le premier et le n -ième brin indépendamment des autres via σ_n (c'est pour cela qu'il y a n brins et n générateurs, contrairement aux groupe de tresses d'Artin qui possèdent n brins mais $n-1$ générateurs). Nous allons voir que $B(\widetilde{A}_{n-1})$ s'injecte dans $B(B_{n-1})$. Pour ce faire, définissons le groupe de tresses affine étendu $B(\widetilde{A}_{n-1})$ comme étant le groupe défini par la présentation

$$B(\widetilde{A_{n-1}}) = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n, \rho \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{Si } |j - i| > 1 \text{ et } \{i, j\} \neq \{1, n\} \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & \text{Si } 1 \leq i \leq n \text{ où } \sigma_{n+1} = \sigma_1 \\ \rho \sigma_i \rho^{-1} = \sigma_{i+1} & \text{Si } 1 \leq i \leq n \text{ où } \sigma_{n+1} = \sigma_1 \end{array} \right. \right\rangle$$

On dispose d'une injection $B(\widetilde{A_{n-1}}) \hookrightarrow B(\widetilde{A_{n-1}})$. En effet, considérons le sous-groupe $H = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ de $B(\widetilde{A_{n-1}})$. En appliquant la méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier⁴ on obtient une présentation de H qui est la même que celle de $B(\widetilde{A_{n-1}})$. En fait, on peut être plus précis. En effet, $\langle \rho \rangle$ agit par conjugaisons sur $B(\widetilde{A_{n-1}})$, on a donc $B(\widetilde{A_{n-1}}) = B(\widetilde{A_{n-1}}) \rtimes \langle \rho \rangle$.

Pour conclure, nous avons le résultat suivant : $B(\widetilde{A_{n-1}}) \simeq B(B_{n-1})$ via l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad B(\widetilde{A_{n-1}}) &\longrightarrow B(B_{n-1}) \\ \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} &\mapsto \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \rho &\mapsto \tau \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme de groupes.

Ainsi, $B(\widetilde{A_{n-1}})$ s'injecte dans $B(B_{n-1})$. Or, nous savons qu'il existe une solution au problème du mot dans $B(B_{n-1})$ et que ce groupe de tresses est sans torsion. Ainsi, il en est de même pour $B(\widetilde{A_{n-1}})$. La question du centre de $B(\widetilde{A_{n-1}})$ demande encore plus de travail, une démonstration est disponible dans [1].

4. voir l'annexe 6.2

6 Annexes

6.1 Définition d'un monoïde de Garside

La définition d'un monoïde de Garside (admissible) utilisée dans ce rapport diffère de celle utilisée en pratique. La théorie de Garside a été introduite à la toute fin des années 1990 (par P. DEHORNOY et L. PARIS) dans le but de généraliser les résultats que GARSIDE avait obtenus sur les groupes de tresses d'Artin-Tits sphériques à la fin des années 1960, et les définitions précises ont légèrement évolué au cours de ces 30 dernières années. Actuellement, un monoïde de Garside est défini de la manière suivante :

Définition 20 (Monoïde de Garside). *Une paire (M, Δ) où M est un monoïde et $\Delta \in M$ est un monoïde de Garside lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (1) *M est simplifiable à gauche et à droite*
- (2) *Il existe $\lambda : M \rightarrow \mathbb{N}$ tel que pour tout $x, y \in M$ on ait $\lambda(xy) \geq \lambda(x) + \lambda(y)$ et $\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.*
- (3) *Si $x, y \in M$, alors $\{x, y\}$ admet un PGCD à gauche et à droite et un PPCM à gauche et à droite*
- (4) *Δ est un élément de Garside, c'est-à-dire que les diviseurs à gauche et à droite de Δ coïncident et engendrent M*
- (5) *Δ a un nombre fini de diviseurs (à gauche ou à droite)*

Et cette définition est légèrement plus générale que la définition de monoïde de Garside admissible que nous utilisons. Ainsi, tout ce qui est dit dans ce rapport à propos des monoïdes de Garside admissibles est toujours vrai pour un monoïde de Garside au sens usuel actuel.

6.2 Méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier

Nous avons beaucoup travaillé sur les présentations de groupes. Cependant, il n'est pas trivial d'exhiber une présentation «simple» d'un sous-groupe d'un groupe défini par présentation (ce n'est d'ailleurs pas toujours possible). Dans le cas où H est un sous-groupe d'indice fini d'un groupe G défini par une présentation finie, alors on dispose d'une présentation finie pour H , on peut explicitement calculer à partir de la présentation de G en utilisant la *méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier*. Cette partie provient de [4] avec quelques adaptations notables.

6.2.1 Méthode de réécriture

Si G est un groupe défini par une présentation $\langle X | R \rangle$ et H un sous-groupe de G . On se donne une partie génératrice $\mathcal{J} = \{j_i\}_{i \in I}$ de H . Une méthode de réécriture de H par rapport aux

générateurs \mathcal{J} est une application τ de l'ensemble des mots sur l'alphabet $X \cup X^{-1}$ représentant un élément de H vers l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}^{-1}$ telle que chaque élément et son image représentent le même élément dans H . Il s'agit donc bien d'une réécriture des éléments de H dans un nouveau système de générateurs.

Afin d'obtenir une présentation de H , il nous faut toutes les relations. Dans le cas où G admet une présentation ayant un nombre fini de générateurs, on a le résultat suivant :

Théorème 7. *Soit G admettant une présentation $\langle a_1, \dots, a_n \mid R_\mu, \mu \in \mathcal{M} \rangle$. Soit H un sous-groupe de G , engendré par $\{j_i\}_{i \in I}$ (I n'est pas nécessairement fini), et τ une méthode de réécriture de H par rapport aux générateurs $\{j_i\}_i$. Alors une présentation de H est donnée par :*

$$\left\langle s_i, i \in I \left| \begin{array}{ll} s_i = \tau(j_i) & \forall i \in I \\ \tau(h) = \tau(h') & \forall h, h' \text{ mots sur les } a_k^{\pm 1} \text{ définissant le même élément de } H \\ \tau(hh') = \tau(h)\tau(h') & \forall h, h' \text{ mots sur les } a_k^{\pm 1} \text{ définissant un mot de } H \\ \tau(wR_\mu w^{-1}) = 1 & \forall w \text{ mot sur les } a_k^{\pm 1} \text{ et pour tout } \mu \in \mathcal{M} \end{array} \right. \right\rangle$$

Une telle présentation n'a aucune raison d'être finie même si \mathcal{M} est finie, et dépend en grande partie du choix de la partie génératrice de H considérée.

6.2.2 Détermination d'une «bonne» partie génératrice de H

Le but ici sera de choisir (et de trouver) un bon système de générateurs de H pour que la présentation du théorème précédent soit finie quand on s'y attend (ce qu'on précisera plus tard), comme par exemple quand G est engendré par un nombre fini d'éléments (mais pas que, comme on le verra).

On appelle *transversale* de G/H tout système de représentant des classes à gauche de G/H contenant 1 (c'est-à-dire qu'on choisit 1 comme représentant de H). Soit \mathcal{K} une transversale de G/H . Si w est un mot sur l'alphabet des générateurs de G , on pose \bar{w} l'unique élément de \mathcal{K} tel que $w \in \bar{w}H$. On définit alors

$$S = \left\{ \overline{xk}^{-1} xk \mid k \in \mathcal{K}, x \in X \right\}$$

On a alors le résultat suivant : S est une partie génératrice de H . De plus, si X est fini et si H est d'indice fini dans G , alors S est fini. En effet, on a $|S| \leq |X|[G : H]$. Dans ce cas, on dispose donc d'une présentation de H ayant un nombre fini de générateurs, mais potentiellement une infinité de relations.

6.2.3 Méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier

La méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier permet d'obtenir une présentation finie de H lorsque X est fini et H est d'indice fini dans G . Elle est définie de la manière suivante : si on

note $s_{k,x} = \overline{xk}^{-1} xk$, on a pour tout mot $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r}$ représentant un élément de H :

$$\tau(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_r^{\varepsilon_r}) = s_{k_1, x_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{k_r, x_r}^{\varepsilon_r} \quad \text{où} \quad k_j = \begin{cases} \overline{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}} & \text{Si } \varepsilon_j = 1 \\ \overline{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}} x_j^{-1}} & \text{Si } \varepsilon_j = -1 \end{cases}$$

Nous verrons une manière simple d'appliquer cette méthode de réécriture en pratique. Le choix d'une bonne transversale est également important. On appelle une *transversale de Schreier* toute transversale \mathcal{K} close par facteurs à droite, c'est-à-dire que si $k \in \mathcal{K}$, alors tous les suffixes de k sont dans \mathcal{K} . On peut démontrer que si G est un groupe finiment engendré, alors tous les sous-groupes de G admettent une transversale de Schreier. Armés de ces résultats, nous avons le théorème :

Théorème 8 (Présentation de Reidemeister-Schreier). *Soit G de présentation $\langle X \mid R \rangle$ avec X fini et H un sous-groupe de G . Soit τ la méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier et \mathcal{K} une transversale de Schreier de G/H , alors H admet une présentation :*

$$\left\langle S \left| \begin{array}{l} s_{k,x} = 1 \quad \forall k \in \mathcal{K}, x \in X \text{ tels que } xk \text{ et } \overline{xk} \text{ représentent le même élément} \\ \tau(krk^{-1}) = 1 \quad \forall k \in \mathcal{K}, r \in R \end{array} \right. \right\rangle$$

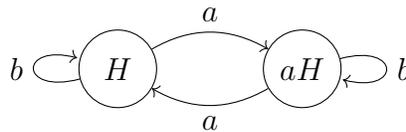
Et on identifie H comme un sous-groupe de G via $s_{k,x} \mapsto \overline{xk}^{-1} xk$.

En particulier, si H est d'indice fini dans G et si R est fini, alors la présentation de Reidemeister-Schreier de H est finie.

6.2.4 Comment l'appliquer en pratique ?

En pratique, nous allons utiliser un graphe pour faciliter l'écriture des relations entre les nouveaux générateurs. Illustrons ceci par un petit exemple, prenons $G = D_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, abab = 1 \rangle$, et considérons le sous-groupe $V_4 = \{1, a^2, b, a^2b\}$ (groupe de Klein). On sait qu'on a une présentation de V_4 qui est $\langle x, y \mid x^2 = 1, y^2 = 1, xyxy = 1 \rangle$. Trouvons la grâce à la méthode de réécriture de Reidemeister-Schreier !

Tout d'abord, on remarque que $G = H \sqcup aH$, posons comme transversale de Schreier $\mathcal{K} = \{1, a\}$. On construit alors un graphe dont les sommets sont les classes et les arêtes sont étiquetées par les générateurs permettant de passer d'une classe à l'autre. Par exemple, dans le graphe suivant on a $baH = aH$ et $a^2H = H$.



Chaque arête devient un générateur. On note $s_{k,x}$ la flèche partant de kH et étiquetée par x . Si τ est la méthode de réécriture de Reidemeister et si on a un mot $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, alors $\tau(x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n})$

s'obtient en lisant le chemin dans le graphe en partant de H et en composant de droite à gauche. Par exemple, $\tau(aaba) = s_{1,a}s_{1,b}s_{a,a}s_{1,a}$. Ceci nous permet alors de faire les calculs bien plus rapidement !

Tout d'abord, trouvons nos générateurs. Ce sont les $s_{k,x}$ tels que $\overline{xk}^{-1}xk \neq 1$. Or, on a :

- $(k, x) = (1, a) : \overline{a1}^{-1}a1 = a^{-1}a = 1$
- $(k, x) = (1, b) : \overline{b1}^{-1}b1 = b \neq 1$
- $(k, x) = (a, a) : \overline{aa}^{-1}aa = a^2 \neq 1$
- $(k, x) = (a, b) : \overline{ba}^{-1}ba = a^{-1}ba \neq 1$

Donc nos générateurs sont $s_{1,b}$, $s_{a,a}$ et $s_{1,b}$.

Il reste maintenant à trouver les relations de la forme $\tau(kR_\mu k^{-1}) = 1$.

$$\bullet 1 = \tau(1a^41) = s_{a,a}s_{1,a}s_{a,a}s_{1,a} = s_{a,a}^2 \quad (1)$$

$$\bullet 1 = \tau(1b^21) = s_{1,b}s_{1,b} = s_{1,b}^2 \quad (2)$$

$$\bullet 1 = \tau(1abab1) = s_{1,b}s_{a,a}s_{a,b}s_{1,a} = s_{1,b}s_{a,a}s_{a,b} \quad (3)$$

$$\bullet 1 = \tau(a^{-1}a^4a) = \tau(a^4) = s_{a,a}^2 \quad (4)$$

$$\bullet 1 = \tau(a^{-1}b^2a) = s_{a,a}s_{a,b}s_{a,b}s_{a,a}^{-1} = 1 \quad (5)$$

$$\bullet 1 = \tau(a^{-1}ababa) = s_{a,a}s_{a,b}s_{1,a}s_{1,b} = s_{a,a}s_{a,b}s_{1,b} \quad (6)$$

Certaines de ces relations se simplifient. Tout d'abord, (1) et (4) sont les mêmes, et (3) découle de (6) en conjuguant par $s_{1,b}$ (qui est d'ordre deux par (2)). On se ramène donc à ce système de relations

$$\bullet s_{1,b}^2 = 1 \quad (1)$$

$$\bullet s_{a,a}^2 = 1 \quad (2)$$

$$\bullet s_{a,a}s_{a,b}s_{a,a}s_{a,b} = 1 \quad (3)$$

$$\bullet s_{a,a}s_{1,b}s_{a,b} = 1 \quad (4)$$

En fait, on peut encore les simplifier. En effet, (4) nous donne que $s_{a,b} = s_{a,a}s_{1,b}$. À partir de là, on en déduit (3). En notant $x = s_{a,a}$, $y = s_{1,b}$ et $z = s_{a,b}$, on obtient la présentation :

$$V_4 = \langle x, y, z \mid x^2 = 1, y^2 = 1, xyxy = 1, z = xy \rangle$$

qui est évidemment la même que $\langle x, y \mid x^2 = 1, y^2 = 1, xyxy = 1 \rangle$.

Références

- [1] M. Albar and D.L. Johnson. The centre of the circular braid group. 1984.
- [2] M. Albar and D.L. Johnson. Circular braids. 1984.
- [3] Björner and Anders. *Combinatorics of coxeter groups*. Springer, New York, NY, 2005.
- [4] Levi Casey. Reidemeister-schreier rewriting process for group presentations. 2017.
- [5] Eddy Godelle and Luis Paris. Basic questions on artin-tits groups. 2011.
- [6] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, June 1990.
- [7] Christian Kassel and Vladimir Turaev. *Braid Groups*. Springer New York, 2008.
- [8] Jean Michel. Groupes de réflexion complexes. <https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/papiers/cours2004.pdf>, 2004.
- [9] Jean Michel. Lectures on coxeter groups. <https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/papiers/cox.pdf>, April 2014.
- [10] H. Van Der Lek. *The homotopy type of complex hyperplane complements*. PhD thesis, Nijmegen, 1983.
- [11] Wikipedia. Affine coxeter groups. https://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_group#Affine_Coxeter_groups.